**ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.**
**Современная математика и ее приложения.**
**Тематические обзоры.**
**Том 235 (2024). С. 109–120**
**DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-109-120**

УДК 517.547.3, 517.574

# РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

© 2024 г. **Б. Н. ХАБИБУЛЛИН**

Аннотация. Установлены новые теоремы единственности для голоморфных функций в единичном круге с заданными субгармоническими мажорантами для логарифмов модулей этих голоморфных функций. Результаты сформулированы в терминах распределений корней этих голоморфных функций и распределений масс Рисса субгармонических мажорант. Они основаны на полученной в статье новой шкале неравенств для распределений масс Рисса субгармонических функций на единичном круге при заданных неравенствах между этими функциями.

***Ключевые слова*:** голоморфная функция, распределение корней, субгармоническая функция, распределение масс Рисса, теорема единственности, единичный круг, выпуклые функции.

# UNIQUENESS DISTRIBUTIONS FOR HOLOMORPHIC FUNCTIONS WITH GROWTH RESTRICTIONS IN THE UNIT DISC

© 2024 **B. N. KHABIBULLIN**

Abstract. We establish new uniqueness theorems for holomorphic functions in the unit disc with given subharmonic majorants for the logarithms of the modules of these holomorphic functions. The results are formulated in terms of distributions of zeros for these holomorphic functions and Riesz mass distributions for subharmonic majorants. They are based on the new scale of inequalities for Riesz mass distributions of subharmonic functions on the unit disc under given inequalities between these functions.

***Keywords and phrases*:** holomorphic function, zero distribution, subharmonic function, Riesz mass distribution, uniqueness theorem, unit disc, convex functions.

***AMS Subject Classification*:** 30C15, 30J99, 31A05, 26A51

**1. Введение. Постановка основных задач.** *Пустое множество* обозначаем через $\varnothing$, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ — множество всех *натуральных чисел*, $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ — *расширение* множества $\mathbb{N}_0$ со стандартным отношением порядка $\leqslant$ и точной верхней гранью $+\infty := \sup \mathbb{N}_0 \notin \mathbb{N}_0$, для которой $n \leqslant +\infty$ при всех $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$. *Множество всех действительных чисел* $\mathbb{R}$ с таким же отношением порядка $\leqslant$ рассматриваем и как *вещественную ось* в *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ с евклидовой нормой-модулем $|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ и с *положительной полуосью* $\mathbb{R}^+ := \bigl\{x \in \mathbb{R} \bigm| x \geqslant 0\bigr\}$. Порядковое пополнение $\mathbb{R}$ верхней и нижней гранями, обозначаемыми

$$+\infty := \sup \mathbb{R} = \inf \varnothing \notin \mathbb{R}, \quad -\infty := \inf \mathbb{R} = \sup \varnothing \notin \mathbb{R},$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00002).

 

определяет *расширенную* вещественную ось $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, где, наряду со стандартными допустимыми операциям, полагаем

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0, \quad \overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

*Величина* $c \in \overline{\mathbb{R}}$ может рассматриваться и как *функция, тождественно равная* $c$. Символом 0, наряду с $0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и $0 \in \mathbb{C}$, могут обозначаться и нулевые функции, меры и т. п.

Будем говорить, что величина $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *положительна* при $x \in \overline{\mathbb{R}}^+$; *строго* положительна, когда $0 \neq x \in \overline{\mathbb{R}}^+$; *отрицательна* при $x \in -\overline{\mathbb{R}}^+$; *строго* отрицательная при $0 \neq x \in -\overline{\mathbb{R}}^+$. Введем также *положительную* $x^+ := \sup\{0, x\} \in \overline{\mathbb{R}}^+$ и *отрицательную* $x^- := (-x)^+ \in \overline{\mathbb{R}}^+$ части величины $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Будем говорить, что *расширенная числовая функция* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *положительна* (соответственно *отрицательна*), если $f(X) \subset \mathbb{R}^+$ (соответственно $f(X) \subset -\mathbb{R}^+$ ). Если $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ и для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$), то функция $f$ называется *возрастающей* (соответственно, *строго возрастающей*) на $X$; функцию $f$ называем *убывающей* (соответственно, *строго убывающей*) на $X$, если противоположная функция $-f$ является возрастающей (соответственно, строго возрастающей) на $X$. *Последовательность* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ функций $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ назовем *возрастающая* (соответственно, *убывающая*) на $X$, если при каждом $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ (соответственно, $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$) при всех $x \in X$.

*Интервалами с концами* $a \leqslant b \in \overline{\mathbb{R}}$ будем называть *отрезки* $[a, b] := \bigl\{x \in \overline{\mathbb{R}} \bigm| a \leqslant x \leqslant b\bigr\}$, множества $(a, b] := [a, b] \setminus a$, $[a, b) := [a, b] \setminus b$ и (открытые) *промежутки* $(a, b) := [a, b) \setminus a$ и $(a, +\infty]$, $[-\infty, b)$.

Через $\mathbb{D} := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| < 1\bigr\}$ и $\overline{\mathbb{D}} := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| \leqslant 1\bigr\}$, а также $\partial\mathbb{D} := \partial\overline{\mathbb{D}} := \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}$ обозначаем соответственно открытый и замкнутый *единичные круги*, а также *единичную окружность* с центром в нуле. При $r \in \mathbb{R}^+$, таким образом, $r\mathbb{D}$ и $r\overline{\mathbb{D}}$, а также $r\partial\mathbb{D} = r\partial\overline{\mathbb{D}} =: \partial(r\overline{\mathbb{D}}) =: \partial(r\mathbb{D})$ — соответственно открытый и замкнутый круги, а также окружность радиуса $r$ с центром в нуле.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — *область*, т.е. открытое связное множество. Любую функцию $Z\colon D \to \overline{\mathbb{N}}_0$ называем *распределением точек* на $D$ (см. [6, пп. 0.1.2–0.1.3]) с *кратностями* $Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0$ *точек* $z \in D$ *в* $Z$. Если $f$ — голоморфная функция на области $D$, то распределение точек

$$\mathsf{Zero}_f\colon z \underset{z\in D}{\longmapsto} \sup\left\{p \in \mathbb{R} \;\middle|\; \limsup_{z\neq w\to z} \frac{|f(w)|}{|w-z|^p} < +\infty\right\} \in \overline{\mathbb{N}}_0$$

называем *распределением корней* голоморфной функции $f$ на $D$. По одной из теорем Вейерштрасса либо распределение корней $\mathsf{Zero}_f$ на $D$ имеет конечную кратность в каждой точке $z \in D$ и $f \neq 0$, либо $\mathsf{Zero}_f = +\infty$ на $D$ и $f = 0$. Функция $f$ *обращается в нуль на* $Z$, *если* $\mathsf{Zero}_f \geqslant Z$ *на* $D$.

