



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 3–15
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-3-15

УДК 517.9

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОБЛЕМЕ БИИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

© 2022 г. А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО,
И. А. КРИШТАЛ, Н. Б. УСКОВА

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы построения биинвариантных подпространств для самосопряженного линейного замкнутого оператора с дискретным спектром, возмущенного ограниченным оператором. Основной теоремой является теорема о подобии исследуемого оператора блочно-диагональному оператору, из которой вытекают не только результаты, касающиеся биинвариантных подпространств, но и формулы для проекторов и взвешенных средних собственных значений. Кроме того, построена соответствующая группа операторов и предложена новая модификация метода подобных операторов.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектральный проектор, биинвариантное подпространство.

METHOD OF SIMILAR OPERATORS IN THE PROBLEM OF BI-INVARIANT SUBSPACES

© 2022 А. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO,
I. A. KRISHTAL, N. B. USKOVA

ABSTRACT. In this paper, we discuss the construction of bi-invariant subspaces for a self-adjoint, linear, closed operator with discrete spectrum perturbed by a bounded operator. The main result is the theorem on the similarity of this operator to a block diagonal operator. This theorem implies results concerning biinvariant subspaces and formulas for projectors and weighted average eigenvalues. In addition, we construct the corresponding group of operators and propose a new modification of the method of similar operators.

Keywords and phrases: method of similar operators, spectral projectors, biinvariant subspaces.

AMS Subject Classification: 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. В работах К. Фойаша (см., например, [14–16]) доказано существование инвариантного подпространства для нормального ограниченного оператора с дискретным спектром, возмущенного оператором ранга 1. В данной работе доказано существование и построены биинвариантные (см. определение 1) подпространства для самосопряженного линейного замкнутого оператора с дискретным спектром, возмущенного ограниченным оператором. В частности, в качестве примеров возмущенного оператора рассматриваются операторы из идеала операторов Гильберта—Шмидта и операторы ранга 1. Основным результатом работы является теорема 4

Работа первого и четвертого авторов выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732).

о подобии исследуемого возмущенного оператора оператору, имеющему диагональную операторную матрицу. Методом исследования служит метод подобных операторов (см. [2–12]). Более того, в работе предложена новая модификация этого метода, отличающаяся от [3].

Из основной теоремы о подобии вытекают остальные результаты статьи. Таковыми являются теоремы о подобии возмущенного оператора оператору с диагональной или блочно-диагональной матрицей (теоремы 7 и 8) и вытекающие из них результаты, касающиеся бинвариантных подпространств. Кроме того, получены представление проекторов возмущенного оператора и оценки взвешенных средних его собственных значений, а также выписана группа операторов, генератором которой является возмущенный оператор.

2. Предварительные сведения.

2.1. *Основные определения.* Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство.

Определение 1. Нетривиальное замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ (т.е. $\mathcal{H}_0 \neq \{0\}$ и $\mathcal{H}_0 \neq \mathcal{H}$) называется бинвариантным для линейного оператора $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, если $\mathcal{H}_0$ и его ортогональное дополнение $\mathcal{H}_0^\perp$ инвариантны для A .

Лемма 1. Пусть линейный оператор $E: D(E) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ перестановочен с некоторым ортопроектором Q , т.е. $QE = EQ$. Тогда подпространства $\text{Im } Q$ и $\text{Ker } Q$, т.е. образ и ядро ортопроектора Q , являются бинвариантными для оператора E .

Символом $\mathbb{J}$ обозначим одно из множеств $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{N}$. Пусть пространство $\mathcal{H}$ — ортогональная прямая сумма замкнутых подпространств $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{J}$, т.е. $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{J}} \mathcal{H}_n$, а $I = \sum_{n \in \mathbb{J}} P_n$ — соответствующее разложение единицы ортопроекторами P_n , $n \in \mathbb{J}$, с $\text{Im } P_n = \mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{J}$; сходимость ряда понимается в сильной операторной топологии. В этом случае подпространства $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{J}$, образуют в $\mathcal{H}$ ортогональный базис из подпространств, согласно терминологии из [6].

Введем используемые далее пространства операторов. Символом $\text{End } \mathcal{H}$ обозначена банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, с нормой

$$\|X\| = \|X\|_\infty = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Xx\|, \quad X \in \text{End } \mathcal{H}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Через $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ обозначен двусторонний идеал операторов Гильберта—Шмидта из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$ (см. [6]) с нормой, обозначаемой $\|X\|_2$, $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Определение 2 (см. [9]). Линейный замкнутый оператор $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ с $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ называется нормальным, если для сопряженного оператора $A^*: D(A^*) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ выполняются условия $D(A) = D(A^*)$, $\|A^*x\| = \|Ax\|$, $x \in D(A)$. Нормальный оператор A называется самосопряженным, если $Ax = A^*x$, $x \in D(A)$, т.е. $A = A^*$.

Пусть $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — самосопряженный линейный замкнутый оператор, $\sigma(A)$ — его спектр, и $\rho(A)$ — его резольвентное множество. Пусть $\sigma(A)$ допускает представление

$$\sigma(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{J}} \sigma_k, \quad \sigma_k = \{\lambda_k\},$$

где λ_k , $k \in \mathbb{Z}$, — его полупростые собственные значения конечной кратности. Далее используется последовательность d_k , $k \in \mathbb{J}$, определенная равенствами $d_k = \inf_{j \neq k} |\lambda_k - \lambda_j|$ и число $d = \min_{k \in \mathbb{J}} d_k$.

При этом предполагается условие $d > 0$ разделенности собственных значений оператора A .

