ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 15–33
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-15-33

УДК 519.24

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОЙ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ И МАРКОВСКИЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ

© 2024 г. **Ю. П. ВИРЧЕНКО, Д. А. ЧЕРКАШИН**

Посвящается светлой памяти академика НАНУ В. Г. Барьяхтара (1930–2020)

Аннотация. Дано краткое введение в теорию перколяции. В рамках дискретной теории перколяции на бесконечных графах разработан метод аппроксимации вероятности перколяции, основанный на конструировании последовательности «аппроксимирующих» бесконечных графов специального типа, называемых иерархическими. Вычисление вероятности перколяции для графов такого типа сводится к анализу подходящего марковского ветвящегося процесса с дискретным временем.

Ключевые слова: бесконечный граф, вероятность перколяции, ветвящийся случайный процесс, надкритический режим, отношение связности.

HIERARCHICAL MODELS IN DISCRETE PERCOLATION THEORY AND MARKOV BRANCHING PROCESSES

© 2024 **Yu. P. VIRCHENKO, D. A. CHERKASHIN**

Dedicated to the bright memory of NASU academician V. G. Baryakhtar (1930–2020)

Abstract. A brief introduction to percolation theory is given. Within the framework of the discrete percolation theory on infinite graphs, we develop a method for approximating the percolation probability based on the construction of a sequence of infinite graphs of a special type called the hierarchical graphs. The calculation of the percolation probability for graphs of this type is reduced to the analysis of a suitable Markov branching process with discrete time.

Keywords and phrases: infinite graph, percolation probability, branching random process, supercritical regime, connectedness relation.

AMS Subject Classification: 60K35, 60J85

1. Введение. Считается, что теория перколяции берет свое начало с работ Дж. Хаммерсли [17, 19, 21]. Это действительно так с точки зрения возникновения идеологически новой постановки задач в рамках теории вероятностей. Однако по мере развития этой теории при широкой, логически завершенной трактовке понятий теории перколяции стало понятным, что представление о перколяции возникло в математике значительно раньше при решении задачи Гальтона—Ватсона (см., например, [16]); в процессе развития оно превратилось в теорию марковских ветвящихся случайных процессов (см., например, [11]). К настоящему времени теория перколяции уже утвердилась как полноправный раздел теории вероятностей. Появились монографии [13, 20, 22] и обзорные статьи (см., например, [7, 18]), которые подвели итог определенному этапу развития теории. К настоящему времени теория перколяции, как и всякая развитая математическая теория, подошла к состоянию, когда сформулировано множество сложных проблем, требующих для своего решения принципиально новых математических методов, которые вряд ли окажутся простыми и универсальными. Настоящая работа направлена на разработку как раз такого нетрадиционного подхода к решению задач из наиболее разработанного направления теории, которое называется *дискретной теорией перколяции.* В этой работе мы касаемся только тех задач дискретной теории, в которых перколяция рассматривается как ненаправленный процесс.

Математически общая концепция теории перколяции базируется на трех взаимосвязанных математических структурах (см. [2]). Во-первых, на множестве V, которое мы будем называть *пространством погружения*, должно быть определено бинарное симметричное отношение φ, на основе которого вводится понятие о связности или несвязности подмножеств из cV; при этом само множество V должно быть связным. Во-вторых, должно быть определено расстояние $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ между элементами из V, относительно которого V является полным метрическим пространством, а отношение φ непрерывно. В третьих, на семействе $\mathcal{W} = 2^V$ должна быть определена *структура измеримости*, т.е. σ-алгебра $\mathfrak{W}$ семейств $\mathcal{A}$ подмножеств из V. Эта σ-алгебра должна быть согласована с топологией и отношение φ должно быть измеримым. На σ-алгебре вводится σ-аддитивная (вообще говоря, конечная) мера P. Нормированную на единицу конечную меру P будем называть вероятностью и обозначать через $\Pr\{\mathcal{A}\}$ ее значения для каждого измеримого семейства $\mathcal{A}$. При выполнении перечисленных трех условий, можно говорить, что определена *перколяционная структура*, в рамках которой можно ставить и решать задачи о наличии с ненулевой вероятностью связей между различными подмножествами из V. В частности, ставить вопрос о наличии *перколяции* (протекании на бесконечность) в случае, если V является некомпактным метрическим пространством. Конечно же, описанная точка зрения на природу теории перколяции является очень общей и в дальнейшем в настоящей работе мы не будем ее анализировать в столь абстрактной форме. Конкретные объекты теории перколяции, которые укладываются в описанную математическую схему, приводятся в обзорных работах [7–10].

Предметом нашего рассмотрения является так называемая *дискретная теория перколяции*, в которой V является счетным множеством. В этом случае определение отношения связности, топологии и структуры измеримости «случайных» подмножеств из V и меры P сильно упрощается. Краткое введение в это направление теории перколяции дано в следующем разделе. В дискретном случае оказывается возможной разработка более или менее общих приближенных аналитических методов вычисления перколяционных характеристик (отметим, что они немногочисленны и, как правило, довольно трудоемки). При их использовании очень сложно давать эффективную оценку точности получаемых приближений. Примеры таких вычислений приведены, например, в монографии [22]. В основном они базируются на так называемом *кластерном разложении* и контурном методе оценки точности приближений. Попытки усовершенствования этого метода представлены, например, в [4, 27]. Более того, эти методы не позволяют вычислять для сколько-нибудь общих объектов исследования дискретной теории перколяции так называемый *порог перколяции* c_*, даже в простейшем случае, когда мера P определяется посредством бернуллиевского случайного поля на V. Под вычислением мы понимаем построение приближений с указанием гарантированных оценок их точности так, чтобы можно было утверждать, что эти приближения сходятся к истинному порогу c_*. В описанной ситуации очень сложно доказывать какие-либо общие утверждения о качественных свойствах перколяционных характеристик. Например, с физической точки зрения совершенно очевидно, что так называемая *вероятность перколяции* $P(c)$ для бернуллиевского случайного поля является монотонно возрастающей функцией от концентрации c, однако доказательство этого факта оказывается весьма непростым (см. по этому поводу [1, 15]). Более того, функция $P(c)$ является, по-видимому, вогнутой при $c > c_*$ в случае бернуллиевского поля. Авторам не известно ни доказательство этого факта, ни его опровержение. В связи с этим актуальным является разработка какого-либо общего аналитического подхода для приближенного решения задач дискретной теории перколяции, который бы позволил, хотя бы частично, устранить указанные выше недостатки применяемых в ней расчетных аналитических методов. В настоящей работе сделана попытка построения такого метода основанного на специальных перколяционных моделях, которые авторы называют *иерархическими.* Этот термин выбран нами по аналогии с *иерархическими моделями Ф. Дайсона*, используемыми в равновесной статистической механике решеточных систем при изучении так называемых *фазовых переходов* для гиббсовских случайных полей на кристаллических решетках (см. по этому поводу [12]).