Распределение точек $Z$ на области $D$ называем *распределением единственности по функции* $M\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ на $D$, если любые две голоморфные на $D$ функции $f$ и $g$, разность $f - g$ которых обращается в нуль на $Z$, при ограничениях $\ln|f| \leqslant M$ и $\ln|g| \leqslant M$ на $D$ совпадают на $D$, т.е. $f = g$ на $D$. В противном случае распределение точек $Z$ называем *распределением неединственности по функции* $M$ на $D$. Распределение $Z$ — распределение неединственности по функции $M$, если и только если найдётся голоморфная на $D$ функция $f \neq 0$, которая обращается в нуль на $Z$ и удовлетворяет неравенству $\ln|f| \leqslant M$ на $D$.

По теории мер и интегрирования придерживаемся терминологии, но не всегда обозначений, из книг Н. С. Ландкофа [2, введение, § 1], Л. К. Эванса и К. Ф. Гариепи [3], Т. Рансфорда [12, дополнение A]. Так, расширенная числовая положительная функция $\mu$ на множестве подмножеств множества $X$ называется (внешней) *мерой* на $X$, если она *счётно субаддитивна* и $\mu(\varnothing) = 0$. Понятие *борелевской меры* на подмножествах в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ общепринятые. *Радоновская мера* на $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — это борелевская мера, конечная на компактах. Разности радоновских мер называем *зарядами* соответственно с *верхней, нижней* и *полной вариацией*

$$\nu^+ := \sup\{\nu, 0\}, \quad \nu^- := (-\nu)^+, \quad |\nu| := \nu^+ + \nu^-.$$

Как и в [3, предисловие], если интеграл от функции по мере $\mu$ существует и принимает значение из $\overline{\mathbb{R}}$, то эту функцию называем *$\mu$-интегрируемой,* а если этот интеграл ещё и конечен, т.е. со значением в $\mathbb{R}$, то функция *$\mu$-суммируемая.*

*Субгармонической функции* $u\colon D\to\overline{\mathbb{R}}$ при $u\neq-\infty$ ставится в соответствие радоновская *мера*, или *распределение масс Рисса* (см. [12, гл. 3, п. 3.7], [9, гл. 3, п. 3.5])

$$\varDelta_u:=\frac{1}{2\pi}\Delta u,\quad \text{где } \Delta \text{ — } \textit{оператор Лапласа,}$$

действующий в смысле теории обобщённых функциях на области $D$. По определению распределение масс Рисса субгармонической функции $u=-\infty$ на $D$ — это внешняя мера, равная $+\infty$ на любом непустом подмножестве из $D$. Если $M$ — разность субгармонических и не равных $-\infty$ функций на $D$, то *распределение зарядов Рисса* функции $M$ однозначно определяется как соответствующая разность распределений масс Рисса представляющей разности субгармонических функций. Для голоморфной на области $D\subset\mathbb{C}$ функции $f\neq 0$ распределение масс Рисса $\varDelta_{\ln|f|}$ субгармонической функции $\ln|f|$ действует на непрерывные положительные функции, а также финитные вещественные или комплексные функции $v$ по правилу

$$\iint\limits_D v\,\mathrm{d}\varDelta_{\ln|f|}=\sum_{z\in D}v(z)\,\mathsf{Zero}_f(z) \tag{1}$$

(см. [12, теорема 3.7.8])

**Постановка задач.** *Пусть $M$ — разность не равных $-\infty$ субгармонических на $\mathbb{D}$ функций, а $u\neq-\infty$ — субгармоническая на $\mathbb{D}$ функция, для которой имеет место поточечное неравенство $u\leqslant M$ на $\mathbb{D}$. Каковы тогда соотношения между $\varDelta_u$ и $\varDelta_M$? Исходя из равенства* (1)*, каковы в случае $u=\ln|f|\leqslant M$ с голоморфной на $\mathbb{D}$ функцией $f\neq 0$, обращающейся в нуль на распределении точек $Z$, соотношения между $Z$ и $\varDelta_M$? Наконец, рассматривается вывод из последних соотношений условий, при которых $Z$ — распределение единственности по функции $M$ на $\mathbb{D}$.*

Достаточно детальная библиография по основной задаче на период до 2018 г. приведена в наших совместных с Ф. Б. Хабибуллиным работах [10, 11]. Основные предшествующие результаты для случая единичного круга $\mathbb{D}$ содержатся в [10]. Приведём их ниже, предварив дополнительными понятиями, обозначениями и соглашениями. Часть результатов статьи была представлена на Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа» в 2024 г. (см. [7]).

## 2. Предшествующие результаты.

Пусть $\varDelta$ — *борелевская мера* или *заряд* на $\mathbb{D}$. Через $\varDelta^{\mathfrak{r}}$ обозначаем *считающую радиальную функцию* для $\varDelta$, определяемую равенствами

$$\varDelta^{\mathfrak{r}}(t)\underset{t\in[0,1)}{:=}\varDelta\bigl(t\overline{\mathbb{D}}\bigr). \tag{2}$$

Для $z\in\mathbb{C}$ через $\arg z\subset\mathbb{R}$ обозначаем множество значений всех её *угловых аргументов*, $\arg 0:=\mathbb{R}$. Для $2\pi$-*периодической функции* $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ однозначно определены значения $h(\arg z)$ при любых $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, а при $z=0$ полагаем $h(\arg 0):=\sup\bigl\{|h(\theta)|\bigm|\theta\in\mathbb{R}\bigr\}$.

Если $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — ограниченная $2\pi$-периодическая функция и *суперпозиция* $h\circ\arg$ является $|\varDelta|$-измеримой, то *считающей радиально-аргументной функцией для $\varDelta$ с весом $h$* будем называть функцию $\varDelta^{\mathfrak{ra}(h)}$ на интервале $[0,1)$, определяемую равенством

$$\varDelta^{\mathfrak{ra}(h)}(t)\underset{t\in[0,1)}{:=}\iint\limits_{t\overline{\mathbb{D}}}(h\circ\arg)\,\mathrm{d}\varDelta=\iint\limits_{|z|\leqslant t}h(\arg z)\,\mathrm{d}\varDelta(z) \tag{3}$$

(см. [5–10]). В частности, при $h=1$ это считающая радиальная функция $\varDelta^{\mathfrak{r}}$ и (2).