Пусть $P_k = P(\sigma_k, A)$, $k \in \mathbb{Z}$, — проекторы Рисса, построенные по множествам σ_k , $k \in \mathbb{J}$. Система проекторов $(P_k, k \in \mathbb{J})$ образует разложение единицы, и $AP_k = \lambda_k P_k$. Обозначим $\mathcal{H}_k = \text{Im } P_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Отметим, что подпространства $\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{J}$, образуют базис из подпространств в пространстве $\mathcal{H}$. Пусть

$$P_{(k)} = \sum_{i \in \mathbb{J}, |i| \leq k} P_i$$

и $\mathcal{H}_{(k)} = \text{Im } P_{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда подпространства $\mathcal{H}_{(k)}$, $\mathcal{H}_i$, $|i| > k$, $i \in \mathbb{J}$, также образуют в $\mathcal{H}$ базис из подпространств и, как и в первом случае, образуют счетную систему биинвариантных подпространств для оператора A .

Через $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ обозначим пространство операторов, подчиненных оператору A (см. [2]).

Каждому оператору $X \in \text{End } \mathcal{H}$ поставим в соответствие его операторную матрицу $\mathcal{X} \sim (X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{J}$, $X_{ij} = P_i X P_j \in \text{End } \mathcal{H}$, $i, j \in \mathbb{J}$. При этом бывает удобно рассматривать операторы X_{ij} как элементы $\text{Hom}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$. Символом $\text{Hom}(X, Y)$ обозначено пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y , $\text{End } \mathcal{H} = \text{Hom}(X, X)$ (см. [2]).

Так как $\mathcal{H}_j \subset D(A)$, $j \in \mathbb{J}$, то можно также ввести матрицу $\mathcal{A}$ оператора A , положив $\mathcal{A} = (P_i A P_j)$, $i, j \in \mathbb{J}$, при этом $A_{ij} = \lambda_i I_i$, если $i = j$ и $A_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Аналогично определяется и матрица любого оператора из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$. Отметим, что ненулевой оператор из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ не может иметь нулевую матрицу. Следовательно, такие операторы однозначно определяются своей матрицей. Отметим также, что согласно [6] норма в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ удовлетворяет

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{J}} \|P_i X P_j\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{J}} \|X_{ij}\|_2^2, \quad X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

Определение 3. Пусть $\mathcal{X} = (X_{ij})$ — матрица оператора X . Последовательность операторов $Y_k: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, где $Y_k(n) = X_{kn}$, $k, n \in \mathbb{J}$, называется k -й строкой матрицы $\mathcal{X}$ оператора X . Последовательность $Z_k: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, где $Z_k(n) = X_{nk}$, $k, n \in \mathbb{J}$, называется k -ым столбцом матрицы $\mathcal{X}$ оператора X . Последовательность $V_k: \mathbb{J} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, $V_k(n) = X_{n,n-k}$, называется k -й диагональю матрицы $\mathcal{X}$ оператора X . При $k = 0$ диагональ называется главной.

Оператор назовем диагональным (согласно [14]–[16]), если его матрица диагональна. Оператор $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ является диагональным оператором, если $X P_i = P_i X$ для всех $i \in \mathbb{J}$.

Определение 4 (см. [6, 11]). Пусть $\mathcal{H}_i$, $i \in \mathbb{J}$, — базис из подпространств в пространстве $\mathcal{H}$ и $U, (I + U)^{-1} \in \text{End } \mathcal{H}$. Тогда подпространства $(I + U)\mathcal{H}_i$, $i \in \mathbb{J}$, образуют в пространстве $\mathcal{H}$ базис из подпространств, эквивалентный ортогональному, или спрямляемый.

Определение 5. Пусть подпространство $\mathcal{H}_i$, $i \in \mathbb{J}$, биинвариантно для некоторого оператора. Тогда биинвариантные подпространства вида $(I + U)\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{J}$, при $U, (I + U)^{-1} \in \text{End } \mathcal{H}$, назовем биинвариантными подпространствами Рисса. Если $U \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то назовем их биинвариантными подпространствами Бари.

В дальнейшем также используется определение взвешенного среднего собственных значений.

Определение 6. Для любой комплексной ограниченной квадратной матрицы взвешенным средним ее собственных значений $\mu_1, \dots, \mu_n$, называется число

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

Определение 7. Полугруппа (группа) $T_b: \tilde{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, $\tilde{\mathbb{J}} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$, называется базовой для сильно непрерывной полугруппы (группы) $T_0: \tilde{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, если существует непрерывная операторнозначная функция $Y: \tilde{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ и обратимый оператор $U \in \text{End } \mathcal{H}$ такие, что $T_0(t) = U T_b(t) Y(t) U^{-1}$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t)\| = 0$. Полугруппа (группа) $T_b: \tilde{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ называется экспоненциально базовой, если кроме того, $\|Y(t)\| \leq C e^{-\beta t}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $t \in \tilde{\mathbb{J}}$.

2.2. Метод подобных операторов. Абстрактная схема. В этой части вкратце приводятся основные понятия и идеи метода подобных операторов (более подробно метод изложен в [2]). Отметим, что метод подобных операторов имеет множество модификаций, что позволяет лучше учитывать спектральные свойства невозмущенного оператора или принадлежность оператора-возмущения специальным операторным пространствам и получать более тонкие оценки. Мы в изложении общих положений метода будем опираться на работу [5].

Напомним определение подобных операторов.

Определение 8. Два линейных оператора $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } \mathcal{H}$ такой, что

$$A_1 Ux = U A_2 x, \quad x \in D(A_2), \quad U D(A_2) = D(A_1). \quad (1)$$

Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в A_2 .

Отметим, что соотношение (1) иногда называют сплетающим свойством (см. [7, 10]), оператор преобразования называется также «transmutation» и говорят, что он сплетает операторы A_1 и A_2 (intertwining operator). Историю и обзор операторов преобразования можно найти в [7, 10].