План предлагаемой работы состоит в следующем. В разделе 2 дано введение в систему понятий дискретной теории перколяции, в разделе 3 описана система понятий теории марковских цепей специального типа, которые мы называем *марковскими ветвящимися случайными процессами с марковским измельчением.* На их свойствах основан анализ определяемых нами иерархических моделей. В разделе 4 вводятся в рассмотрение иерархические модели. Наконец, в разделе 5 определяются последовательные аппроксимации вероятности перколяции бернуллиевского случайного поля на бесконечных *локально компактных* графах.

2. Задачи дискретной теории перколяции. В *дискретной теории перколяции*, вследствие счетности множества V, введение отношения связанности основано на понятии *графа* (или, более общó, гиперграфа).

Пусть имеется не более чем счетное множество V элементов, которые в дальнейшем будем обозначать строчными латинскими буквами u, v, w, x, y, z. Число элементов в подмножествах W этого *пространства погружения* обозначаем $|W|$. В частности, если W бесконечно, то будем писать $|W| = \infty$. Положим, что на множестве V задано бинарное симметричное отношение φ, которое называется *отношением смежности.* Если пара различных элементов $\{x, y\} \subset V$ находится в отношении φ, то этот факт будем записывать в виде $\varphi(x, y)$, либо $x\varphi y$. При этом $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. Графом Γ называется пара $\langle V, \varphi\rangle = \Gamma$. Элементы множества V в этом случае называются его *вершинами*, а подмножества W вершин — *конфигурациями.* Наоборот, семейства конфигураций называем множествами. Для каждой вершины $x \in V$ кардинальное число $|\{y \in V : \varphi(x, y)\}|$ называется ее степенью. Если это число бесконечно, то считают, что степень вершины бесконечна.

Имеется взаимно однозначное соответствие между всеми конфигурациями W из V и дихотомическими функциями $n(x)$, $x \in V$, принимающими значения в $\{0, 1\}$. Стандартная биекция (функтор) $\mathsf{W}[\cdot] : \{n(x); x \in V\} \mapsto 2^V$ устанавливается формулой $W = \mathsf{W}[n] = \{x : n(x) = 1\}$. Таким образом, определение фиксированной конфигурации $W \subset V$ эквивалентно определению соответствующей ей функции $n(x)$, $x \in V$.

Для всякой конфигурации $W \subset V$ пара $\langle W, \varphi_W\rangle = \Gamma_W$, определяемая сужением φ_W на конфигурацию W отношения φ, называется подграфом Γ_W графа Γ.

Каждая последовательность $\gamma(x, y) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y\rangle$ вершин из V, в которой $x_{j-1}\varphi x_j$, $j \in I_n$, $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ называется *путем* на Γ из вершины x в вершину y. Число n компонент последовательности называется длиной пути $\gamma(x, y)$; этот факт будем записывать в виде $\mathsf{d}(\gamma(x, y)) = n$. Если последовательность $\gamma(x) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \ldots\rangle$ бесконечна, $x_{j-1}\varphi x_j$, $j \in \mathbb{N}$, то такой путь называется бесконечным путем с начальным узлом x. При этом полагаем $\mathsf{d}(\gamma(x)) = \infty$.

Если для указанных выше последовательностей $\gamma(x, y)$ и $\gamma(x)$ выполняется условие $x_j \in W$, то говорят, что такие пути расположены в конфигурации W. При этом $\{x, y\} \subset W$, концевые вершины пути $\gamma(x, y)$ называются *связанными на* W. Этот факт будем записывать в виде $x \overset{W}{\sim} y$, или, если это не вызывает недоразумений, кратко $x \sim y$. Таким образом, на пространстве погружения определено бинарное отношение связанности.

Очевидным образом, отношение связности симметрично (т.е. наряду с $x \sim y$, имеет место $y \sim x$), рефлексивно ($x \sim x$) и транзитивно (т.е. для любых трех вершин x, y, z из $x \sim z$ и $z \sim y$ вытекает $x \sim y$). Наличие перечисленных свойств отношения связанности указывает на то, что оно является *отношением эквивалентности.* Согласно общему свойству таких отношений (см., например, [6]), любая конфигурация W разбивается однозначным образом на дизъюнктивные конфигурации $\{W_j; j \in \mathbb{N}\}$ связанных между собой вершин, причем все эти конфигурации не связаны между собой. В теории перколяции они называются *кластерами.* Аналогично, ввиду указанной выше биекции между конфигурациями и дихотомическими функциями, любая такая функция $n(x)$, $x \in V$ определяет взаимно однозначным образом набор кластеров в V.

Как уже было сказано во введении по поводу построения перколяционной модели, *пространство погружения* V должно быть связным. В этом случае граф Γ называется *связным.* Пусть вершина x принадлежит конфигурации W. Тогда в наборе кластеров $\{W_j; j \in \mathbb{N}\}$ этой конфигурации имеется единственный кластер, который ее содержит; будем обозначать его $W(x)$. Число вершин в каждом кластере W_k из набора, соответствующего конфигурации W, будем обозначать $|W_k| \equiv \mathrm{Card}(W_k)$. В том же случае, когда кластер W_k бесконечен, будем писать $|W_k| = \infty$.

На любом графе для каждой фиксированной конфигурации W возможно введение метрики. Расстояние $\mathrm{dist}(x, y)$ между любыми двумя вершинами x и y из конфигурации $W \subset V$, принадлежащих одному и тому же кластеру $W(x) = W(y)$ в ней, определяется формулой

$$\mathrm{dist}(\gamma(x, y)) = \min\big\{\mathsf{d}(\gamma(x, y));\ \{\gamma(x, y)\} \subset W\big\}.$$

Эта формула гарантирует выполнение всех требований, предъявляемых к понятию расстояния. Положив $\mathrm{dist}(x, y) = \infty$ в случае, когда x и y не связаны или, по крайней мере, одна из этих вершин не принадлежит W, мы согласуем метрику с введенным отношением связности.

Путь $\gamma(x, y)$ (соответственно, бесконечный путь $\gamma(x)$) называется несамопересекающимся, если для любых двух вершин x_j и x_k, $j \neq k$, из последовательности $\gamma(x, y) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = y\rangle$ (соответственно, $\gamma(x) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \ldots\rangle$) выполняется $x_j \neq x_k$, $\{j, k\} \subset I_n \cup \{0\}$ (соответственно, $\{j, k\} \subset \mathbb{N}_+$). Любые две вершины из одного и того же кластера могут быть связаны несамопересекающимся конечным путем.

