ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 209 (2022). С. 25–32
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-25-32

УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО УЛАМУ—ХАЙЕРСУ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОБОБЩЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

© 2022 г. Э. З. ЗАЙНУЛЛИНА, В. С. ПАВЛЕНКО, А. Н. СЕСЕКИН, Н. В. ГРЕДАСОВА

Аннотация. Статья посвящена достаточным условиям устойчивости по Уламу—Хайерсу решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенным воздействием в правой части. Формализовано понятие устойчивости по Уламу—Хайерсу для уравнений с неограниченной правой частью, когда решения являются функциями ограниченной вариации, и получены достаточные условия, обеспечивающие такую устойчивость.

Ключевые слова: устойчивость по Уламу—Хайерсу, дифференциальное уравнение, разрывное решение.

ON ULAM–HYERS STABILITY OF SOLUTIONS TO FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GENERALIZED ACTION

© 2022 E. Z. ZAINULLINA, V. S. PAVLENKO, A. N. SESEKIN, N. V. GREDASOVA

Abstract. This paper is devoted to sufficient conditions for the Ulam–Hyers stability of solutions of first-order linear differential equations. We introduce the concept of the Ulam–Hyers stability for equations with unbounded right-hand sides whose solutions are functions of bounded variation and obtain sufficient conditions that guarantee this stability.

Keywords and phrases: Ulam–Hyers stability, differential equation, discontinuous solution.

AMS Subject Classification: 34A37

1. Введение. В работе рассматриваются достаточные условия устойчивости по Уламу—Хайерсу обобщенных решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенным воздействием в правой части. В классе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с абсолютно непрерывными траекториями эти вопросы рассматривались в [2–4]. В настоящей работе в правой части уравнения содержатся обобщенные воздействия — обобщенные производные функций ограниченной вариации, под решениями понимаются поточечные пределы последовательностей абсолютно непрерывных решений, получающиеся в результате аппроксимаций обобщенных воздействий в правой части уравнения суммируемыми функциями [7]. В работах [5, 6] используется формализация решений, предложенная в [1], а в данной работе — формализация, описанная в [7].

Устойчивость по Уламу рассматривалась для различных классов функциональных уравнений. Для дифференциальных уравнений устойчивость по Уламу—Хайерсу определяется следующим образом (см., например, [2]).

Определение 1. Уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t,x) \tag{1}$$

называется устойчивым по Уламу—Хайерсу, если существует такое число $c_f > 0$, что для всех $\varepsilon > 0$ и каждого решения неравенства

$$|y' - f(t,y)| \leqslant \varepsilon, \quad t \in [a,b]$$

существует решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее неравенству

$$|y(t) - x(t)| \leqslant c_f \varepsilon, \quad t \in [a,b].$$

2. Устойчивость по Уламу—Хайерсу решений дифференциальных уравнений с разрывными траекториями. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) + p(t)y = \dot{v}(t), \tag{2}$$

где $p(t)$ — непрерывная функция, $v(t)$ — функция ограниченной вариации, удовлетворяющая неравенству

$$\operatorname*{var}_{[t_0,\vartheta]} v(\cdot) \leqslant M. \tag{3}$$

Множество функций ограниченной вариации, определенных на отрезке $[t_0, \vartheta]$, будем обозначать $BV[t_0, \vartheta]$. Решение уравнения (2) — это функция $y(t) \in BV[t_0, \vartheta]$. Все функции заданы на промежутке $[t_0, \vartheta]$. Производные в (2) понимаются в смысле теории обобщенных функций. Заметим, что в этом случае уравнение (2) можно записать в интегральной форме

$$y(t) = y(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} p(s)y(s)ds + v(t) \tag{4}$$

(для определенности полагаем $v(t_0)$ равным нулю). Под решением уравнения (2) будем понимать решение уравнения (4). Заметим, что решение уравнения (4) можно записать в следующем виде (формула Коши; см. citeZav):

$$y(t) = \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} p(s)ds\right) y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(-\int\limits_{s}^{t} p(\xi)d\xi\right) dv(s); \tag{5}$$

второй интеграл в этой формуле понимается в смысле Стилтьеса.