Из определения 8 следует, что подобны и операторы $A_1 - \lambda I$, $A_2 - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, если подобны операторы A_1 и A_2 .

Подобные операторы интересны тем, что, зная спектральные свойства одного оператора, легко можно получить спектральные свойства ему подобного. Соответствующие утверждение удобно оформить в виде леммы.

Лемма 2 (см. [5]). Пусть $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, — два подобных оператора и $U \in \text{End } \mathcal{H}$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2 . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. $\text{Im } A_1 = U \text{Im } A_2$.
2. $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$ — спектр, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$ и $\sigma_r(A_i)$, $i = 1, 2$, — дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов A_i , $i = 1, 2$, соответственно.
3. Если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2i} = A_2|_{\mathcal{H}_i}$, $i = 1, 2$, — сужение A_2 на $\mathcal{H}_i$ относительно прямой суммы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, то подпространства $\tilde{\mathcal{H}}_i = U(\mathcal{H}_i)$, $i = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1i} = A_1|_{\tilde{\mathcal{H}}_i}$, $i = 1, 2$, относительно разложения $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2$. Кроме того, если P — проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ (т.е. $\mathcal{H}_1 = \text{Im } P$ — образ проектора P , $\mathcal{H}_2 = \text{Im}(I - P)$), то проектор $\tilde{P}$, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2$, определяется формулой

$$\tilde{P} = U P U^{-1}. \quad (2)$$

4. Если оператор A_2 является генератором сильно непрерывной группы (полугруппы) операторов $T_2: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ ($T_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$), то оператор A_1 является генератором сильно непрерывной группы (полугруппы) операторов $T_1: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ ($T_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$) и $T_1 = U T_2 U^{-1}$.

Одним из основных понятий метода подобных операторов является определение допустимой для невозмущенного оператора A тройки, которая для применимости метода должна удовлетворять ряду условий.

Определение 9 (см. [5]). Пусть $\mathfrak{U}$ — банахово пространство операторов из $\text{End } \mathcal{H}$ с нормой $\|X\|_*$, $X \in \mathfrak{U}$, и $J: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$, $\Gamma: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$ — трансформаторы, т.е. линейные операторы в пространстве линейных операторов. Тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ будем называть допустимой тройкой для оператора A , а $\mathfrak{U}$ — пространством допустимых возмущений, если выполнены следующие условия:

- (i) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;
- (ii) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$, для любого $X \in \mathfrak{U}$ выполняется соотношение

$$A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX \quad (3)$$

и $Y = \Gamma X$ — единственное решение уравнения

$$AY - YA = X - JX, \quad (4)$$

удовлетворяющее условию $JY = O$, где O — нулевой оператор в $\mathcal{H}$;

- (iii) $X(\Gamma Y)$, $(\Gamma Y)X \in \mathfrak{U}$ для всех $X, Y \in \mathfrak{U}$ и существует такая константа $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| \leq \gamma$ и

$$\max\{\|X(\Gamma Y)\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leq \gamma \|X\|_* \|Y\|_*;$$

(iv) для любого $X \in \mathfrak{U}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что

$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon;$$

(v) $J((\Gamma X)JY) = O$ для всех $X, Y \in \mathfrak{U}$.

Отметим, что для одного невозмущенного оператора A иногда можно построить много разных допустимых троек.

Трансформатор J — обычно это оператор диагонализации (блочной диагонализации) матрицы оператора $X \in \mathfrak{U}$. Трансформатор Γ связан с построением оператора U из определения 8. Свойства (ii)—(v) допустимой тройки необходимы для разрешения нелинейного операторного уравнения (6) метода подобных операторов, приведенного ниже.

Зафиксируем теперь некоторую допустимую тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ для невозмущенного оператора A .

Теорема 1 (см. [5]). Пусть $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка и B — некоторый оператор из пространства возмущений $\mathfrak{U}$. Если

$$4\gamma\|J\|\|B\|_* < 1, \quad (5)$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathfrak{U}$ — решение уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X), \quad (6)$$

и оно может быть найдено методом простых итераций, если положить $X_0 = 0, X_1 = B, \dots$. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in \text{End } \mathcal{H}$. Отображение $\Phi: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$ является сжимающим в шаре $\mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{U} : \|X - B\|_* \leq 3\|B\|_*\}$.

3. Основные результаты.

3.1. Построение допустимой тройки. В этом параграфе приводится модификация метода подобных операторов, базирующаяся на [3]. Везде далее A и B — операторы из раздела 2.1.

Так как $B \in \text{End } \mathcal{H}$ и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \text{End } \mathcal{H}$, то удобно сначала в качестве пространства допустимых возмущений взять пространство $\text{End } \mathcal{H}$, затем построить трансформаторы $J, \Gamma \in \text{End}(\text{End } \mathcal{H})$ и потом рассмотреть случай $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Рассмотрим сильно непрерывное изометрическое представление $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, заданное формулой

$$T(t)x = \sum_{k \in \mathbb{J}} e^{i\lambda_k t} P_k x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Отметим, что изометричность представления T следует из равенства Парсеваля: $\|T(t)x\|^2 = \|x\|^2$, $x \in \mathcal{H}$. Наряду с изометрическим представлением $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ рассмотрим представление $\tilde{T}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\text{End } \mathcal{H})$, положив

$$(\tilde{T}(t)X)x = T(t)XT(-t)x, \quad X \in \text{End } \mathcal{H}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Особенностью представления $\tilde{T}: t \mapsto \text{End}(\text{End } \mathcal{H})$ является его непрерывность не в сильной операторной топологии, а в другой, более слабой, операторной топологии, при которой функции вида $t \mapsto (\tilde{T}(t)X)x: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$, $X \in \text{End } \mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, непрерывны.