Наибольший интерес в дискретной теории перколяции представляет случай, когда исходный граф Γ перколяционной модели бесконечен, т.е. $|V| = \infty$. Кроме того, среди всех бесконечных графов представляют интерес такие, у которых степень каждой вершина конечна. Это условие гарантирует, что метрика на графе Γ определяет на нем *локально компактную топологию.* Поэтому такие графы, в дальнейшем, мы называем *локально компактными.*

Заметим, что в теории, излагаемой в [22], требуется выполнение более жесткого условия, а именно, чтобы степени всех вершин были равномерно ограничены. При условии конечности степеней всех вершин, конечность кластера эквивалентна конечности любого расположенного в нем несамопересекающего пути. В таком случае бесконечность локально компактного графа Γ эквивалентна наличию в нем сколь угодно удаленных друг от друга вершин.

Здесь мы не обсуждаем вопрос о какой-либо классификации необозримого множества бесконечных графов. Тип бесконечных графов, для которых ставятся и решаются задачи дискретной теории перколяции, определяется требованиями ее приложений. Бесконечные графы, используемые в статистической математической физике и теории случайных процессов, по отношению к которым приложима теория перколяции, бывают в основном двух типов. Это так называемые *древесные бесконечные графы*, о которых пойдет речь в следующем разделе, и *периодические графы* (см. [3, 22]), которые используются в статистической механике решетчатых систем (см. [24]). В настоящей работе будем использовать (см. раздел 4) бесконечные графы *иерархического типа*, построение которых осуществляется на основе комбинирования математических механизмов, используемых при построении графов указанных двух типов.

Наконец, для того чтобы синтезировать такую структуру измеримости для моделей дискретной теории перколяции, чтобы отношение связанности (или, эквивалентно, отношение φ смежности на графе) было измеримым, нужно определиться с *пространством элементарных событий* $\mathcal{W}$. Это требование связано в первую очередь с приложениями теории перколяции. Очевидным образом, нужно считать, что $\mathcal{W}$ составляет семейство всех конфигураций $W \subset V$. Структура измеримости — σ-алгебра $\mathfrak{W}$ — должна порождаться не более чем счетным классом множеств конфигураций, которые являются *случайными событиями.* Так как $\mathrm{Card}\, 2^V = \aleph_1$, то конкретный выбор этого класса должен быть регламентирован какими-либо дополнительными соображениями. Для того чтобы отношение связности было измеримым, нужно в качестве класса $\mathfrak{W}_0$ случайных событий, порождающего σ-алгебру $\mathfrak{W}$, выбрать все так называемые *цилиндрические множества* $\mathcal{A}[X] = \{W \subset V : X \subset W, |X| < \infty\}$ конфигураций, определяемых всевозможными конечными наборами X из V. Легко видеть, что класс $\mathfrak{W}_0$ цилиндрических событий счетен, и поэтому минимальная σ-алгебра $\mathfrak{W}$, содержащая этот класс, является счетнопорожденной (см. [6]).

Пусть $X \subset V$. Введем в рассмотрение множества конфигураций

$$\mathcal{C}[X] = \Big\{W \subset V : x \overset{W}{\sim} y,\ \{x, y\} \subset X\Big\}.$$

Теорема 1. *Для любой конфигурации $Z \subset V$ на любом конечном графе и на любом бесконечном локально компактном графе множество $\mathcal{C}[Z]$ конфигураций измеримо.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда Γ — бесконечный граф. Множество $\mathcal{C}[Z]$ представимо в виде не более чем счетного пересечения

$$\mathcal{C}[Z] = \bigcap_{\{x,y\}\subset Z} \mathcal{C}[\{x,y\}].$$

Тогда достаточно доказать измеримость каждого из множеств $\mathcal{C}[\{x,y\}]$.

Пусть $\gamma(x,y) = \langle x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y\rangle$ — произвольный конечный путь на Γ. Множество $\mathcal{C}[X]$, $X = \{\gamma(x,y)\}$, $|X| < \infty$, измеримо, так как его можно представить в виде

$$\mathcal{C}[X] = \{W \subset V : \{\gamma(x,y)\} \subset W\}.$$

Так как $\mathcal{C}[\{x,y\}]$ есть объединение цилиндрических множеств,

$$\mathcal{C}[\{x,y\}] = \bigcup_{\{\gamma(x,y)\}\subset V} \big\{W \subset V : \{\gamma(x,y)\} \subset W\big\},$$

то справедливость утверждения для пары вершин конечного графа очевидна ввиду конечности множества всех возможных несамопересекающихся путей $\gamma(x,y)$ на конечном графе.

Для доказательства справедливости утверждения в случае бесконечных локально компактных графов Γ заметим, что у таких графов наборы вершин $V_N = \{z \in V : \mathrm{dist}(x,z) < N\}$ конечны. Рассмотрим сужения Γ_{V_N} графа Γ (они необязательно являются связными) при $N \in \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение множества

$$\mathcal{C}_N[\{x,y\}] = \big\{W \subset V : \exists\{\gamma(x,y)\} \subset W \cap V_N\big\},$$

которые, как указано выше, измеримы. Тогда измеримость множества $\mathcal{C}[\{x,y\}]$ следует из его представления в виде теоретико-множественного предела измеримых множеств

$$\mathcal{C}[\{x,y\}] = \lim_{N\to\infty} \mathcal{C}_N[\{x,y\}]. \qquad \square$$

Доказанное утверждение дает основу для постановки и решения задач о вычислении вероятности связанности для любого конечного набора вершин графа Γ. Тем самым оно подводит итог построению моделей дискретной теории перколяции, так как определены три взаимосвязанных математических структуры: связность, топология и измеримость, необходимость которых требуется для задания *перколяционной структуры.* Следствием теоремы 1 является, в частности, следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi\rangle$ — связный бесконечный локально компактный граф. Тогда для любой вершины $x \in V$ множество*

$$\mathcal{C}[x] = \big\{x : \exists(\gamma(x) \subset V : \mathsf{d}(\gamma(x)) = \infty)\big\}$$

конфигураций W измеримо.

Доказательство следует из того факта, что все множества

$$\mathcal{C}_N[x] \equiv \bigcup_{y\in V:\mathrm{dist}(x,y)>N} \big\{W \subset V : y \overset{W}{\sim} x\big\}$$

измеримы как счетные объединения измеримых множеств, и представления $\mathcal{C}[x]$ в виде теоретико-множественного предела

$$\mathcal{C}[x] = \lim_{N\to\infty} \mathcal{C}_N(x). \qquad \square$$

Заметим, что множество $\mathcal{C}(x)$ состоит из всех конфигураций, содержащих какой-либо бесконечный путь $\gamma(x)$,

$$\mathcal{C}[x] = \lim_{N\to\infty} \big\{\exists(\{\gamma(x,y)\} \subset V : \mathsf{d}(\gamma(x,y)) > N)\big\}$$

или, эквивалентно, содержащих хотя бы один бесконечный кластер.