Определение 2. Будем говорить, что решение дифференциального уравнения (2) устойчиво по Уламу—Хайерсу на $[t_0, \vartheta]$, если для каждого $\varepsilon > 0$, для любой функции $y \in BV[t_0, \vartheta]$, удовлетворяющей неравенству

$$\left| y(t) - y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} p(s)y(s)ds - v(t) \right| \leqslant \varepsilon, \tag{6}$$

найдется такое положительное вещественное число K, что существует решение уравнения (2) $\varphi(t)$, удовлетворяющее неравенству

$$|y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon K \quad \forall t \in [t_0, \vartheta].$$

Теорема 1. *При сделанных предположениях всякое решение уравнения* (2) *устойчиво по Уламу—Хайерсу.*

Доказательство. Для разности $|y(t) - \varphi(t)|$, где $y(t)$ — функция ограниченной вариации, удовлетворяющая (6), справедлива следующая оценка:

$$|y(t)-\varphi(t)| = \left| y(t) - y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (p(s)\varphi(s)ds - v(t)) \right| =$$

$$= \left| y(t) - y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} p(s)y(s)ds - v(t) + y_0 - \int\limits_{t_0}^{t} p(s)y(s)ds + v(t) - y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} p(s)\varphi(s)ds - v(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \int\limits_{t_0}^{t} |p(s)||y(s)-\varphi(s)|ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла, получим следующую оценку, из которой вытекает справедливость теоремы:

$$|y(t)-\varphi(t)| \leqslant \varepsilon \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} |p(s)|ds \right). \qquad \square$$

Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) + \dot{v}(t)y = f(t), \tag{7}$$

где $v(t) \in BV[t_0, \vartheta]$, $f(t)$ — интегрируемая функция. Производные в (7) понимаются в смысле теории обобщенных функций. Особенностью этого уравнения является то, что в слагаемом $\dot{v}(t)y(t)$ содержится некорректная операция умножения разрывной функции $y(t)$ на обобщенную функцию $\dot{v}(t)$, что требует формализации понятия решения в этом случае. Эта проблема, как и в [7], решается с помощью замыкания множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации. Под решением здесь, как и в [7], будем понимать поточечный предел последовательности абсолютно непрерывных решений $y_k(t)$ уравнения (7), порожденных последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, поточечно сходящихся к функции ограниченной вариации $v(t)$, если предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $v_k(t) \to v(t)$.

Определенное таким образом решение уравнения (7) согласно [7] удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$y(t) = y(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} y(s)dv^c(s) + \sum_{t_i \leqslant t, t_i \in \Omega_-} (e^{-\Delta v(t_i-0)} - 1)y(t_i-0) +$$
$$+ \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{-\Delta v(t_i+0)} - 1)y(t_i) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds, \tag{8}$$

где $v^c(s)$ — непрерывная составляющая функции ограниченной вариации $v(t)$, $\Delta v(t_i-0)$ и $\Delta v(t_i+0)$ — соответственно величины левого и правого скачков функции ограниченной вариации $v(t)$ в точке t_i, Ω_- — множество точек левого разрыва функции $v(t)$ и Ω_+ — множество точек правого разрыва функции $v(t)$. Согласно [7] решение уравнения (8) существует на промежутке $[t_0, \vartheta]$.

Пусть теперь $\psi(t)$ — решение уравнения (7) (или, с учетом введенного определения, решение уравнения (8)). Пусть $y(t)$ — некоторая функция ограниченной вариации, удовлетворяющая неравенству

$$\left| y(t) - y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} y(s)dv^c(s) - \sum_{t_i \leqslant t, t_i \in \Omega_-} (e^{-\Delta v(t_i-0)} - 1)y(t_i-0) - \right.$$
$$\left. - \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{-\Delta v(t_i+0)} - 1)y(t_i) - \int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds \right| \leqslant \varepsilon. \tag{9}$$

Теорема 2. *Решение уравнения* (7) *устойчиво по Уламу—Хайерсу, т.е. для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $K > 0$, *что для любого решения неравенства* (9) *выполняется неравенство*

$$|y(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon K, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

где $\psi(t)$ — *решение уравнения* (8)