Далее символом $L_1(\mathbb{R})$ обозначена банахова алгебра суммируемых на $\mathbb{R}$ (классов эквивалентности) функций со сверткой в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds, \quad f, g \in L_1(\mathbb{R}),$$

и нормой

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt.$$

Символом $\widehat{L}_1(\mathbb{R})$ обозначим банахову алгебру преобразований Фурье функций из $L_1(\mathbb{R})$ с поточечным умножением функций в качестве операции, где

$$\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

с нормой $\|\widehat{f}\|_{\infty} = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)|$. Для каждой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ и оператора $X \in \text{End } \mathcal{H}$ определим оператор $\widetilde{T}(f)$, положив

$$(\widetilde{T}(f)X)x = \int_{\mathbb{R}} f(t)(\widetilde{T}(-t)X)x dt, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Далее через $f_0 \in L_1(\mathbb{R})$ обозначена функция, преобразование Фурье которой равно единице в нуле ($\widehat{f}_0(0) = 1$) и носитель $\text{supp } \widehat{f}_0$ преобразования Фурье функции f_0 лежит в окрестности нуля $(-d + \varepsilon, d - \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, вне указанного промежутка $\widehat{f}_0(\lambda) = 0$. Пусть $a \in (0, d - \varepsilon)$. Тогда в качестве $\widehat{f}_0(\lambda)$ удобно рассматривать функцию

$$\widehat{f}_0(\lambda) = \begin{cases} 0, & |\lambda| > a, \\ 1 - \frac{\lambda}{a}, & 0 \leq \lambda \leq a, \\ 1 + \frac{\lambda}{a}, & -a \leq \lambda < 0. \end{cases}$$

Так как функция f_0 неотрицательна (см., например, [17, Theorem 3.2]), $\|f_0\|_1 = \widehat{f}_0(0) = 1$. Символом $\widehat{f}_1 \in \widehat{L}_1(\mathbb{R})$ — функция, преобразование Фурье которой в некоторой окрестности нуля равно нулю и $\widehat{f}_1(\lambda) = 1/\lambda$, $\lambda \neq 0$. Такую функцию можно построить, например, так. Положим $\widehat{f}_1(\lambda) = (1 - \widehat{f}_0(\lambda))\lambda^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ и $\widehat{f}_1(0) = 0$. Тогда $\widehat{f}_1 \in \widehat{L}_1(\mathbb{R})$ и, следовательно, $f_1 \in L_1(\mathbb{R})$ (см. [3]). Отметим, что существует функция $f_1 \in L_1(\mathbb{R})$ такая, что $\|f\|_1 \leq \pi/2$.

Лемма 3. Пусть оператор $X \in \text{End } \mathcal{H}$ имеет операторную матрицу $X \sim (X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{J}$. Тогда оператор $\widetilde{T}(f)X$ имеет операторную матрицу, состоящую из элементов $(\widehat{f}(\lambda_i - \lambda_j)X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{J}$.

Доказательство. Пусть $X \sim (X_{ij})$, где $X_{ij} = P_i X P_j$, $i, j \in \mathbb{J}$. Тогда

$$T(t)P_i = e^{i\lambda_i t} P_i = P_i T(t).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} P_i(\widetilde{T}(t)X)P_j &= P_i T(t) X T(-t) P_j = e^{-i\lambda_j t} P_i T(t) X P_j = e^{i(\lambda_i - \lambda_j)t} X_{ij}, \\ P_i(\widetilde{T}(f)X)P_j &= \int_{\mathbb{R}} f(t) P_i(\widetilde{T}(-t)X)P_j dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i(\lambda_i - \lambda_j)t} X_{ij} dt = \widehat{f}(\lambda_i - \lambda_j) X_{ij}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

С помощью изометрического представления $\widetilde{T}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\text{End } \mathcal{H})$ определим трансформаторы $J, \Gamma \in \text{End}(\text{End } \mathcal{H})$ из определения 9 следующим образом. Положим $JX = \widetilde{T}(f_0)X$, где $f_0 \in L_1(\mathbb{R})$. Напомним, что функции $f_0, f_1 \in L_1(\mathbb{R})$ определены перед леммой 3, причем $\widehat{f}_0(0) = 1$ и $\widehat{f}_0(\lambda) = 0$ вне некоторой окрестности нуля. Тогда по лемме 3 матрица оператора $JX = \widetilde{T}(f_0)X$ диагональна. Или, по-другому,

$$JX = \widetilde{T}(f_0)X = \sum_{i \in \mathbb{J}} P_i X P_i, \quad X \in \text{End } \mathcal{H}.$$

Пусть $\Gamma X = \widetilde{T}(f_1)X$, где $f_1 \in L_1(\mathbb{R})$ такая функция, что $\widehat{f}_1(\lambda) = 1/\lambda$ везде, кроме некоторой окрестности нуля $(-d + \varepsilon, d - \varepsilon)$ и $\widehat{f}_1(0) = 0$. Очевидно также, что

$$\|JX\| = \|f_0\| = 1, \quad \|\Gamma X\| = \|f_1\| \leq \pi/2.$$

Теорема 2. *Тройка $(\text{End } \mathcal{H}, J, \Gamma)$ с $JX = \tilde{T}(f_0)X$ и $\Gamma X = \tilde{T}(f_1)X$, $X \in \text{End } \mathcal{H}$, является допустимой тройкой для невозмущенного оператора A . Константа γ из определения 9 допускает оценку $\gamma \leq \pi/(2d)$.*