Будем говорить, что функция $g\colon I\to\mathbb{R}$ *выпукла* на интервале $I\subset\mathbb{R}$, если для любых двух пар $a,b\in I$ и $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ из выполнения неравенств $g(x)\leqslant c_1x+c_2$ при $x:=a$ и $x:=b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x\in[a,b]$. Будем называть функцию $g\colon I\to\mathbb{R}$ *строго* выпуклой на $I$, если в предыдущей импликации для внутренних точек $x\in(a,b)$ выполняется строгое неравенство $g(x)<c_1x+c_2$. Функцию назовем (строго) *вогнутой*, если противоположная ей функция (строго) выпуклая.

Будем говорить, что функция $g\colon I \to \mathbb{R}$ *выпукла относительно логарифма* $\ln$ на промежутке $I \subset \mathbb{R}^+$, если для любых двух пар $a, b \in I$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из неравенств $g(x) \leqslant c_1 \ln x + c_2$ при $x := a$ и $x := b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x \in [a, b]$.

При $\rho \in \mathbb{R}^+$ функция $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *$\rho$-тригонометрически выпуклой* на $\mathbb{R}$ (см. [1, 4]), если для любых пар чисел $a \leqslant b < a + \pi/p$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из неравенств $h(x) \leqslant c_1 \cos \rho x + c_2 \sin \rho x$ при $x := a$ и $x := b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x \in [a, b]$. При этом часто 1-тригонометрически выпуклые функции называют просто тригонометрически выпуклыми. В дальнейшем потребуются лишь $2\pi$*-периодические* $p$-тригонометрически выпуклые функции. Любая 0-тригонометрически выпуклая $2\pi$-периодическая на $\mathbb{R}$ функция постоянна.

**Теорема A** (см. [10, основная теорема]). *Пусть $M$ — разность пары субгармонических не равных $-\infty$ функций на $\mathbb{D}$ с распределением зарядов Рисса $\varDelta_M$, $u \neq -\infty$ — субгармоническая функция на $D$ с распределением масс Рисса $\varDelta_u$ и имеет место неравенство $u \leqslant M$ на $\mathbb{D}$. Тогда для любого $\rho \in \mathbb{R}^+$ найдётся число $C \in \mathbb{R}$, с которым имеет место неравенство*

$$\int\limits_{1/2}^{1} g(1/t - 1)\, \mathrm{d}\varDelta_u^{\mathfrak{ra}(h)}(t) \leqslant \int\limits_{1/2}^{1} g(1/t - 1)\, \mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{ra}(h)}(t) + C \tag{4}$$

*для любой $2\pi$-периодической $\rho$-тригонометрически выпуклой функции $h\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ и любой выпуклой функции $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ со значениями $g(0) = 0$ и $g(1) \leqslant 1$.*

**Следствие A1** (см. [10, часть основной теоремы]). *Пусть $M$ — разность пары субгармонических не равных $-\infty$ функций на $\mathbb{D}$ с распределением зарядов Рисса $\varDelta_M$, $Z$ — распределение неединственности по $M$ на $\mathbb{D}$. Тогда для любого $\rho \in \mathbb{R}^+$ найдётся такое число $C \in \mathbb{R}$, что*

$$\sum_{1/2<|z|<1} g\bigl(1/|z| - 1\bigr) h(\arg z) Z(z) \leqslant \int\limits_{1/2}^{1} g\bigl(1/t - 1\bigr)\, \mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{ra}(h)}(t) + C$$

*для любой пары функций $h$, $g$, такой же, как и в теореме* A.

**Следствие A2** (см. [10, теорема единственности]). *Пусть $M \neq -\infty$ — субгармоническая на $\mathbb{D}$ функция с распределением масс Рисса $\varDelta_M$, $Z$ — распределение точек на $\mathbb{D}$, $h$ — $2\pi$-периодическая $\rho$-тригонометрически выпуклая функция для некоторого $\rho \in \mathbb{R}^+$, а $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — выпуклая функция со значением $g(0) = 0$. Если голоморфная на $\mathbb{D}$ функция $f$ обращается в нуль на $Z$, удовлетворяет неравенству $|f| \leqslant \exp M$ на $\mathbb{D}$ и одновременно выполнена пара соотношений*

$$\sum_{1/2<|z|<1} g\bigl(1 - |z|\bigr) h(\arg z) Z(z) = +\infty, \quad \int\limits_{1/2}^{1} g\bigl(2(1-t)\bigr)\, \mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{ra}(h)}(t) < +\infty,$$

*то $f = 0$ — нулевая функция на $\mathbb{D}$.*

В основе доказательства теоремы A — общая теорема из [10], которая формулируется здесь лишь для ограниченных областей и с использованием обозначений и понятий настоящей статьи.

**Теорема B** (см. [10, теорема B]). *Пусть $M$ — разность пары субгармонических не равных $-\infty$ функций на ограниченной области $D$ с распределением зарядов Рисса $\varDelta_M$, $S \subset D$ — компакт с непустой внутренностью, а субгармоническая на $D$ функция $u \neq -\infty$ с распределением масс Рисса $\varDelta_u$ удовлетворяет неравенству $u \leqslant M$ на $D$. Тогда существует такое число $C \in \mathbb{R}$, что*

$$\iint\limits_{D \setminus S} v\, \mathrm{d}\varDelta_u \leqslant \iint\limits_{D \setminus S} v\, \mathrm{d}\varDelta_M + C \tag{5}$$

*для всех субгармонических положительных функций $v \leqslant 1$ на $D \setminus S$, для каждой из которых при любом выборе числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой свой компакт $K_\varepsilon(v) \subset D$, содержащий $S$, что*

$$v \leqslant \varepsilon \quad \text{на } D \setminus K_\varepsilon(v). \tag{6}$$

**Замечание 1.** Теорема B, очевидно, остаётся в силе и при замене в ограничении $v \leqslant 1$ на $D \setminus S$ единицы справа на фиксированное число $b > 0$, т.е. при ограничении $v \leqslant b$ на $D \setminus S$.

**Замечание 2.** В теореме B нет необходимости требовать субгармоничности функции $v$ всюду на $D \setminus S$. Достаточно потребовать субгармоничности функции $v$ на $D \setminus K$, где фиксированный компакт $K \subset D$ содержит компакт $S$, а на $K \setminus S$ ограничиться лишь измеримостью по распределениям масс $\varDelta_u$ и $|\varDelta_M|$. Действительно, при $v \leqslant b$ на $D \setminus S$ имеем

$$\iint\limits_{K\setminus S} v \,\mathrm{d}\varDelta_u + \iint\limits_{K\setminus S} v \,\mathrm{d}|\varDelta_M| \leqslant b\varDelta_u(K \setminus S) + b|\varDelta_M|(K \setminus S),$$

где конечная правая часть зависит только от $b$, $u$, $M$ и выбора $K$ и $S$ в $D$. Таким образом, правую часть этого неравенства всегда можно добавить к постоянной $C$ из (5), тем самым сохраняя (5) и для таких функций $v$ после возможного увеличения числа $C$.