Определение 1. Если на σ-алгебре $\mathfrak{W}$ графа Γ определена такая мера P, что для фиксированной вершины $x \in V$ вероятность $P[x] = \Pr\{W \subset V : W \in \mathcal{C}[x]\}$ положительна, то говорят, что для меры P из этой вершины существует перколяция.

Одной из центральных проблем теории перколяции является установление условий для графа Γ и меры P, которые приводят к существованию перколяции из какой-либо его вершины.

Для построения σ-аддитивной меры $\mathsf{P}(\cdot) \equiv \Pr\{\cdot\}$ на σ-алгебре $\mathfrak{W}$, связанной с графом $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$, нужно определить ее на алгебре, порождаемой всеми цилиндрическими множествами $\mathcal{A}[X]$, $X \subset V$, $|X| < \infty$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы мера P удовлетворяла соотношениям *согласованности* на классе $\mathfrak{C}$ множеств конфигураций, которые образует так называемую c-систему (по этому поводу см. [5]). Такой класс $\mathfrak{C}$ состоит из всех множеств $\mathcal{A}[X] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y]$ конфигураций с $X \cup Y \subset V$, $|X \cup Y| < \infty$, где $\bar{\mathcal{A}}[Y] = \{W \subset V : Y \cap W = \varnothing\}$.

Теорема 3. *Класс $\mathfrak{C}$ образует c-систему.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\mathcal{A}[X] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y] = \varnothing$, если $X \cap Y \neq \varnothing$. Согласно определению c-системы (см. [5]) пересечение каждой пары ее элементов и дополнение до $\mathcal{W}$ каждого ее элемента должны быть представимы в виде дизъюнктивных объединений конечных наборов элементов этой же системы. Для того чтобы имело место включение $W \in \mathcal{A}[X] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y]$, необходимо и достаточно, чтобы $X \subset W$ и $W \cap Y = \varnothing$.

Пересечение двух элементов c-системы имеет вид

$$\Big(\mathcal{A}[X] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y]\Big) \cap \Big(\mathcal{A}[X'] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y']\Big) = \mathcal{A}[X \cup X'] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y \cup Y']. \tag{1}$$

Далее, заметим, что

$$\complement\Big(\mathcal{A}[X] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y]\Big) = \big\{W \subset V : X \not\subset W\big\} \cup \big\{W \subset V : W \cap Y \neq \varnothing\big\}.$$

Расклассифицируем все конфигурации W, входящие в это множество, согласно набору пар $\langle X', Y' \rangle$, в которых $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, где $X' = X \cap \complement W$, $Y' = Y \cap W$ и $X' \cup Y' \neq \varnothing$, так как по крайней мере один набор из этой пары не пуст. Тогда каждой конфигурации W соответствует одна и только одна пара $\langle X', Y' \rangle$. При такой классификации справедливо разложение по элементам класса $\mathfrak{C}$:

$$\begin{aligned}\big\{W \subset V : W \not\subset X\big\} \cup \big\{W \cap Y \neq \varnothing\big\} &= \\ = \bigcup_{\substack{X' \subset X,\ Y' \subset Y:\\ X' \cup Y' \neq \varnothing}} \Big\{W \subset V : X' \cup (Y \setminus Y') \subset \complement W,\ Y' \cup (X \setminus X') \subset W\Big\} &= \\ = \bigcup_{\substack{X' \subset X,\ Y' \subset Y:\\ X' \cup Y' \neq \varnothing}} \mathcal{A}\big[Y' \cup (X \setminus X')\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[X' \cup (Y \setminus Y')\big],\end{aligned} \tag{2}$$

которое является дизъюнктивным, так как для каждых двух различных пар $\langle X'_j, Y'_j \rangle$, $X'_j \subset X$, $Y'_j \subset Y_j$, удовлетворяющих условию $X'_j \cup Y'_j \neq \varnothing$, $j \in \{1, 2\}$, с учетом (1), имеем

$$\begin{aligned}\Big[\mathcal{A}\big[Y'_1 \cup (X \setminus X'_1)\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[X'_1 \cup (Y \setminus Y'_1)\big]\Big] \cap \Big[\mathcal{A}\big[Y'_2 \cup (X \setminus X'_2)\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[X'_2 \cup (Y \setminus Y'_2)\big]\Big] &= \\ = \mathcal{A}\big[(Y'_1 \cup Y'_2) \cup (X \setminus (X'_1 \cap X'_2))\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[(X'_1 \cup X'_2) \cup (Y \setminus (Y'_1 \cap Y'_2))\big] &= \varnothing,\end{aligned}$$

где

$$\Big((Y'_1 \cup Y'_2) \cup \big(X \setminus (X'_1 \cap X'_2)\big)\Big) \cap \Big((X'_1 \cup X'_2) \cup \big(Y \setminus (Y'_1 \cap Y'_2)\big)\Big) \neq \varnothing,$$

если $X'_1 \neq X'_2$ либо $Y'_1 \neq Y'_2$. □

Следствие 1. *Аддитивная мера P, заданная на классе множеств $\mathfrak{C}$ конфигураций, продолжается однозначным образом на порождаемую им минимальную σ-алгебру. Для задания меры $\mathsf{P}(\cdot) = \Pr\{\cdot\}$ на классе $\mathfrak{C}$ необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям*

$$\Pr\Big\{\Big(\mathcal{A}[X] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y]\Big) \cap \Big(\mathcal{A}[X'] \cap \bar{\mathcal{A}}[Y']\Big)\Big\} = \Pr\Big\{\mathcal{A}\big[X \cup X'\big] \cap \bar{\mathcal{A}}\big[Y \cup Y'\big]\Big\}, \tag{3}$$

$$\sum_{X'\subset X, Y'\subset Y} \Pr\Big\{\mathcal{A}\big[Y'\cup(X\setminus X')\big]\cap\bar{\mathcal{A}}\big[X'\cup(Y\setminus Y')\big]\Big\} = 1. \tag{4}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из результатов [26]. Равенство (3) следует из (1), а условие (4) — из (2) и требования аддитивности меры P. □

Равенства (3), (4) называем *условиями согласованности* при задании меры P на классе $\mathfrak{C}$.

В общем случае определение меры на бесконечных графах является математической проблемой. Примеры ее постановки и решения демонстрируются в статистической механике решеточных моделей (см. [24]) и конструктивной квантовой теории поля (см. [25]), в рамках которых приходится устанавливать существование так называемого *термодинамического предела* распределений вероятностей для гиббсовских случайных полей. Мы не будем здесь обсуждать эту проблему в общем случае, а ограничимся только определением меры P в случае *однородного бернуллиевского случайного поля* $\{\tilde{n}(x); x\in V\}$ на произвольном бесконечном графе. Это связано с тем, что практически все полученные к настоящему времени результаты в дискретной теории перколяции связаны именно с мерой P такого типа. Здесь и далее знак тильда указывает на то, что отмеченный математический объект является случайным.