Доказательство. Согласно (8)

$$|y(t) - \psi(t)| = \Bigg| y(t) - y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(s) dv^c(s) - \sum_{t_i \leqslant t, t_i \in \Omega_-} (e^{-\Delta v(t_i - 0)} - 1)\psi(t_i - 0) - \\ - \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{-\Delta v(t_i + 0)} - 1)\psi(t_i) - \int\limits_{t_0}^{t} f(s) ds \Bigg|.$$

Добавляя и вычитая из правой часть последнего равенства выражение

$$y(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} y(s) dv^c(s) + \sum_{t_i \leqslant t, t_i \in \Omega_-} (e^{-\Delta v(t_i - 0)} - 1) y(t_i - 0) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{-\Delta v(t_i + 0)} - 1) y(t_i) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s) ds,$$

после группировки получим

$$|y(t) - \psi(t)| = \Bigg| y(t) - y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} y(s) dv^c(s) - \sum_{t_i \leqslant t, t_i \in \Omega_-} (e^{-\Delta v(t_i - 0)} - 1) y(t_i - 0) - \\ - \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{-\Delta v(t_i + 0)} - 1) y(t_i) - \int\limits_{t_0}^{t} f(s) ds - \int\limits_{t_0}^{t} (y(s) - \psi(s)) dv^c(s) + \\ + \sum_{t_i \leqslant t, t_i \in \Omega_-} (e^{-\Delta v(t_i - 0)} - 1)(y(t_i - 0) - \psi(t_i - 0) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{-\Delta v(t_i + 0)} - 1)(y(t_i) - \psi(t_i) \Bigg|.$$

Оценивая правую часть этого выражения с учетом (9), находим

$$|y(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon + \int\limits_{t_0}^{t} |y(s) - \psi(s)| d \operatorname*{var}_{[t_0, s]} v^c(\cdot) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_-} (e^{|\Delta v(t_i - 0)|} - 1)|y(t_i - 0) - \psi(t_i - 0)| + \\ \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} (e^{|\Delta v(t_i + 0)|} - 1)|y(t_i) - \psi(t_i)|.$$

Применяя оценку решения для этого неравенства из [7, Lemma 5.4.3], получим

$$|y(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon \exp \left(\operatorname*{var}_{[t_0, t]} v^c(\cdot) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_-} |\Delta v(t_i - 0)| + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} |\Delta v(t_i + 0)| \right).$$

Учитывая (3), из последнего неравенства имеем

$$|y(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon \exp \operatorname*{var}_{[t_0, t]} v(\cdot) \leqslant \varepsilon \exp M,$$

что и завершает доказательство. □

Далее будем рассматривать уравнение

$$\dot{y}(t) + \dot{v}_1(t) y = \dot{v}_2(t), \tag{10}$$

где $v_1(t)$ и $v_2(t)$ — функции ограниченной вариации, а производные понимаются в обобщенном смысле. Согласно [7], если функции $v_1(t)$ и $v_2(t)$ аппроксимировать последовательностями абсолютно непрерывных функций $v_{1k}(t)$ и $v_{2k}(t)$, то порожденная такими аппроксимациями последовательность решений $y_k(t)$, вообще говоря, сходиться не будет. В [7] для такого случая вводится понятие V-решения.

Будем говорить, что последовательность $(v_{1k}(\cdot), v_{2k}(\cdot))$ V-сходится к вектор-функции $(v_1(\cdot), v_2(\cdot))$, если

$$\lim_{k\to\infty} v_{1k}(t) = v_1(t), \quad \lim_{k\to\infty} v_{2k}(t) = v_2(t), \quad \lim_{k\to\infty} (\operatorname*{var}_{[t_0,t]} v_{1k}(\cdot) + \operatorname*{var}_{[t_0,t]} v_{2k}(\cdot)) = V(t).$$

Очевидно, для любых a и b, удовлетворяющих неравенству $t_0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \vartheta$ имеем

$$\operatorname*{var}_{[t_0,t]} v_1(\cdot) + \operatorname*{var}_{[t_0,t]} v_2(\cdot) \leqslant V(b) - V(a)$$

(здесь для определенности положили $v_1(t_0) = v_2(t_0) = 0$). Далее будем пользоваться обозначением $v(t) = (v_1(t), v_2(t))^\top$.