Доказательство. Непрерывность трансформаторов $J, \Gamma \in \text{End}(\text{End } \mathcal{H})$ следует из их построения. Покажем, что $J(JX) = JX$. Действительно,

$$Z = J(JX) = J(\tilde{T}(f_0)X) = \tilde{T}(f_0)(\tilde{T}(f_0)X).$$

Пусть $Y = \tilde{T}(f_0)X$. Тогда

$$Y_{ij} = \hat{f}_0(\lambda_i - \lambda_j)X_{ij} = X_{ij}$$

при $i = j$ и $Y_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Кроме того,

$$Z_{ij} = (\tilde{T}(f_0)Y)_{ij} = (\hat{f}_0(\lambda_i - \lambda_j))X_{ij} = X_{ij}$$

при $i = j$ и $Z_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Проверим выполнение условия (ii) определения 9. С одной стороны,

$$P_i(A\Gamma X - \Gamma X A)P_j = \lambda_i P_i(\tilde{T}(f_1)X)P_j - \lambda_j P_j(\tilde{T}(f_1)X)P_i = (\lambda_i - \lambda_j)\hat{f}_1(\lambda_i - \lambda_j)X_{ij} = X_{ij}$$

при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{J}$, или 0 в противном случае. С другой стороны,

$$P_i(X - JX)P_j = X_{ij} - \hat{f}_0(\lambda_i - \lambda_j)X_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j, i, j \in \mathbb{J}, \\ X_{ij} & \text{при } i \neq j, i, j \in \mathbb{J}. \end{cases}$$

Таким образом, установлено равенство (3).

Докажем включение $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$. Возьмем $X \in \text{End } \mathcal{H}$. Пусть $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$. Рассмотрим последовательность проекторов

$$Q_{(n)} = \sum_{|j| \leq n, j \in \mathbb{J}} P_j, \quad n \geq 0.$$

Для любого вектора $y \in \mathcal{H}$ имеют место равенства (проверяемые на базисных векторах):

$$\begin{aligned} Q_{(n)}A(\Gamma X)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}y &= \\ &= Q_{(n)}(\Gamma X)A(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}y + Q_{(n)}(X - JX)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}y = Q_{(n)}A_0y, \end{aligned} \quad (7)$$

где оператор A_0 представим в виде

$$A_0y = (\Gamma X)A(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}y + (X - JX)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}y.$$

Так как оператор A_0 является оператором из $\text{End } \mathcal{H}$, то последовательность операторов из правой части равенства (7) сходится к оператору A_0 по норме пространства $\text{End } \mathcal{H}$. Из замкнутости оператора A следует, что $\Gamma X \in D(A)$ при $x \in D(A)$ и имеет место равенство

$$A(\Gamma X)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1} = (\Gamma X)A(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1} + (X - JX)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}.$$

Таким образом, выполнено включение $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$.

Из [3, теорема 1.3] в рассматриваемом случае (A — самосопряженный оператор) следует оценка на норму решения уравнения (3):

$$\|Y\|_\infty \leq \frac{\pi}{2d} \|X\|_\infty.$$

Другими словами, $\|\Gamma\| \leq \gamma = \pi/(2d)$. Условие (iii) определения 9, очевидно, выполняется с той же константой.

Проверим выполнение свойства (iv). Пусть $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ и $\lambda_\varepsilon = in$, где $n \in \mathbb{N}$ — достаточно большое натуральное число. Тогда норму оператора $X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1} \in \text{End } \mathcal{H}$, $X \in \text{End } \mathcal{H}$. В пространстве $\text{End } \mathcal{H}$ можно сделать сколь угодно малой, так как норма первого сомножителя конечна, а норму второго можно сделать малой подходящим выбором натурального числа n .

Перейдем к проверке последнего свойства. Имеем

$$P_i(\Gamma X)(JX)P_i = \sum_{\substack{k \in \mathbb{J} \\ k \neq i}} P_i \tilde{T}(f_1) X P_k \cdot P_k \tilde{T}(f_0) X P_i = \sum_{\substack{k \in \mathbb{J} \\ k \neq j}} \hat{f}_1(\lambda_i - \lambda_k) X_{ik} \hat{f}_0(\lambda_k - \lambda_i) X_{ki} = 0$$

в силу свойств преобразований Фурье функций $\hat{f}_0$ и $\hat{f}_1$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. *Тройка $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), J, \Gamma)$ является допустимой тройкой для невозмущенного оператора A с константой $\gamma = 1/d$.*

Доказательство. В данном случае $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Так как трансформаторы J и Γ определены для операторов из $\text{End } \mathcal{H}$ и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset \text{End } \mathcal{H}$, то они определены и для операторов из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Все остальные рассуждения проводятся аналогично предыдущему случаю. $\square$

Замечание. В случае $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ удобно все выкладки проводить на операторных матрицах. Результат теоремы 3 непосредственно вытекает из [12]. Важно, что в случае $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, в отличие от теоремы 2, константа γ из определения 9 оценивается величиной $\gamma = d^{-1}$ (без множителя $\pi/2$), что следует из свойств идеала $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Отметим, что включение $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ в этом случае также удобно доказывать с использованием матриц (см. [12]).

3.2. Теоремы о подобии и билинвариантных подпространствах. Один из ключевых результатов статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть выполнено одно из условий:*

- (i) $B \in \text{End } \mathcal{H}$, $2\pi\|B\|_\infty d^{-1} < 1$,
- (ii) $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $4\|B\|_2 d^{-1} < 1$.