Определение 2. Случайное дихотомическое поле $\{\tilde{n}(x); x\in V\}$, определяемое на не более чем счетном множестве V на основе набора вероятностей

$$p(X)\equiv \Pr\{\mathcal{A}[X]\} = c^{|X|},\quad X\subset V,$$

при фиксированном значении $c\in[0,1]$, называется однородным бернуллиевским полем.

Таким образом, однородное бернуллиевское поле полностью определяется значением вероятности $\Pr\{\tilde{n}(x)=1\}=c$. Параметр $c\in[0,1]$ — вероятность заполнения фиксированной вершины — называем *концентрацией*. При этом $\mathsf{E}\tilde{n}(x)=c$, $x\in V_\Gamma$.

Теорема 4. *Для любого не более чем счетного множества V набор функций $p(X)$, $n\in\mathbb{N}$, определяет меру каждого из измеримых множеств $\mathcal{A}$ конфигураций $W\subset V$.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнимость (3) и (4). Так как при $X\cap Y=\varnothing$, $X'\cap Y'=\varnothing$ имеем

$$\mathsf{P}(\mathcal{A}[X]\cap\bar{\mathcal{A}}[Y]) = c^{|X|}(1-c)^{|Y|},\quad \mathsf{P}(\mathcal{A}[X']\cap\bar{\mathcal{A}}[Y']) = c^{|X'|}(1-c)^{|Y'|},$$

то условие (3) выполняется очевидным образом. При $X\cap X' = Y\cap Y'=\varnothing$ имеем

$$\mathsf{P}\Big(\big(\mathcal{A}[X]\cap\bar{\mathcal{A}}[Y]\big)\cap\big(\mathcal{A}[X']\cap\bar{\mathcal{A}}[Y']\big)\Big) = c^{|X|+|X'|}(1-c)^{|Y|+|Y'|}.$$

Условие (4) получается с учетом дизъюнктивности разложения (2):

$$\Pr\Bigg\{\bigcup_{\substack{X'\subset X,\\ Y'\subset Y}}\mathcal{A}\big[Y'\cup(X\setminus X')\big]\cap\bar{\mathcal{A}}\big[X'\cup(Y\setminus Y')\big]\Bigg\} =$$
$$= \sum_{\substack{X'\subset X,\\ Y'\subset Y}}\Pr\Big\{\mathcal{A}\big[Y'\cup(X\setminus X')\big]\cap\bar{\mathcal{A}}\big[X'\cup(Y\setminus Y')\big]\Big\} =$$
$$= \Bigg(\sum_{X'\subset X} c^{|X\setminus X'|}(1-c)^{|X'|}\Bigg)\Bigg(\sum_{Y'\subset Y} c^{|Y'|}(1-c)^{|Y\setminus Y'|}\Bigg) = 1. \quad \square$$

3. Ветвящиеся случайные процессы с дискретным временем. Циклом на графе Γ называется конечная последовательность $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n = x_0\rangle$, в которой $x_{j-1}\varphi x_j$, $j=1,\ldots,n$.

Определение 3. Связный граф Γ, не имеющий циклов, называется древесным.

Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ — древесный граф, у которого имеется отмеченная вершина (с меткой $\mathbf{0}$), которую будем считать *начальной.* Ввиду отсутствия циклов любой путь с началом в этой вершине является несамопересекающимся. По этой причине для любой вершины $x \in V$ существует единственный путь, связывающий ее с вершиной $\mathbf{0}$; длина этого пути равна $\mathrm{dist}(\mathbf{0}, x)$. Можно так ввести бесконечный дизъюнктивный набор конфигураций S_m, $m \in \mathbb{N}$, вершин, что $S_m = \{x \in V : \mathrm{dist}(\mathbf{0}, x) = m\}$. Очевидно, $V = \{\mathbf{0}\} \cup \bigcup\limits_m S_m$. Конфигурации S_m будем называть *поколениями. Индексом ветвления* любой вершины $x \neq \mathbf{0}$ для такого графа будем называть ее степень, уменьшенную на единицу.

Теорема 5. *Каждая вершина у древесного графа из S_m смежна с какой-либо одной вершиной $x \in S_{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, $S_0 = \{\mathbf{0}\}$.*

Доказательство. Утверждение следует из существования единственного пути в вершину x из вершины $\mathbf{0}$. Такой путь на $(m-1)$-м шаге должен пройти через некоторую вершину $y \in S_{m-1}$. $\square$

Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ — бесконечный локально компактный древесный граф с начальной вершиной $\mathbf{0}$. В этом случае индексы ветвления всех вершин конечны и все наборы S_m, $m \in \mathbb{N}$, также конечны. Бесконечный граф такого типа будем называть *однородным* (деревом Кэйли), если индекс ветвления у всех вершин $x \neq \mathbf{0}$ одинаков и равен степени нулевой вершины. Каждая вершина $x \in S_m$ из дерева Кэйли с индексом ветвления n смежна ровно с n вершинами $y \in S_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}_+$, $S_0 = \{\mathbf{0}\}$.

В этом разделе рассмотрим задачу теории перколяции из вершины $\mathbf{0}$ на однородном древесном графе Γ при заданном бернуллиевском случайном поле $\tilde{n}(x)$, $x \in \Gamma$.

Введем в рассмотрение марковские цепи $\langle \tilde{X}_m \subset S_m;\ m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ со значениями в виде конечных *случайных наборов* вершин из S_m, т.е. эти случайные последовательности обладают изменяющимся *пространством S_m, $m \in \mathbb{N}_+$ состояний.* Будем называть их *марковскими цепями с ветвлением.*

Идентифицируем каждую вершину графа Γ рассматриваемого типа посредством системы меток, которую построим индукцией по номеру m поколения S_m, содержащего рассматриваемую вершину. Пусть индекс ветвления графа Γ равен n. Если $x \in S_m$, $m \in \mathbb{N}$, то эта вершина представляется взаимно однозначным образом последовательностью $\langle j_1, j_2, \ldots, j_m \rangle$, где $j_k \in I_n$, $k \in I_m$. При $m = 1$ поставим в соответствие каждой вершине $x \in S_1$, $x\varphi\mathbf{0}$ однокомпонентную последовательность $\langle j_1 \rangle$, $j_1 \in I_n$. Пусть всем вершинам из $\bigcup\limits_{k=1}^{m} S_k$ поставлены в соответствие метки $\langle j_1, j_1, \ldots, j_k \rangle$. Зафиксируем одну из таких вершин в наборе S_m. Она имеет индекс ветвления n. Это означает, что она смежна с n вершинами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $x\varphi y_k$, $k \in I_n$, из набора S_{m+1}, так как расстояние от каждой из этих вершин до $\mathbf{0}$ на единицу больше, чем расстояние от вершины x. Присвоим этим вершинам метки $\langle j_1, j_1, \ldots, j_m, j_{m+1} \rangle$. Таким образом, мы пометили все вершины из S_{m+1}, ввиду произвольности выбранной вершины $x \in S_m$ и того факта, что каждая из вершин в S_{m+1} смежна с какой-либо вершиной из S_m.