В настоящей статье теорема A со следствиями A1 и A2 развиваются прежде всего по содержанию и общности, но в некоторой мере и по форме. В их обобщениях и развитиях ниже при каждом $\rho \in \mathbb{R}^+$ допускается применение более широких и гибких классов функций, чем рассмотренное выше общее для всех $\rho \in \mathbb{R}^+$ преобразование $t \longmapsto g(1/t - 1)$ выпуклых на $\mathbb{R}^+$ функций $g$. Случай $\rho = 0$ и более деликатный случай $\rho > 0$ рассматриваем раздельно.

## 3. Основные результаты в случае $\rho = 0$.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия теоремы* A *с* $\rho = 0$ *и* $0 < t_0 \leqslant r_0 < 1$. *Тогда найдётся число* $C \in \mathbb{R}$, *с которым для любой непрерывной функции* $g_0\colon [0, \ln(1/t_0)] \to [0, 1]$, *выпуклой на интервале* $\bigl[0, \ln(1/r_0)\bigr)$ *и со значением* $g_0(0) = 0$, *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{t_0}^{1} g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr) \,\mathrm{d}\varDelta_u^{\mathfrak{r}}(t) \leqslant \int\limits_{t_0}^{1} g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr) \,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{r}}(t) + C \tag{7}$$

*Доказательство.* Будем применять теорему B с замечанием 2 в области $D := \mathbb{D}$ при $S := t_0\overline{\mathbb{D}}$ и $K := t_0\overline{\mathbb{D}}$. По условиям теоремы 1 выполнены все условия теоремы B, касающиеся функций $u$ и $M$. Рассмотрим определённую на замкнутом кольце $\overline{\mathbb{D}} \setminus r_0\mathbb{D}$ функцию

$$v(z) = g_0\Bigl(\ln \frac{1}{|z|}\Bigr) \quad \text{при } z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus t_0\mathbb{D}. \tag{8}$$

Согласно свойствам функции $g_0$ функция $v \leqslant 1$ непрерывна, положительна и $v = 0$ на единичной окружности $\partial\mathbb{D}$, т.е. выполняется (6). Выпуклая функция $g_0 \geqslant 0$ на интервале $\bigl[0, \ln(1/r_0)\bigr)$ со значением $g_0(0) = 0$ обязательно возрастает на этом интервале. Следовательно, функция $v$ из (8) субгармонична на $\mathbb{D} \setminus r_0\overline{\mathbb{D}}$ как суперпозиция возрастающей выпуклой функции с (суб)гармонической функцией $z \longmapsto \ln(1/|z|)$ вне нуля (см. [9, теорема 2.2], [12, теорема 2.6.3]). Таким образом, функция $v$ удовлетворяет всем требованиям теоремы B. Заключение (5) теоремы B вместе с замечанием 2 даёт неравенство

$$\iint\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr) \,\mathrm{d}\varDelta_u(z) \leqslant \iint\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr) \,\mathrm{d}\varDelta_M(z) + C,$$

которое по определению считающей радиальной функции (2) совпадает с (7). □

**Замечание 3.** Положительная функция $g_0$ в силу выпуклости на интервале $\bigl[0, \ln(1/r_0)\bigr)$ и условия $g_0(0) = 0$ автоматически является непрерывной и возрастающей на этом интервале. Требование непрерывности функции $g_0$ на $\bigl[\ln(1/r_0), \ln(1/t_0)\bigr]$ обеспечивает существование интегралов Римана—Стилтьеса в (7) по считающим радиальным функциям $\varDelta_u^{\mathfrak{r}}$ и $\varDelta_M^{\mathfrak{r}}$. Если рассматривать их как интегралы Лебега—Стилтьеса, то требования к сужению ограниченной функции $g_0$ на $\bigl[\ln(1/r_0), \ln(1/t_0)\bigr]$ можно и ослабить до измеримости по мерам $\varDelta_u^{\mathfrak{r}}$ и $|\varDelta_M^{\mathfrak{r}}|$ на этом отрезке.

**Замечание 4.** Суперпозиция выпуклой функции $g_0$ с функцией $t \longmapsto \ln(1/t)$, использованная в (7), является функцией, выпуклой от логарифма ln.

**Следствие 1.** *Пусть $M$ — разность пары субгармонических функций на $\mathbb{D}$, не равных $-\infty$, с распределением зарядов Рисса $\varDelta_M$, $Z$ — распределение неединственности по функции $M$ на $\mathbb{D}$, а также $0<\rho\in\mathbb{R}^+$ и $0<t_0\leqslant r_0<1$. Тогда найдётся такое число $C\in\mathbb{R}$, что*

$$\sum_{t_0<|z|<1} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr)Z(z)\leqslant\int\limits_{t_0}^{1} g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{r}}(t)+C \tag{9}$$

*для любой функции $g_0$, такой же, как и в формулировке теоремы* 1 *перед* (7).

*Доказательство.* Для распределения неединственности $Z$ по $M$ на $D$ существует голоморфная на $\mathbb{D}$ функция $f\neq 0$ с распределением корней $\mathsf{Zero}_f\geqslant Z$ на $\mathbb{D}$, удовлетворяющая неравенству $\ln|f|\leqslant M$ на $\mathbb{D}$. Для субгармонической функции $u:=\ln|f|$ выполнены все условия теоремы 1. Следовательно, найдётся $C\in\mathbb{R}$, с которым для любой положительной непрерывной на $[0,\ln(1/t_0)]$ функции $g_0\leqslant 1$, выпуклой на интервале $\bigl[0,\ln(1/r_0)\bigr)$ с $g_0(0)=0$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{1} g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_{\ln|f|}^{\mathfrak{r}}(t)\leqslant\int\limits_{t_0}^{1} g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{r}}(t)+C,$$

где левая часть согласно формуле (1) равна

$$\iint\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_{\ln|f|}(z)\overset{(1)}{=}\sum_{t_0<|z|<1} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr)\,\mathsf{Zero}_f(z)\geqslant\sum_{t_0<|z|<1} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr)Z(z),$$

а последнее неравенство основано на положительности функции $g_0$. Отсюда сразу следует (9). □

**Следствие 2** (единственности)**.** *Пусть $M\neq-\infty$ — субгармоническая на $\mathbb{D}$ функция с распределением масс Рисса $\varDelta_M$, $Z$ — распределение точек на $\mathbb{D}$. Если для некоторой непрерывной функции $g_0\colon[0,\ln(1/t_0)]\to[0,1]$, выпуклой на интервале $\bigl[0,\ln(1/r_0)\bigr)$ и со значением $g_0(0)=0$, одновременно выполнена пара соотношений*

$$\sum_{r_0<|z|<1} g_0\bigl(\ln(1/|z|)\bigr)Z(z)=+\infty,\quad \int\limits_{r_0}^{1} g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr)\,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{r}}(t)<+\infty, \tag{10}$$

*то $Z$ — распределение единственности по функции $M$ на $\mathbb{D}$.*

*Доказательство.* Если бы распределение точек $Z$ было распределением неединственности, то по предыдущему следствию 1 при $t_0=r_0$ конечность интеграла из второго соотношения в (10) по неравенству (7) влекло бы за собой конечность суммы из первого соотношения в (10). □

Следующее утверждение в своей первой части показывает, что теорема 1, а также следствия 1 и 2 при $p=0$ содержат в себе соответственно теорему A, а также и следствия A1 и A2. Вторая часть демонстрирует, что они при $p=0$ строго более общие, чем теорема A и следствия A1 и A2.