Тогда оператор $A - B$ подобен диагональному оператору $A - \tilde{T}(f_0)X_$. При этом если $B \in \text{End } \mathcal{H}$, то $X_* \in \text{End } \mathcal{H}$, если же $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Оператор X_* есть решение нелинейного операторного уравнения (6) метода подобных операторов. Имеет место равенство*

$$(A - B)(I + \tilde{T}(f_1)X_*) = (I + \tilde{T}(f_1)X_*)(A - \tilde{T}(f_0)X_*).$$

Кроме того, если $B \in \text{End } \mathcal{H}$, то $\tilde{T}(f_1)X_$, $\tilde{T}(f_0)X_* \in \text{End } \mathcal{H}$; если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $\tilde{T}(f_1)X_*$, $\tilde{T}(f_0)X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Доказательство теоремы 4 немедленно вытекает из теоремы 1 и теорем 2, 3. $\square$

Отметим, что в теореме 4 указаны условия, при которых возможна полная диагонализация оператора A . Это довольно жесткие условия, означающие малость нормы возмущения в соответствующих пространствах и хорошую отделенность собственных значений невозмущенного оператора. В ряде случаев условие малости нормы возмущения можно снять, но тогда с помощью метода подобных операторов мы приводим возмущенный оператор не к диагональному, а к блочно-диагональному виду. Такое возможно, например, если $d_k \rightarrow \infty$ при $|k| \rightarrow \infty$. Или в случае, если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\lambda_k = ak$, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{J}$. Соответствующие теоремы будут приведены далее (см. теоремы 7 и 8).

Из теоремы 4 и леммы 2 с учетом того, что A — оператор с дискретным спектром, вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. *В условиях теоремы 4 спектр $\sigma(A - B)$ оператора $A - B$ представим в виде*

$$\sigma(A - B) = \bigcup_{k \in \mathbb{J}} \sigma(A_k) = \bigcup_{k \in \mathbb{J}} \tilde{\sigma}_k,$$

где $\sigma(A_k) = \sigma(A - P_k X_* | \mathcal{H}_k) = (\lambda_k + \tilde{\sigma}_k)$, $\mathcal{H}_k = \text{Im } P_k$, $k \in \mathbb{J}$, $\tilde{\sigma}_k = \sigma(P_k X_* P_k)$. При этом, если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то

$$\sum_{k \in \mathbb{J}} |\tilde{\sigma}_k|^2 < \infty, \quad \text{где} \quad |\tilde{\sigma}_k| = \max_{\lambda \in \tilde{\sigma}_k} |\lambda|.$$

Из леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть $\hat{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{J}$, — взвешенное среднее собственных значений матрицы $A_n = P_n A P_n$, $n \in \mathbb{J}$, $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, и $\dim \operatorname{Im} P_n = m_n$. Тогда

$$\hat{\lambda}_n = \lambda_n - \frac{1}{m_n} \operatorname{tr}(P_n B P_n) + \zeta_n, \quad n \in \mathbb{J},$$

где последовательность ζ_n , $n \in \mathbb{J}$, суммируема.

Пусть $\tilde{P}_n = P(\tilde{\sigma}_n, A - B)$, $n \in \mathbb{J}$, где множества $\tilde{\sigma}_n$, $n \in \mathbb{J}$, введены в лемме 4. Опять же из леммы 2 и теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 6. Для спектральных проекторов $\tilde{P}_n$, $n \in \mathbb{J}$, имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n &= (I + \tilde{T}(f_1)X_*)P_n(I + \tilde{T}(f_1)X_*)^{-1}, \\ \tilde{P}_n - P_n &= (\tilde{T}(f_1)X_*P_n - P_n\tilde{T}(f_1)X_*)(I + \tilde{T}(f_1)X_*)^{-1}. \end{aligned}$$

Теорема 5. Подпространства $\operatorname{Im} \tilde{P}_k = (I + \tilde{T}(f_1)X_*)\mathcal{H}_k$, $\operatorname{Ker} \tilde{P}_k$, $k \in \mathbb{J}$, образуют счетный набор биинвариантных подпространств для оператора $A - B$.

Следствие. Биинвариантные подпространства $(I + \tilde{T}(f_1)X_*)\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, есть при $B \in \operatorname{End} \mathcal{H}$ биинвариантные подпространства Рисса. Если $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то биинвариантные подпространства $(I + \tilde{T}(f_1)X_*)\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{J}$, образуют систему Бари биинвариантных подпространств.

Теорема 6. Оператор $i(A - B)$ является генератором сильно непрерывной группы операторов $T_0: \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$ и эта группа подобна группе $\tilde{T}_0: \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$, где

$$\tilde{T}_0(t) = \sum_{n \in \mathbb{J}} e^{iA_n t} P_n = \sum_{n \in \mathbb{J}} e^{i\lambda_n I_n t} e^{-iP_n X_* P_n t} P_n \quad (8)$$

и

$$T_0(t) = (I + \tilde{T}(f_1)X_*)\tilde{T}_0(t)(I + \tilde{T}(f_1)X_*)^{-1},$$

где $A_n = (A - P_n X_*)|_{\mathcal{H}_n}$, $n \in \mathbb{J}$, и символом I_n , $n \in \mathbb{J}$, обозначен тождественный оператор в $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{J}$.

Отметим, что в случае конкретного возмущения B и конкретной последовательности собственных значений λ_n , $n \in \mathbb{J}$, из теоремы 6 можно получить базовую группу для группы $T_0: \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$.

Приведем теоремы о блочной диагонализации возмущенного оператора. Обозначим через $P_{(n)}$ оператор

$$P_{(n)} = \sum_{|i| \leq n} P_i, \quad i \in \mathbb{J}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Теорема 7. Пусть выполнено условие

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} d_k = \infty \quad (9)$$

и B принадлежит $\operatorname{End} \mathcal{H}$, либо $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - B$ подобен блочно-диагональному оператору

$$\tilde{A} = A - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{|i| > k} P_i X_* P_i, \quad (10)$$

где X_* — решение нелинейного операторного уравнения (6) из теоремы 1 и если $B \in \operatorname{End} \mathcal{H}$, то $X_* \in \operatorname{End} \mathcal{H}$, $\Gamma_k X_* \in \operatorname{End} \mathcal{H}$. Если же $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $\Gamma_k X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Преобразование подобия осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma_k X_* \in \operatorname{End} \mathcal{H}$.