Введем на пространствах S_m состояний цепи инъекцию $\mathsf{T} : 2^{S_m} \mapsto 2^{S_{m-1}}$ сужения, которая действует в каждом из наборов S_m, переводя каждую вершину $\langle j_1, j_1, \ldots, j_m \rangle$ в вершину $\langle j_1, j_1, \ldots, j_{m-1} \rangle$, где $S_0 = \{\mathbf{0}\}$. При этом считаем, что $\mathsf{T}\varnothing = \varnothing$.

Любая марковская цепь полностью определяется распределением вероятностей $P_0(A)$ в начальном состоянии A и условной вероятностью перехода

$$P^{(m)}(A, A') = \Pr\left\{ \tilde{X}_m = A \in S_m \;\middle|\; \tilde{X}'_{m-1} = A' \in S_{m-1} \right\}$$

за один шаг ее эволюции. В нашем случае $A \subset S_0 = \{\mathbf{0}\}$, т.е. $A = \{\mathbf{0}\}$ с вероятностью 1. Тогда распределение вероятностей в любой момент $m \in \mathbb{N}$ определяется на основе уравнения марковской цепи

$$P_m(A) = \sum_{A' \subset S_{m-1}} P^{(m)}(A, A') P_{m-1}(A'), \quad A \in S_m.$$

Для конструируемой марковской цепи с ветвлением условная вероятность $P^{(m)}(A,A')$ такова, что $\mathsf{T}\tilde{X}_m \subset \tilde{X}'_{m-1}$ с вероятностью 1, т.е. уравнение принимает вид

$$P_m(A) = \sum_{A'\subset S_{m-1}:\mathsf{T}A\subset A'} P^{(m)}(A,A')P_{m-1}(A'), \quad A\subset S_m.$$

Заметим, что в случае $\mathsf{T}A = A'$ набор $A\subset S_m$ представим в виде дизъюнктивного разложения

$$A = \bigcup_{x\in A'} A_x, \quad \mathsf{T}A_x = \{x\}, \quad |A_x| \leqslant n,$$

т.е. в A_x входят такие вершины y из набора S_m, для каждой из которых существует такое $j\in I_n$, что $y=\langle x,j\rangle$. Отсюда следует, что $|A| = \sum_{x\in\mathsf{T}A} |A_x|$.

Будем говорить, что марковская цепь с ветвлением обладает *марковским измельчением* (см. [5]), если

$$P^{(m)}(A,A') = \prod_{x\in A'} p(A_x), \tag{5}$$

где $p(A) = \Pr\{\tilde{X} = A\}$, $A\subset S_1$ — распределение вероятностей на 2^{S_1}, $S_1 = I_n$.

Введем производящую функцию случайной величины $\tilde{n}_m = |\tilde{X}_m|$,

$$F_m(\zeta) = \sum_{A\subset S_m} \zeta^{|A|} P_m(A),$$

и положим

$$G(\zeta) \equiv F_1(\zeta) = \sum_{A\subset I_n} \zeta^{|A|} P_1(A).$$

Теорема 6. *Производящая функция $F_m(\zeta)$ удовлетворяет функционально-разностному уравнению*

$$F_{m+1}(\zeta) = F_m(G(\zeta)), \quad m\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{6}$$

При этом $F_0(\zeta) = \zeta$.

Доказательство. Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
F_{m+1}(\zeta) &= \sum_{A\subset S_{m+1}} \zeta^{|A|} P_{m+1}(A) = \sum_{A\subset S_{m+1}} \zeta^{|A|} \sum_{\substack{A'\subset S_m:\\ \mathsf{T}A\subset A'}} P_m(A') \prod_{x\in A'} p(A_x) = \\
&= \sum_{A'\subset S_m} P_m(A') \sum_{\substack{A\subset S_{m+1}:\\ \mathsf{T}A\subset A'}} \left(\prod_{x\in\mathsf{T}A} \zeta^{|A_x|} p(A_x)\right) p_0^{|A'\setminus\mathsf{T}A|} = \\
&= \sum_{A'\subset S_m} P_m(A') \sum_{B\subset A'} \sum_{\langle\varnothing\ne A_x\subset I_n; x\in B\rangle} \left(\prod_{x\in B} \zeta^{|A_x|} p(A_x)\right) p_0^{|A'\setminus B|} = \\
&= \sum_{A'\subset S_m} P_m(A') \sum_{B\subset A'} \left(\prod_{x\in B} \sum_{\varnothing\ne A_x\subset I_n} \zeta^{|A_x|} p(A_x)\right) p_0^{|A'\setminus B|} = \\
&= \sum_{A'\subset S_m} P_m(A') \sum_{B\subset A'} \bigl(G(\zeta) - p_0\bigr)^{|B|} p_0^{|A'\setminus B|} = \\
&= \sum_{A'\subset S_m} P_m(A) \bigl[G(\zeta)\bigr]^{|A'|} = F_m(G(\zeta)),
\end{aligned}$$

где $p_0 = p(\varnothing)$; здесь использована связь $\sum_{x\in A'} |A_x| = |A|$. □

Заметим, что, в отличие от рассмотренных в [11] ветвящихся случайных процессов с неразличимыми частицами, мы ввели более обширный класс случайных процессов с дискретным временем, которые назвали марковскими цепями с марковским измельчением.

В теории случайных ветвящихся марковских процессов имеется так называемый *надкритический режим*, наличие которого полностью определяется распределением $p(\cdot)$ на S_1 и при реализации которого выполняется соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \Pr\left\{\tilde{n}_m > 0\right\} > 0,$$

вместе с утверждением о существовании предела. Так как

$$\Pr\{\tilde{n}_m > 0\} = \sum_{\varnothing\neq A\subset S_m} P_m(A) = 1 - P_m(\varnothing) = 1 - F_m(0),$$

то наличие надкритического режима означает, что предел $q = \lim\limits_{m\to\infty} F_m(0)$ существует и он меньше 1. Если этот предел равен 1, то траектория случайного процесса с вероятностью 1 обрывается ($\tilde{n}_m = 0$ начиная с какого-то номера). Если же предел q существует, но меньше 1, то траектория случайного процесса обрывается с вероятностью q, а с вероятностью $1-q$ уходит на бесконечность.

Для установления критерия наличия надкритического режима у введенных случайных процессов заметим, что производящая функция $G(\xi)$ является полиномом, неотрицательным, возрастающим и выпуклым при $\xi \in [0,1]$ и удовлетворяющим условию $G(1) = 1$.