**Предложение 1.** *Пусть функция $g\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ выпукла со значениями $g(0)=0$ и $g(1)\leqslant 1$. Тогда однозначно определяемая эквивалентными равенствами функция*

$$g_0(x)\underset{x\in\mathbb{R}^+}{:=}g(e^x-1)\quad\Longleftrightarrow\quad g_0\bigl(\ln(1/t)\bigr)\underset{t\in(0,1]}{=}g(1/t-1) \tag{11}$$

*положительна, непрерывна и выпукла на $\mathbb{R}^+$ со значениями $g_0(0)=0$ и $g_0\leqslant 1$ на $[0,\ln 2]$.*

*Наоборот, для тождественной функции $g_0(x)\underset{x\in\mathbb{R}}{=}x$, очевидно, обладающей всеми перечисленными после* (11) *свойствами, функция $g$, определяемая равенством*

$$g(e^x-1)\underset{x\in\mathbb{R}^+}{=}g_0(x)=x,\quad \textit{т.е.}\quad g(x)\underset{x\in\mathbb{R}^+}{=}\ln(1+x), \tag{12}$$

*строго вогнута на $\mathbb{R}^+$, а значит, не выпукла в каждом промежутке из $\mathbb{R}^+$.*

*Доказательство.* Функция $g_0$, определяемая в (11), выпукла как суперпозиция $g_0 \overset{(11)}{=} g\circ(\exp -1)$ двух возрастающих выпуклых функций $g$ и $\exp -1$. Строгая вогнутость логарифмической функции $g(x) \underset{x\in\mathbb{R}}{=} \ln(1+x)$ на $\mathbb{R}^+$ очевидна. □

## 4. Основные результаты в случае $\rho > 0$.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия теоремы* A, *а также условия* $\rho > 0$ *и* $0 < t_0 \leqslant r_0 < 1$. *Тогда найдётся число* $C \in \mathbb{R}$, *с которым для любой* $2\pi$*-периодической* $\rho$*-тригонометрически выпуклой функции* $h\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *и любой непрерывной функции* $g_\rho\colon \bigl[t_0^{2\rho}, 1\bigr] \to [0,1]$, *выпуклой на интервале* $\bigl(r_0^{2\rho}, 1\bigr]$ *и со значением* $g_\rho(1) = 0$, *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{t_0}^{1} \frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho}\,\mathrm{d}\Delta_u^{\mathfrak{ra}(h)}(t) \leqslant \int\limits_{t_0}^{1} \frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho}\,\mathrm{d}\Delta_M^{\mathfrak{ra}(h)}(t) + C. \tag{13}$$

*Доказательство.* Будем применять теорему B с замечаниями 1 и 2 в области $D := \mathbb{D}$ при $S := t_0\overline{\mathbb{D}}$ и $K := r_0\overline{\mathbb{D}}$. При этом выбор постоянной $b \geqslant v$ из замечания 1 указан ниже в (15). По условиям теоремы 1 выполнены все условия теоремы B на функции $u$ и $M$. Для указанных перед (13) функций $h$ и $g_\rho$ рассмотрим определённую на замкнутом кольце $\overline{\mathbb{D}} \setminus t_0\mathbb{D}$ функцию-произведение

$$v(z) := h(\arg z)\frac{g_\rho\bigl(|z|^{2\rho}\bigr)}{|z|^\rho} \quad \text{при } z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus t_0\mathbb{D}. \tag{14}$$

По свойствам функций $h$ и $g$ эта функция, очевидно, непрерывная и положительная на замкнутом кольце $\overline{\mathbb{D}} \setminus t_0\mathbb{D}$, $v = 0$ на единичной окружности $\partial\overline{\mathbb{D}}$, что обеспечивает свойство (6), а также

$$\sup v \leqslant \max h \cdot \sup_{t\in[t_0,1]} \frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho} \leqslant 1 \cdot \frac{1}{t_0^\rho} = t_0^{-\rho} =: b. \tag{15}$$

Покажем, что функция $v$ из (14) субгармоническая на открытом кольце $\mathbb{D} \setminus r_0\overline{\mathbb{D}}$.

Сначала рассмотрим случай дважды дифференцируемых функций $h$ на $\mathbb{R}$ и $g_\rho$ на промежутке $(r_0^{2\rho}, 1)$ и проведём элементарные вычисления оператора Лапласа в полярных координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{t^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{16}$$

от функции $v$ из (14), записанной в полярных координатах как

$$v(te^{i\theta}) := h(\theta)\frac{g_\rho\bigl(t^{2\rho}\bigr)}{t^\rho} \quad \text{при } \theta \in \mathbb{R} \text{ и } t \in (r_0^{2\rho}, 1). \tag{17}$$

Для первой производной по $t$ имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t}(te^{i\theta}) = \rho h(\theta)\bigl(2g_\rho'(t^{2\rho})t^{\rho-1} - g_\rho(t^{2\rho})t^{-\rho-1}\bigr),$$

откуда легко вычисляется вторая радиальная производная

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(te^{i\theta}) = \rho h(\theta)\bigl(4\rho g_\rho''(t^{2\rho})t^{3\rho-2} - 2g_\rho'(t^{2\rho})t^{\rho-2} + g_\rho(t^{2\rho})(\rho+1)t^{-\rho-2}\bigr).$$