Определение 3 (см. [7])**.** Назовем V-решением уравнения (10) всякий частичный поточечный предел последовательности $y_k(t)$, которая порождается произвольной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t) = (v_{1k}(\cdot), v_{2k}(\cdot))^\top$, V-сходящейся к $v(t)$.

Согласно [7], всякий частичный поточечный предел последовательности $y_k(t)$ является решением интегрального включения

$$y(t) \in y_0 - \int_{t_0}^{t} y(s)dv_1^c(s) + v_2^c(t) + \sum_{t_i\leqslant t, t_i\in\Omega_-} S(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0), \Delta V(t_i-0)) + \\ + \sum_{t_i<t, t_i\in\Omega_+} S(t_i, y(t_i), \Delta v(t_i+0), \Delta V(t_i+0)). \quad (11)$$

Входящие в правую часть (11) множества

$$S(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0), \Delta V(t_i-0)), \quad S(t_i, y(t_i), \Delta v(t_i+0), \Delta V(t_i+0)) \quad (12)$$

определяются следующим образом. Пусть

$$z(t_i-0) = y(t_i-0), \quad z(t_i) = y(t_i), \quad \mu(t_i-0) = v(t_i-0), \quad \mu(t_i) = v(t_i)$$

— начальные условия для системы

$$\dot z(\xi) = -z(\xi)\eta_1(\xi) + \eta_2(\xi), \quad \dot\mu(\xi) = \eta(\xi), \quad (13)$$

где

$$\mu(\xi) = (\mu_1(\xi), \mu_2(\xi))^\top, \quad \eta(\xi) = (\eta_1(\xi), \eta_2(\xi))^\top.$$

Система (13) рассматривается на отрезках $[t_i, t_i+\Delta V(t_i-0)]$ и $[t_i, t_i+\Delta V(t_i+0)]$ в зависимости от того, левый или правый скачок траектории $y(t)$ имеет место в точке t_i. Заметим, что у координат $\mu_1(\xi)$, $\mu_2(\xi)$ заданы начальное и конечное значения. С помощью (13) строятся множества (12), которые получаются как значения $z(t_i + \Delta V(t_i-0))$ или $z(t_i + \Delta V(t_i+0))$. Эти значения будем обозначать

$$s(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0), \Delta V(t_i-0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) \quad \text{или} \quad s(t_i, y(t_i+0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i+0), \eta_{t_i+0}(\cdot)).$$

При этом

$$s(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0), \Delta V(t_i-0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) \in S(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0), \Delta V(t_i-0)),$$
$$s(t_i, y(t_i+0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i+0), \eta_{t_i+0}(\cdot)) \in S(t_i, y(t_i), \Delta v(t_i+0), \Delta V(t_i+0)).$$

Заметим, что в нашем случае эти множества являются отрезками. Их можно также трактовать как сечения множеств достижимости системы (13) в момент $t_i + \Delta V(t_i-0)$ (соответственно, $t_i + \Delta V(t_i+0)$) при $\mu(t_i + \Delta V(t_i-0)) = v(t_i)$ (соответственно, $\mu(t_i + \Delta V(t_i+0)) = v(t_i+0)$).

Таким образом, интегральное включение (11) порождает интегральную воронку разрывных решений (многозначное отображение), которую мы будем обозначать $Y(t, t_0, v_1, v_2, V)$. Пусть $\bar y(t)$ есть некоторая функция ограниченной вариации, точки разрыва которой совпадают с точками разрыва функций из $V(t)$, разрывы функции $\bar y(t)$ являются допустимыми для интегрального включения (11). Под этим понимается, что для каждой точки разрыва или существует допустимое решение системы (13), описывающее скачки функции $\bar y(t)$, т.е. существуют соответствующие допустимые управления $\eta_{1t_i-0}(\cdot)$, $\eta_{2t_i-0}(\cdot)$, $\eta_{1t_i+0}(\cdot)$, $\eta_{2t_i+0}(\cdot)$. Пусть $\bar{y}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\Bigg|\bar{y}(t) - y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{y}(s)dv_1^c(s) - v_2^c(t) - \sum_{t_i \leqslant t, t_i \in \Omega_-} s(t_i, \bar{y}(t_i-0), \Delta v(t_i-0)\Delta V(t_i-0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) -$$

$$- \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} s(t_i, \bar{y}(t_i+0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i+0), \eta_{t_i+0}(\cdot))\Bigg| \leqslant \varepsilon. \quad (14)$$

Определение 4. Будем говорить, что интегральная воронка решений интегрального включения (11) устойчива по Уламу—Хайерсу, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции, удовлетворяющей неравенству (14), найдется такое положительное число K, что выполняется неравенство

$$\rho(\bar{y}(t), Y(t, t_0, y_0, v, V) \leqslant \varepsilon K, \quad (15)$$

где $\rho(a, A)$ — расстояние от точки a до множества A.