Лемма 1. *Пусть $G(\xi)$ — производящая функция распределения вероятностей $p(\cdot)$ на $2^{I_n} = S_1$. Возможны следующие случаи.*

1. *Если $G(0) = 0$, то уравнение $G(\xi) = \xi$ имеет два решения $\xi = 0$ и $\xi = 1$.*
2. *Если $G(0) > 0$, то это уравнение имеет не более двух решений, причем*
   (a) *если $G'(1) \leqslant 1$, то имеется единственное решение $\xi = 1$;*
   (b) *если $G'(1) > 1$, то существуют два решения, из которых одно $\xi = 1$, а второе — $\xi_* = q < 1$.*

Доказательство. Так как функция выпукла, то уравнение имеет не более двух решений. В силу условия $G(1) = 1$ оно всегда имеет решение $\xi = 1$. Кроме того, в случае $G(0) = 0$ имеется второе решение $\xi = 0$. Если же реализуется условие (2a), то вся кривая $\eta = G(\xi)$ на плоскости $\langle \xi, \eta\rangle$ находится над прямой $\eta = \xi$ при $\xi \in [0,1]$. Если бы она пересекалась с этой прямой в точке $\xi_* < 1$, то она более не пересекала бы эту прямую при $\xi \in (\xi_*, 1)$ в силу выпуклости. Это противоречит равенству $G(1) = 1$. Напротив, если реализуется условие (2b), то кривая $\eta = G(\xi)$ обязана пересечь прямую $\eta = \xi$ на интервале $(0,1)$, так как в противном случае в точке ее пересечения $\xi = 1$ должно выполняться неравенство $G'(1) \leqslant 1$. □

Таким образом, пограничное (критическое) положение занимают распределения $p(\cdot)$, подчиненные условию

$$\sum_{A\subset I_n} |A| p(A) = 1.$$

Лемма 2. *Если производящая функция $G(\xi)$ удовлетворяет условию $G(0) = 0$, то для любого $\xi \in (0,1)$ последовательность $\langle G^{(n)}(\xi);\ n \in \mathbb{N}\rangle$, $G^{(n+1)}(\xi) = G(G^{(n)}(\xi))$, $G^{(1)}(\xi) = G(\xi)$ стремится к 0 при $n \to \infty$. В случае $G'(1) \leqslant 1$ эта последовательность стремится к 1, а в случае $G'(1) > 1$ она стремится к единственному решению ξ_* уравнения $G(\xi) = \xi$ в интервале $(0,1)$.*

Доказательство. В случае $G(0) = 0$, так как кривая $\eta = G(\xi)$, согласно лемме 1, находится под прямой $\eta = \xi$ при $\xi \in (0,1)$, то $G(\xi) < \xi$ и последовательность $\xi_n = G^{(n)}(\xi)$ является убывающей. Следовательно, она имеет предел и по причине убывания ее предел равен 0. В случае $G'(1) \leqslant 1$, согласно той же лемме, кривая $\eta = G(\xi)$ находится над прямой при $\xi \in (0,1)$, $G(\xi) > \xi$, и поэтому последовательность возрастает, ее предел существует и не может быть меньше 1. Наконец, в случае $G'(1) > 1$ она убывает при $\xi > \xi_*$ и возрастает при $\xi < \xi_*$. Отсюда вытекает утверждение леммы. □

Теорема 7. *Надкритический режим существует тогда и только тогда, когда распределение вероятностей $p(\cdot)$ либо удовлетворяет условию $p(\varnothing) = 0$, либо $p(\varnothing) > 0$, но*

$$\sum_{A \subset I_n} |A| p(A) > 1.$$

В последнем случае вероятность его реализации равна $1 - q$, где q — единственное отличное от 1 решение уравнения

$$q = \sum_{A \subset I_n} q^{|A|} p(A). \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $G(0) = 0$. В этом случае, согласно (6), имеет место равенство $F_{m+1}(0) = F_m(G(0)) = F_m(0)$. Применяя индукцию по $m \in \mathbb{N}$, получаем

$$\lim_{m \to \infty} F_m(0) = F_0(0) = 0.$$

Это означает, что траектория процесса с вероятностью 1 уходит на бесконечность. Следовательно, надкритический режим реализуется с той же вероятностью.

Пусть теперь $1 > G(0) > 0$. Согласно (6), применяя индукцию по $m \in \mathbb{N}$, получаем, что

$$F_m(0) = F_{m-1}(G(0)) = \dots = G^{(m)}(0).$$

Отсюда, согласно лемме 2, при $G'(1) \leqslant 1$, предел $\lim\limits_{m \to \infty} F_m(0)$ существует и равен 1, т.е. надкритический режим отсутствует. Если же $G'(1) > 1$, то предел $\lim\limits_{m \to \infty} F_m(0) = q \in (0, 1)$ также существует и — ввиду непрерывности функции G — удовлетворяет условию

$$q = \lim_{m \to \infty} G^{(m)}(0) = G\Bigl(\lim_{m \to \infty} G^{(m-1)}(0)\Bigr) = G(q),$$

т.е. является единственным решением уравнения (7) в интервале $(0, 1)$. □

Рассмотрим теперь задачу о перколяции из вершины $\mathbf{0}$ однородного древесного графа Γ при условии, что на множестве V вершин графа задано случайное однородное бернуллиеское поле $\{\tilde{n}(x);\ x \in V\}$, определяемое концентрацией $c \in (0, 1)$. Каждая случайная реализация $\tilde{n}(x)$, $x \in V$, индуцирует на основе конфигурации $W = \{x : \tilde{n}(x) = 1\}$ отношение смежности $\tilde{\varphi}_W$ и, следовательно, случайный граф $\langle W, \tilde{\varphi}_W \rangle$. Для этого графа условная вероятность того, что вершина x из фиксированного поколения исходного графа Γ, при условии ее связанности с $\mathbf{0}$, связана также с вершинами из следующего поколения, имеющими метки $\langle x, j \rangle$, $j \in A \subset I_n$, равна $p(A) = c^{|A|}(1 - c)^{n - |A|}$. Перколяция на таком случайном графе, т.е. существование на нем бесконечной траектории $\gamma(\mathbf{0})$, означает, что у сконструированного в этом разделе случайного марковского ветвящегося процесса с дискретным временем существует надкритический режим. С этой точки зрения следствием теоремы 7 является следующее утверждение.