Доказательство. Случай $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, а следовательно, и $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ подробно рассматривался в работе [5]. Если же $B \in \operatorname{End} \mathcal{H}$, то доказательство аналогично доказательству теоремы 4. Отметим, что в обоих случаях условие (5) гарантирует малость величины γ из определения 9 и, следовательно, разрешимость уравнения (6). $\square$

Приведем еще одну теорему, аналогичную [4, теорема 3] или [12, теорема 4.5].

Теорема 8. Пусть $\lambda_n = an$, где $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{J}$, и $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Тогда существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что возмущенный оператор $A - B$ подобен оператору (10), где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение нелинейного уравнения (6).

Доказательство можно найти в [4, 12]. □

Отметим, что в указанном случае выполнение условия (5) теоремы 1 гарантировано при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$ за счет выбора другого, более узкого пространства допустимых возмущений $\mathfrak{U}_B \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, учитывающего скорость убывания элементов матрицы оператора $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ по строкам и столбцам.

Из теорем 7 и 8 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. Подпространства

$$(I + \Gamma X_*)\mathcal{H}_{(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (I + \Gamma X_*)\mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{J}, \quad |n| > k,$$

в условиях теорем 7 и 8 образуют счетный набор биинвариантных подпространств для оператора $A - B$.

Отметим, что в лемме 4 спектр оператора $A - B$ представим в виде (см. [12]):

$$\sigma(A - B) = \tilde{\sigma}_{(k)} \bigcup \left(\bigcup_{|n| \geq k, n \in \mathbb{J}} \sigma_n \right),$$

где $\sigma_{(k)} = \sigma(A - P_{(k)}X_*|\mathcal{H}_k)$, $\sigma_n = \sigma(A - P_nX_*|\mathcal{H}_n)$. Оценка леммы 5 также имеет место, но при $|n| > k$, $n \in \mathbb{J}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

В теореме 6 формула (8) при выполнении условий теорем 7 или 8 перепишется в виде

$$\tilde{T}_0(t) = e^{i((A - P_{(k)}X_*)|\mathcal{H}_k)} I_{(k)} + \sum_{\substack{|n| > k \\ n \in \mathbb{J}}} e^{iA_n t} P_n$$

и $I_{(k)}$ — тождественный оператор в $\mathcal{H}_{(k)} = \text{Im } P_{(k)}$.

4. Примеры.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим возмущение ранга 1 (по Фойашу). Пусть $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z})$ — гильбертово пространство с обычным скалярным произведением и $\{e_n, n \in \mathbb{J}\}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Оператор $B \in \text{End } \mathcal{H}$ называется оператором ранга 1, если существуют такие ненулевые векторы $u, v \in \mathcal{H}$, что

$$Bx = (x, v)u, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (11)$$

Пусть векторы $u, v \in \mathcal{H}$ разлагаются в ряды Фурье

$$u = \sum_{n \in \mathbb{J}} \hat{u}(n)e_n, \quad v = \sum_{n \in \mathbb{J}} \hat{v}(n)e_n$$

(относительно введенного ортонормированного базиса). Тогда, очевидно, относительно этого базиса числовая матрица оператора $B = (b_{ij})$ состоит из элементов $b_{ij} = \hat{u}(i)\overline{\hat{v}(j)}$. Очевидно, что $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\|B\|_2 = \|u\|\|v\|$, где $\|x\|^2 = (x, x)$, $x \in \mathcal{H}$.

Пусть также $\lambda_k = ak$, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{J}$, и

$$Ax = \sum_{k \in \mathbb{J}} \lambda_k(x, e_k)e_k = \sum_{k \in \mathbb{J}} \lambda_k \hat{x}(k)e_k, \quad x \in D(A),$$

где

$$D(A) = \{x \in \mathcal{H} : \sum_{k \in \mathbb{J}} |k^2 \hat{x}(k)|^2 < \infty\}.$$

Из теоремы 4 и теоремы 8 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 10. Пусть $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и B действует по формуле (11). Если

$$4\|u\|\|v\| < a, \quad (12)$$

то оператор $A - B$ подобен диагональному оператору

$$A - \sum_{i \in \mathbb{J}} P_i X_* P_i,$$

где $P_i x = (x, e_i) e_i = \hat{x}(i) e_i$, $i \in \mathbb{J}$, и X_* — решение уравнения (6). Также существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - B$ подобен оператору блочно-диагонального вида

$$A - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{\substack{|i| > k \\ i \in \mathbb{J}}} P_i X_* P_i,$$

где X_* — решение уравнения (6) с трансформаторами J_k , $\Gamma_k \in \text{End } \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. При этом при выполнении условия (12) подпространства $(I + \Gamma_k X_*) \mathcal{H}_i$, $i \in \mathbb{J}$, $\mathcal{H}_i = \text{Ran } P_i$, образуют счетную систему бинвариантных подпространств Бари. Во втором случае подпространства

$$(I + \Gamma_k X_*) \mathcal{H}_{(k)}, \quad (I + \Gamma_k X_*) \mathcal{H}_i$$

образуют счетную систему бинвариантных подпространств Бари.