После этого вычисление оператора Лапласа в полярных координатах даёт

$$\begin{aligned}\bigl(\Delta v\bigr)(te^{i\theta}) = \rho h(\theta)\Bigl(4\rho g_\rho''(t^{2\rho})t^{3\rho-2} - 2g_\rho'(t^{2\rho})t^{\rho-2} + g_\rho(t^{2\rho})(\rho+1)t^{-\rho-2}\Bigr) &+ \\ + \frac{1}{t}\rho h(\theta)\bigl(2g_\rho'(t^{2\rho})t^{\rho-1} - g_\rho(t^{2\rho})t^{-\rho-1}\bigr) + \frac{1}{t^2}h''(\theta)\frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho} &= \\ = 4\rho^2 h(\theta)g_\rho''(t^{2\rho})t^{3\rho-2} + \rho^2 h(\theta)g_\rho(t^{2\rho})t^{-\rho-2} + \frac{1}{t^2}h''(\theta)\frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho} &= \\ = 4\rho^2 h(\theta)g_\rho''(t^{2\rho})t^{3\rho-2} + \bigl(h''(\theta) + \rho^2 h(\theta)\bigr)\frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^{\rho+2}}&.\end{aligned} \tag{18}$$

Ввиду выпуклости функции $g_\rho$ с $g_\rho'' \geqslant 0$ и положительности $h$ положительно первое слагаемое в правой части (18). Для дважды дифференцируемой $\rho$-тригонометрически выпуклой функции имеет место неравенство $h'' + \rho^2 h \geqslant 0$ (см. [4, гл. I, § 16ж], [1, теорема 26]) и ввиду положительности $g_\rho$ положительно и второе слагаемое в правой части (18). Тем самым, при любом $\rho > 0$ положительность оператора Лапласа (16) от функции $v$ установлена, и функция $v$ — субгармоническая на открытом кольце $\mathbb{D} \setminus r_0\overline{\mathbb{D}}$. Снимем условия дважды дифференцируемости $h$ и $g_\rho$.

Для любой $\rho$-тригонометрически выпуклой $2\pi$-периодической функции существует убывающая последовательность дважды непрерывно дифференцируемых $\rho$-тригонометрически выпуклых $2\pi$-периодических функций, стремящаяся к ней (см. [5, предложение 1.7]). Для любой выпуклой на промежутке функции существует убывающая последовательность дважды непрерывно дифференцируемых выпуклых функций, стремящаяся к ней (см. [8, предложение 1]). Предел убывающей последовательности субгармонических функций даёт субгармоническую функцию. Эти «убывающие» аппроксимации обеспечивают субгармоничность функции $v$ на $\mathbb{D} \setminus r_0\overline{\mathbb{D}}$.

Таким образом, функция $v$ из (17) удовлетворяет всем требованиям теоремы B. Заключение (5) теоремы B вместе с замечаниями 1 и 2 даёт неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} h(\arg z)\frac{g_\rho\bigl(|z|^{2\rho}\bigr)}{|z|^\rho}\,\mathrm{d}\Delta_u(z) \leqslant \int\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} h(\arg z)\frac{g_\rho\bigl(|z|^{2\rho}\bigr)}{|z|^\rho}\,\mathrm{d}\Delta_M(z) + C. \tag{19}$$

Воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

**Лемма 1** (см. [5], [6], [10, лемма 1])**.** *Пусть $h$ — $2\pi$-периодическая непрерывная функция на $\mathbb{R}$, функция $G$ непрерывна и ограничена на $(t_0, 1) \subset (0, 1)$, $\mu$ — мера или заряд на $\mathbb{D}$. Тогда*

$$\iint\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} G(|z|)h(\arg z)\,\mathrm{d}\Delta(z) = \int\limits_{t_0}^{1} G(t)\,\mathrm{d}\Delta^{\mathfrak{ra}(h)}(t), \tag{20}$$

*где справа интегрирование ведётся по определённой в (3) считающей радиально-аргументной функции $\Delta^{\mathfrak{ra}(h)}$ меры или заряда $\Delta$ с весом $h$.*

Дважды применяя лемму 1 к интегралам из левой и правой частей неравенства (19) при $h$ и $t_0$ из условия следствия и с функцией $G(t) = g_\rho(t^{2\rho})/t^\rho$, получаем неравенство (13). □

**Замечание 5.** Положительная функция $g_\rho$ в силу выпуклости на интервале $\bigl(r_0^{2\rho}, 1\bigr]$ и условия $g_\rho(1) = 0$ автоматически непрерывна и убывает на интервале $\bigl(r_0^{2\rho}, 1\bigr]$. Требование непрерывности функции $g_\rho$ на $\bigl[t_0^{2\rho}, r_0^{2\rho}\bigr]$ обеспечивает существование интегралов Римана—Стилтьеса в (13) по возрастающей функции $\Delta_u^{\mathfrak{ra}(h)}$ и по функции ограниченной вариации $\Delta_M^{\mathfrak{ra}(h)}$. Если рассматривать их как интегралы Лебега—Стилтьеса, то требования к сужению ограниченной функции $g_\rho$ на $\bigl[t_0^{2\rho}, r_0^{2\rho}\bigr]$ можно и ослабить до $\Delta_u^{\mathfrak{ra}(h)}$-измеримости и $|\Delta_M^{\mathfrak{ra}(h)}|$-измеримости на $\bigl[t_0^{2\rho}, r_0^{2\rho}\bigr]$.

**Следствие 3.** *Пусть $M$ — разность пары субгармонических функций на $\mathbb{D}$, не равных $-\infty$, с распределением зарядов Рисса $\Delta_M$, $Z$ — распределение неединственности по функции $M$ на $\mathbb{D}$, а также $0 < \rho \in \mathbb{R}^+$ и $0 < t_0 \leqslant r_0 < 1$. Тогда найдётся такое число $C \in \mathbb{R}$, что*

$$\sum_{t_0<|z|<1} \frac{g_\rho(|z|^{2\rho})}{|z|^\rho} h(\arg z) Z(z) \leqslant \int\limits_{t_0}^{1} \frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho}\,\mathrm{d}\Delta_M^{\mathfrak{ra}(h)}(t) + C \tag{21}$$

*для любой пары функций $h, g_\rho$, такой же, как и в теореме 2 перед неравенством (13).*

*Доказательство.* Для распределения неединственности $Z$ по $M$ на $D$ существует голоморфная на $\mathbb{D}$ функция $f \neq 0$ с распределением корней $\mathsf{Zero}_f \geqslant Z$ на $\mathbb{D}$, удовлетворяющая неравенству $\ln|f| \leqslant M$ на $\mathbb{D}$. Для субгармонической функции $u := \ln|f|$ выполнены все условия теоремы 2.