Теорема 3. *Пусть функция $\bar{y}(t)$ удовлетворяет неравенству* (14). *Тогда найдется такое $K > 0$, что выполняется неравенство*

$$|\bar{y}(t) - y(t)| \leqslant \varepsilon K, \quad (16)$$

где $y(t)$ — решение интегрального уравнения

$$y(t) = y_0 - \int\limits_{t_0}^{t} y(s)dv_1^c(s) + v_2^c(t) + \sum_{t_i \leqslant t, t_i \in \Omega_-} s(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0), \Delta V(t_i-0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) +$$

$$+ \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} s(t_i, y(t_i+0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i+0), \eta_{t_i+0}(\cdot)). \quad (17)$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\bar{y}(t) - y(t) = \bar{y}(t) - y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} y(s)dv_1^c(s) + v_2^c(t) -$$

$$- \sum_{t_i \leqslant t, t_i \in \Omega_-} s(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0), \Delta V(t_i-0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) -$$

$$- \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} s(t_i, y(t_i+0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i+0), \eta_{t_i+0}(\cdot)). \quad (18)$$

Добавим и вычтем в (18) выражение

$$y_0 - \int\limits_{t_0}^{t} \bar{y}(s)dv_1^c(s) + v_2^c(t) + \sum_{t_i \leqslant t, t_i \in \Omega_-} s(t_i, \bar{y}(t_i-0), \Delta v(t_i-0), \Delta V(t_i-0), \eta_{t_i-0}(\cdot)) +$$

$$+ \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} s(t_i, \bar{y}(t_i+0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i+0), \eta_{t_i+0}(\cdot)).$$

Вычислим модуль получившегося выражения и оценим его сверху, учитывая (14) и (17). В результате получим:

$$
\begin{aligned}
|\bar y(t)-y(t)| \leqslant \varepsilon + \int\limits_{t_0}^{t} |\bar y(s)-y(s)| d \operatorname*{var}_{[t_0,s]} v_1^c(\cdot) + \\
+ \sum_{t_i\leqslant t, t_i\in\Omega_-} \Big| s\big(t_i, \bar y(t_i-0), \Delta v(t_i-0), \Delta V(t_i-0), \eta_{t_i-0}(\cdot)\big) - \\
- s\big(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0), \Delta V(t_i-0), \eta_{t_i-0}(\cdot)\big)\Big| + \\
+ \sum_{t_i< t, t_i\in\Omega_+} B\Big| s\big(t_i, \bar y(t_i+0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i+0), \eta_{t_i+0}(\cdot)\big) - \\
- s\big(t_i, y(t_i+0), \Delta v(t_i), \Delta V(t_i+0), \eta_{t_i+0}(\cdot)\big)\Big|. \quad (19)
\end{aligned}
$$

Далее получим оценку слагаемых в (17). Величины скачков вычисляются с помощью решений дифференциальных уравнений (15). Поэтому

$$
\bar z(t_i+\Delta V(t_i)) - \bar y(t_i) - z(t_i+\Delta V(t_i)) + y(t_i) = \int\limits_{t_i}^{t_i+\Delta V(t_i)} (-\bar z(\xi)+z(\xi))\eta_1(\xi)d\xi.
$$

Добавим и вычтем под интегралом выражение $\bar y(t_i)-y(t_i)$. Вычисляя модуль левой и правой частей (19), получим неравенство

$$
\begin{aligned}
\Big|\bar z(t_i+\Delta V(t_i)) - \bar y(t_i) - z(t_i+\Delta V(t_i)) + y(t_i)\Big| \leqslant \\
\leqslant |\bar y(t_i)-y(t_i)| \int\limits_{t_i}^{t_i+\Delta V(t_i)} |\eta_1(\xi)|d\xi + \int\limits_{t_i}^{t_i+\Delta V(t_i)} |\bar z(\xi)-\bar y(t_i)-z(\xi)+y(t_i)||\eta_1(\xi)|d\xi. \quad (20)
\end{aligned}
$$