Теорема 11. Оператор $i(A - B)$ является генератором некоторой сильно непрерывной группы операторов $T_0: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ и эта группа подобна группе $\tilde{T}_0: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, где

$$\tilde{T}_0(t) = e^{iA_{(n)}t} P_{(n)} + \sum_{\substack{|j| > n \\ j \in \mathbb{J}}} e^{i(a_j - \mu_j)t} P_j,$$

где $\mu_j = \hat{u}(j) \overline{\hat{v}(j)} + \beta_j$, $|j| > n$, и последовательность $\{\beta_j, |j| > n\}$ суммируема. Пусть выполнено условие $\text{Im}(\hat{v}(i) \overline{\hat{u}(i)}) < 0$ для всех $i \geq m$, где $m > n$ достаточно большое натуральное число. Тогда экспоненциально базовой для группы $T_0: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ является группа

$$T_b: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}, \quad T_b(t) = e^{iA_{(n)}t} P_{(n)} + \sum_{\substack{|j| > n \\ j \in \mathbb{J}}} e^{ia_j t} P_j.$$

Пример 2. Пусть невозмущенный диагональный оператор A имеет собственные значения $\lambda_k = ak^2$, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, собственное значение $\lambda_0 = 0$ простое и $P_0 x = (x, e_0) e_0$, $\lambda_n = an^2$, $n \neq 0$, — двукратные собственные значения и $P_n x = (x, e_n) e_n + (x, e_{-n}) e_{-n}$, $n \neq 0$. Пусть возмущение B так же, как и в примере 1, является оператором ранга 1, $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и $\|B\|_2 = \|u\|\|v\|$. Очевидно, что $\dim \mathcal{H}_0 = 1$, $\dim \mathcal{H}_i = 2$, $i \neq 0$, $\dim \mathcal{H}_{(k)} = 2k + 1$.

Из теорем 1 и 7 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 12. Пусть выполнено условие

$$4\|v\|\|u\| < |a|.$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору

$$A - \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X_* P_i,$$

где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение нелинейного уравнения (6). Преобразование подобия осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in \text{End } \mathcal{H}$, $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - B$ подобен оператору

$$\tilde{A} = A - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum_{\substack{i > k \\ i \in \mathbb{Z}_+}} P_i X_* P_i,$$

где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение уравнения (6) с Γ_k и J_k . Преобразование подобия оператора A в оператор $\tilde{A}$ осуществляет оператор $I + \Gamma_k X_* \in \text{End } \mathcal{H}$, $\Gamma_k X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Теорема 13. В условиях теоремы 12 подпространства

$$(I + \Gamma_k X_*)\mathcal{H}_{(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (I + \Gamma_k X_*)\mathcal{H}_i, \quad i > k,$$

образуют счетный набор бинвариантных подпространств Бари, а также спрямляемый базис в пространстве $\mathcal{H}$.

Пример 3. Пусть в пространстве $\mathcal{H}$ есть ортогональный базис из подпространств $\mathcal{H}_i$, $i \in \mathbb{Z}$, т.е.

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_i,$$

являющихся бинвариантными подпространствами для невозмущенного самосопряженного оператора A . Причем соответствующие ортопроекторы P_i , $\mathcal{H}_i = \text{Im } P_i$, $i \in \mathbb{Z}$, являются спектральными проекторами для невозмущенного оператора A и $AP_i = \lambda_i P_i$, $i \in \mathbb{Z}$, λ_i , $i \in \mathbb{Z}$, — изолированные собственные значения. Пусть возмущение $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ такое же, как в примере 1, т.е. $Bx = (x, u)v$, где

$$u = \sum_{i \in \mathbb{J}} P_i u, \quad v = \sum_{i \in \mathbb{J}} P_i v,$$

причем выписанные ряды абсолютно сходятся.

Теорема 14. Пусть $\lambda_k = ak$, $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор $A - B$ подобен оператору

$$\tilde{A} = A - \sum_{|i| > k} P_i X_* P_i - P_{(k)} X_* P_{(k)},$$

где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — решение уравнения (6). Имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_k X_*) = (I + \Gamma_k X_*)\tilde{A},$$

где $\Gamma_k X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $I + \Gamma_k X_* \in \text{End } \mathcal{H}$. Подпространства $(I + \Gamma_k X_*)\mathcal{H}_{(k)}$, $(I + \Gamma_k X_*)\mathcal{H}_i$, образуют счетный набор бинвариантных подпространств Бари.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965.
2. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987.
3. Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. мат. ж. — 1983. — 24, № 1. — С. 21–39.
4. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — 75, № 3. — С. 3–28.
5. Баскаков А. Г., Поляков Д. М. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Мат. сб. — 2017. — 208, № 1. — С. 3–47.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
7. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Совр. мат. Фундам. направл. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
8. Левитан Б. М. Об одном обобщении неравенств С.Н. Бернштейна и Н. Bohr'a // Докл. АН СССР. — 1937. — 15. — С. 17–19.
9. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
10. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
11. Фаге М. Н. Спрявление базисов в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. — 1950. — 74, № 6. — С. 1053–1056.
12. Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices // J. Math. Anal. Appl. — 2019. — 477. — P. 930–960.

13. *Favard J.* Application de la formule sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques ou presque périodiques// *Mat. Tidskrift København*, B. H. — 1936. — 4. — P. 81–94.
14. *Foias C., Jung I., Ko E., Pearcy C.* On rank-one perturbation of normal operators// *J. Funct. Anal.* — 2007. — 253. — P. 628–646.
15. *Foias C., Jung I., Ko E., Pearcy C.* On rank-one perturbation of normal operators, II// *Indiana Univ. Math. J.* — 2008. — 57. — P. 2745–2760.
16. *Foias C., Jung I., Ko E., Pearcy C.* Spectral decomposability of rank-one perturbation of normal operators// *J. Math. Anal. Appl.* — 2011. — 375. — P. 602–609.
17. *Lukacs E.* Characteristic Functions. — New York: Hather Publ., 1970.

Баскаков Анатолий Григорьевич

Воронежский государственный университет;

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ

E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валериевна

Воронежский государственный педагогический университет

E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Криштал Илья Аркадьевич

Университет Северного Иллинойса, Де-Калб, Иллинойс, США

E-mail: ikrishtal@niu.edu

Ускова Наталья Борисовна

Воронежский государственный технический университет

E-mail: nat-uskova@mail.ru