Следовательно, найдётся $C \in \mathbb{R}$, с которым для любой положительной непрерывной на $[t_0^{2\rho}, 1]$ функции $g_\rho \leqslant 1$, выпуклой на интервале $\bigl(r_0^{2\rho}, 1\bigr]$ с $g_\rho(1) = 0$ , имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{1} \frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho} \,\mathrm{d}\varDelta_{\ln|f|}^{\mathfrak{ra}(h)}(t) \leqslant \int_{t_0}^{1} \frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho} \,\mathrm{d}\varDelta_{M}^{\mathfrak{ra}(h)}(t) + C,$$

где левая часть согласно формуле (20) леммы 1 равна

$$\int\limits_{\mathbb{D}\setminus t_0\overline{\mathbb{D}}} \frac{g_\rho(|z|^{2\rho})}{|z|^\rho} \,\mathrm{d}\varDelta_{\ln|f|}^{\mathfrak{ra}(h)}(z) \overset{(20)}{=} \sum_{t_0<|z|<1} \frac{g_\rho(|z|^{2\rho})}{|z|^\rho} \,\mathsf{Zero}_f(z) \geqslant \sum_{t_0<|z|<1} \frac{g_\rho(|z|^{2\rho})}{|z|^\rho} Z(z),$$

а последнее неравенства следует из $g_\rho \geqslant 0$ и $\mathsf{Zero}_f \geqslant Z$. Отсюда сразу получаем (21). □

**Следствие 4** (единственности). *Пусть $M \neq -\infty$ — субгармоническая на $\mathbb{D}$ функция с распределением масс Рисса $\varDelta_M$, $Z$ — распределение точек на $\mathbb{D}$, $0 < \rho \in \mathbb{R}^+$. Если для некоторой $2\pi$-периодической $\rho$-тригонометрически выпуклой на $\mathbb{R}$ функции $h \geqslant 0$ и некоторой выпуклой на отрезке $[r_0^{2\rho}, 1] \subset (0, 1]$ функции $g_\rho \geqslant 0$ со значением $g(1) = 0$ выполнена пара соотношений*

$$\sum_{r_0<|z|<1} Z(z) g_\rho\bigl(|z|^{2\rho}\bigr) h(\arg z) = +\infty, \qquad \int_{r_0}^{1} g_\rho(t^{2\rho}) \,\mathrm{d}\varDelta_M^{\mathfrak{ra}(h)}(t) < +\infty, \tag{22}$$

*то $Z$ — распределение единственности по функции $M$ на $\mathbb{D}$.*

*Доказательство.* Если бы распределение точек $Z$ было распределением неединственности, то по предыдущему следствию 3 при $t_0 = r_0$ конечность интеграла из второго соотношения в (22) по неравенству (13) влекло бы за собой конечность суммы из первого соотношения в (22). □

Следующее утверждение в своей первой части показывает, что теорема 2 со следствиями 3 и 4 при $\rho > 0$ содержат в себе соответственно теорему A со следствиями A1 и A2. Вторая часть демонстрирует, что они при $\rho > 0$ строго более общие, чем теорема A и следствия A1 и A2.

**Предложение 2.** *Пусть функция $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ выпукла со значениями $g(0) = 0$ и $g(1) \leqslant 1$, а также $0 < \rho \in \mathbb{R}^+$. Тогда функция, однозначно определяемая эквивалентными равенствами*

$$g_\rho(x) \underset{x\in(0,1]}{:=} \sqrt{x}\, g\bigl(x^{-1/(2\rho)} - 1\bigr) \quad\Longleftrightarrow\quad g(1/t - 1) \underset{t\in(0,1]}{=} \frac{g_\rho(t^{2\rho})}{t^\rho}, \tag{23}$$

*непрерывна на $(0, 1]$, принимает значение $g_\rho(1) = 0$ и выпукла на интервале $\bigl(r_\rho^{2\rho}, 1\bigr]$ при*

$$r_\rho := \Bigl(1 - \frac{1}{\rho^2}\Bigr)^+ \in [0, 1). \tag{24}$$

*Обратно, пусть $0 < \rho \in \mathbb{R}^+$ и число $p \in \mathbb{R}^+$ выбрано так, что*

$$(\rho - 1)^+ < p < \rho, \quad \text{например, } p := \frac{(\rho - 1)^+ + \rho}{2}. \tag{25}$$

*Тогда функция*

$$g_\rho(x) = 1 - x^{(\rho+p)/(2\rho)}, \quad g_\rho(1) = 0, \tag{26}$$

*непрерывна, положительна, а также выпукла на отрезке $[0, 1]$, т.е. функция (26) обладает всеми перечисленными выше в (23)–(24) свойствами, в то время как функция $g$, связанная с функцией $g_\rho$ из (26) соотношениями (23), т.е.*

$$g(x) \underset{x\in\mathbb{R}^+}{=} (1 + x)^\rho g_\rho\Bigl(\frac{1}{(1 + x)^{2\rho}}\Bigr) \underset{x\in\mathbb{R}^+}{=} (1 + x)^\rho - (1 + x)^{-p} \tag{27}$$

*строго вогнута в некоторой правой окрестности нуля, т.е. не выпукла в этой окрестности.*

*Доказательство.* Непрерывность функции $g_\rho$, определённой первым равенством из (23) на интервале $(0,1]$, очевидна ввиду непрерывности выпуклой функции $g$ на $\mathbb{R}^+$. Кроме того, из первого равенства в (23) следует равенство

$$g_\rho(1) \overset{(23)}{=} \sqrt{1}g\bigl(1^{-1/2\rho}-1\bigr)=g(0)=0.$$

Замена $x:=t^{2\rho}$ в (23) сразу даёт второе эквивалентное равенство-представление из (23). Для доказательства первой части предложения 2 осталось доказать выпуклость функции $g_\rho$ на интервале $\bigl(r_\rho^{2\rho},1\bigr]$ с левым концом (24), которое проведём сначала в предположении дважды дифференцируемости функции $g$ на $(0,+\infty)$. Элементарное вычисление производной

$$g_\rho'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)-\frac{1}{2\rho}x^{-1/(2\rho)-1/2}g'\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)\quad \text{при } x\in(0,1)$$

для второй производной даёт равенство

$$g_\rho''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)+\frac{1}{4\rho^2}x^{-1/(2\rho)-3/2}g'\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)+\\ +\frac{1}{4\rho^2}x^{-1/\rho-3/2}g''\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)\quad \text{при } x\in(0,1),$$

где последнее слагаемое заведомо положительно в силу выпуклости функции $g$, откуда

$$g_\rho''(x)\geqslant-\frac{1}{4}x^{-3/2}g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)+\frac{1}{4\rho^2}x^{-1/(2\rho)-3/2}g'\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)\quad \text{при всех } x\in(0,1). \tag{28}$$

Для выпуклой положительной дифференцируемой функции $g$ на $\mathbb{R}^+$ со значением $g(0)=0$ из элементарных геометрических соображений по соотношениям между секущей и касательной

$$g'(t)\geqslant\frac{g(t)}{t}\quad \text{при всех } t\in(0,+\infty).$$

Применение этого неравенства при $t:=x^{-1/(2\rho)}-1$ влечёт за собой неравенство

$$g'\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)\geqslant\frac{g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)}{x^{-1/(2\rho)}-1}\quad \text{при всех } x\in(0,1).$$