Справедливость неравенства

$$
\int\limits_{t_i}^{t_i+\Delta V(t_i)} |\eta_1(\xi)|d\xi \leqslant \Delta V(t_i)
$$

следует из условия $|\eta_1(\xi)|\leqslant 1$. Учитывая последнее неравенство (20) можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
\Big|\bar z(t_i+\Delta V(t_i)) - \bar y(t_i) - z(t_i+\Delta V(t_i)) + y(t_i)\Big| \leqslant \\
\leqslant |\bar y(t_i)-y(t_i)|V(t_i) + \int\limits_{t_i}^{t_i+\Delta V(t_i)} |\bar z(\xi)-\bar y(t_i)-z(\xi)+y(t_i)||\eta_1(\xi)|d\xi.
\end{aligned}
$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гроноулла, находим

$$
\Big|\bar z(t_i+\Delta V(t_i)) - \bar y(t_i) - z(t_i+\Delta V(t_i)) + y(t_i)\Big| \leqslant |\bar y(t_i)-y(t_i)|V(t_i)\cdot e^{\Delta V(t_i)}.
$$

Используя очевидную оценку $aE^a \leqslant e^{\beta a}-1$, где $a\geqslant 0$, $\beta\geqslant e$, получим из последнего неравенства оценку

$$
\Big|\bar z(t_i+\Delta V(t_i)) - \bar y(t_i) - z(t_i+\Delta V(t_i)) + y(t_i)\Big| \leqslant |\bar y(t_i)-y(t_i)|(e^{\Delta V(t_i)}-1). \quad (21)
$$

В результате с помощью (21) из (19) имеем

$$|\bar{y}(t) - y(t)| \leqslant \varepsilon + \int\limits_{t_0}^{t} |\bar{y}(s) - y(s)| d \operatorname*{var}_{[t_0,s]} v_1^c(\cdot) +$$
$$+ \sum_{t_i \leqslant t, t_i \in \Omega_-} |\bar{y}(t_i - 0) - y(t_i - 0)|(e^{\Delta V(t_i - 0)} - 1) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} |\bar{y}(t_i) - y(t_i)|(e^{\Delta V(t_i + 0)} - 1).$$

Применяя к последнему неравенству лемму 5.4.3 из [7], получаем оценку

$$|\bar{y}(t) - y(t)| \leqslant \varepsilon e^{V(t)}.$$

Следовательно, в (16) в качестве K можно взять $e^{V(\vartheta)}$. □

Следствие. *При сделанных предположениях интегральная воронка разрывных решений интегрального включения* (11) *устойчива по Уламу—Хайерсу.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987.
2. *Jung S.-M.* Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order, II// Appl. Math. Lett. — 2006. — *19*, № 9. — P. 854–858.
3. *Jung S.-M.* Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order, III// J. Math. Anal. Appl. — 2005. — *311*, № 1. — P. 139–146.
4. *Wang G. M., Zhou M., Sun L.* Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order// Appl. Math. Lett. — 2008. — *21*, № 10. — P. 1024–1028.
5. *Wang J. R., Feéckan M., Zhou Y.* Ulam's type stability of impulsive ordinary differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — *395*, № 1. — P. 258–264.
6. *Zada A., Riaz U., Khan F. U.* Hyers–Ulam stability of impulsive integral equations// Boll. Unione Mat. Ital. — 2019. — *12*. — P. 453–467.
7. *Zavalishchine S. T., Sesekin A. N.* Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. — Kluwer Academic, 1997.

Зайнуллина Эльвира Зуфаровна
Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург
E-mail: zainu@mail.ru

Павленко Вера Сергеевна
Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург
E-mail: vera.pavlenko.99@mail.ru

Сесекин Александр Николаевич
Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург
E-mail: sesekin@list.ru

Гредасова Надежда Викторовна
Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург
E-mail: gredasovan@mail.ru