Применение этого неравенства к последнему слагаемому правой части (28) даёт

$$g_\rho''(x)\geqslant-\frac{1}{4}x^{-3/2}g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)+\frac{1}{4\rho^2}x^{-1/(2\rho)-3/2}\frac{g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)}{x^{-1/(2\rho)}-1}=\\ =\frac{1}{4}x^{-3/2}g\bigl(x^{-1/(2\rho)}-1\bigr)\left(\frac{1}{\rho^2\bigl(1-x^{1/(2\rho)}\bigr)}-1\right)$$

при всех $x\in(0,1)$. В правой части здесь все сомножители, кроме последнего в скобках, положительны, а последний положителен, если и только если $0<\rho^2\bigl(1-x^{1/(2\rho)}\bigr)\leqslant1$. При значениях $x\in(0,1)$ это равносильно неравенствам

$$1>x>\left(\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)^+\right)^{2\rho}\overset{(24)}{=}r_\rho^{2\rho}.$$

Таким образом, вторая производная функции $g_\rho$ положительна на промежутке $\bigl(r_\rho^{2\rho},1\bigr)$. Отсюда в силу непрерывности и положительности функции $g_\rho$ на $(0,1]$ и значения $g_\rho(1)=0$ эта функция $g_\rho$ выпукла и на интервале $\bigl(r_\rho^{2\rho},1\bigr]$. Теперь можем перейти к общему случаю.

Произвольная выпуклая на $\mathbb{R}^+$ функция $g\geqslant0$ со значением $g(0)=0$ возрастает на $\mathbb{R}^+$ и может быть продолжена на $\mathbb{R}$ как чётная непрерывная равенством $g(x):=g(-x)$ при $x\leqslant0$.

Пусть $k\geqslant0$ — бесконечно дифференцируемая чётная функция на $\mathbb{R}$ с носителем

$$\operatorname{supp}k\subset(-1/2,1/2),\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}k(t)\,\mathrm{d}t=1,\qquad k_n(t)\underset{t\in\mathbb{R}}{:=}k(nt)n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Для непрерывной функции $g$ теперь уже на $\mathbb{R}$ при каждом $n\in\mathbb{N}$ определена бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ свёртка

$$g*k_n\colon x\underset{x\in\mathbb{R}}{\longmapsto}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(x-t)k_n(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{1/2n}\frac{g(x-t)+g(x+t)}{2}k_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Из определения выпуклой функции для любого $x\in\mathbb{R}$ функция

$$t\longmapsto\frac{g(x+t)-g(x-t)}{2}\underset{0<t\to 0}{\longrightarrow}g(x)$$

определена и возрастающая по переменной $t\geqslant 0$. Отсюда свёртки $g*k_n$ образуют убывающую при росте $n$ последовательность выпуклых бесконечно дифференцируемых положительных чётных функций на $\mathbb{R}$, возрастающих на $\mathbb{R}^+$, поточечно стремящуюся к выпуклой непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $g$. Из классической теоремы Дини о равномерной сходимости монотонной последовательности непрерывных функций, сходящейся поточечно на компакте к непрерывной функции, следует, что последовательность $g*k_n$ сходится и равномерно к $g$ на отрезках из $\mathbb{R}$. Поэтому последовательность выпуклых положительных бесконечно дифференцируемых функций $g*k_n-(g*k_n)(0)$ сходится равномерно на отрезках из $\mathbb{R}$, принимая значение 0 в нуле. Для таких функций предложение 2 уже доказано. При этом предельный переход кфункции $g$ никак не нарушает конструкций (23)–(24). Тем самым, первая часть (23)–(24) предложения 2 доказана и для произвольных положительных выпуклых на $\mathbb{R}^+$ функций $g$ со значением $g(0)=0$.

Перейдём к конструкциям второй части предложения 2.

Свойства функции $g_\rho(x)=1-x^{(\rho+p)/(2\rho)}$ из (26) очевидны. Так, её выпуклость сразу следует из вогнутости степенной функции с показателем $(\rho+p)/(2\rho)<1$ ввиду ограничения $p<\rho$ из (25). В то же время вычисление второй непрерывной производной явной функции $g$ из (27) даёт

$$g''(x)\underset{x\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}}{\overset{(27)}{=}}\rho(\rho-1)(1+x)^{\rho-2}-p(p+1)(1+x)^{-p-2},$$

где предельное значение в нуле при $0<x\to 0$ равно

$$\rho(\rho-1)-p(p+1)=(\rho+p)\big((\rho-1)-p\big)<0$$

ввиду нижнего ограничения на $p>(\rho-1)^+$ в (25). Это показывает, что функция $g$ из (27) действительно строго вогнута в некоторой правой окрестности нуля. ☐

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Гришин А. Ф., Малютин К. Г.* Тригонометрически выпуклые функции. — Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2015.
2. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. — М.: Наука, 1966.
3. *Эванс Л. К., Гариепи К. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функции. — Новосибирск: Научная книга, 2002.
4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функции. — М.: ГИТТЛ, 1956.
5. *Хабибуллин Б. Н.* Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка// Мат. сб. — 1991. — *182*, № 6. — С. 811–827.
6. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. Т. 2. — Уфа: Башкир. гос. ун-т, 2012.
7. *Б. Н. Хабибуллин* Распределения единственности для голоморфных функций на круге// Мат. Междунар. Воронеж. весенней мат. школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXXV» (Воронеж, 26–30 апреля 2024 г.). — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2024. — С. 352–354.
8. *Хабибуллин Б. Н. , Кудашева Е. Г., Мурясов Р. Р.* Полнота экспоненциальных систем в пространствах функций в терминах периметра// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *227*. — С. 79–91.
9. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.

10. *Khabibullin B. N., Khabibullin F. B.* Zeros of holomorphic functions in the unit disk and $\rho$-trigonometrically convex functions// Anal. Math. Phys. — 2019. — *9*, № 3. — P. 1087–1098.
11. *Khabibullin B. N., Khabibullin F. B.* Zeros of holomorphic functions in the unit ball and subspherical functions// Lobachevskii J. Math. — 2019. — *40*, № 5. — P. 648–659.
12. *Ransford Th.* Potential Theory in the Complex Plane. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
13. *Roberts A. W., Varberg D. E.* Convex Functions. — New York–London: Academic Press, 1973.

## ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00002).

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хабибуллин Булат Нурмиевич (Khabibullin Bulat Nurmievich)
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа
(Institute of Mathematics with Computing Center of the Ufa Federal Research Center
of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)
E-mail: `khabib-bulat@mail.ru`