Теорема 8. *Перколяция из вершины $\mathbf{0}$ на однородном древесном графе существует при $c \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда $c > c_*$, где c_* — так называемый порог перколяции, который определяется как единственное решение $c_* \in (0, 1)$ уравнения*

$$\sum_{A \subset I_n} |A| p(A) = 1, \quad p(A) = c^{|A|}(1 - c)^{n - |A|}. \tag{8}$$

При этом вероятность $P(c)$ ее реализации при $c > c_*$ равна $(1 - Q(c))$, где $Q(c)$ — вероятность отсутствия перколяции, которая является единственным отличным от единицы решением уравнения

$$Q(c) = \sum_{A \subset I_n} Q^{|A|}(c) p(A) = \bigl(1 - c + cQ\bigr)^n.$$

Таким образом, задача о перколяции из вершины $\mathbf{0}$ сводится к отысканию условия на параметр c, при котором алгебраическое уравнение (8) для функции $Q(c)$ имеет решение, не равное тождественно единице.

4. Иерархические модели. Пусть $\Gamma_0 = \langle V_0, \varphi_0 \rangle$ — конечный связный граф с отмеченной вершиной $\mathbf{0}$. Пусть в множестве V_0 зафиксирован набор $A^{(0)}$, не содержащий нулевую вершину. Этот набор будем называть *внешней границей* графа Γ_0, а пару $\langle \Gamma_0, A^{(0)} \rangle$ — *оснащенным графом.*

Сконструируем бесконечный локально компактный *иерархический граф* Γ, порождаемый оснащенным графом $\langle \Gamma_0, A^{(0)} \rangle$. С этой целью прежде всего определим операцию *склеивания* пары графов по выделенной вершине.

Пусть $\Gamma'(x') = \langle V', \varphi' \rangle$ и $\Gamma''(x'') = \langle V'', \varphi'' \rangle$ — пара графов с отмеченными в них вершинами x' и x'', соответственно. Определим граф $\Gamma'(x') * \Gamma''(x'')$, набор вершин которого представляется множеством $V' \cup (V'' \setminus \{x''\})$, а набор Φ смежных пар, определяющих отношение смежности, образуется из наборов Φ' и Φ'' пар смежности в графах $\Gamma'(x')$ и $\Gamma''(x'')$ с учетом переобозначения вершины x'' на x', по которой происходит склеивание, $\left(\bar{\Phi}' \cup \bar{\Phi}'' \right)_{x''=x'}$.

Определим рекуррентно, посредством применения операции склеивания, графы $\Gamma^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}_+$. Пусть имеется бесконечный набор $\mathfrak{G}$ графов, изоморфных графу $\langle \Gamma_0, A^{(0)} \rangle$ с точки зрения отношения связности. Занумеруем вершины из $A^{(0)}$ графа Γ_0, которые будем называть вершинами первого поколения, присвоив им метки $\langle j_1 \rangle$, $j_1 = 1, \ldots, n$.

На первом шаге выберем n графов из набора $\mathfrak{G}$ с нулевыми вершинами $\mathbf{0}_{j_1}$. Эти графы обозначим Γ_{0,j_1}, $j_1 = 1, \ldots, n$, а наборы их граничных вершин обозначим, соответственно, A_{j_1}, $j_1 = 1, \ldots, n$. Построим на их основе граф $\Gamma^{(1)} = \langle V^{(1)}, \varphi^{(1)} \rangle$ последовательными приклеиваниями выбранных графов. Сначала приклеим к граничной вершине $x_1 = \langle 1 \rangle$ графа Γ_0 вершину $\mathbf{0}_1$ графа $\Gamma_{0,1}$, т.е. образуем граф $\Gamma_0(\langle 1 \rangle) * \Gamma_{0,1}(\mathbf{0}_1)$ так, что после склеивания у вершины x_1 осталось прежнее обозначение $x_1 = \langle 1 \rangle$. Затем выберем в наборе $A^{(0)}$ граничных вершин графа Γ_0, для следующей склейки его с вершиной $\mathbf{0}_2$ графа $\Gamma_{0,2}$, вершину $x_2 = \langle 2 \rangle$. Образовав склейку $[\Gamma_0(\langle 1 \rangle) * \Gamma_{0,1}(\mathbf{0}_1)](\langle 2 \rangle) * \Gamma_{0,2}(\mathbf{0}_2)$ так, что у вершины склейки осталось обозначение $\langle 2 \rangle$, выберем в Γ_0 следующую вершину $x_3 = \langle 3 \rangle$ для последующей склейки и проделаем такую же операцию. Поступая далее таким же образом, последовательно получим графы

$$\underbrace{\Big[\ldots \Big[}_{m-1} \Gamma_0(\langle 1 \rangle) * \Gamma_{0,1}(\mathbf{0}_1) \underbrace{\Big](\langle 2 \rangle) * \cdots * \Gamma_{0,m-1}(\mathbf{0}_{m-1}) \Big]}_{m-1}(\langle m \rangle) * \Gamma_{0,m}(\mathbf{0}_m), \quad m = 1, \ldots, n.$$

Тогда на последнем шаге построения получим граф $\Gamma^{(1)} = \langle V^{(1)}, \varphi^{(1)} \rangle$, имеющий $((n+1)|V| - n)$ вершин и набор граничных вершин $A^{(1)} = \bigcup\limits_{j_1=1}^{n} A_{j_1}$ второго поколения с n^2 элементами. Этим элементам присвоим метки $\langle j_1, j_2 \rangle$ так, что каждая метка $\langle j_1, j_2 \rangle$ с $j_2 = 1, \ldots, n$ принадлежит A_{j_1}.

Заменив в описанным выше построении граф Γ_0 на граф $\Gamma^{(1)}$, а набор $A^{(0)}$ его граничных вершин на набор $A^{(1)}$, проделаем по отношению к нему снова такую же процедуру приклеиваний n^2 изоморфных друг другу графов Γ_{0,j_1,j_2} из набора $\mathfrak{G}$, которые следуют в этом наборе вслед за выбранными на предыдущем шаге. Каждый из них обладает набором граничных вершин A_{j_1,j_2} и нулевой вершиной $\mathbf{0}_{j_1,j_2}$. В результате посредством приклеиваний выбранных графов к графу $\Gamma^{(1)}$ получим новый граф $\Gamma^{(2)} = \langle V^{(2)}, \varphi^{(2)} \rangle$, который имеет $((n+1)((n+1)|V| - n) - n)$ вершин. Среди них имеется набор $A^{(2)} = \bigcup\limits_{j_2=1}^{n} A_{j_1,j_2}$, состоящий из n^3 граничных вершин третьего поколения. Поступая таким же образом далее, последовательно построим последовательность графов $\Gamma^{(l)} = \langle V^{(l)}, \varphi^{(l)} \rangle$, $l \in \mathbb{N}$ с наборами $A^{(l)} = \bigcup\limits_{j_l=1}^{n} A_{j_1,j_2,\ldots,j_l}$ граничных вершин l-го поколения. Число таких вершин у каждого графа $\Gamma^{(l)}$ равно n^l.

Определение 4. Бесконечный граф $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$, соответствующий конечному графу Γ_0, который является теоретико-множественным пределом $\Gamma^{(l)} \to \Gamma$ при $l \to \infty$ с набором $V = \lim\limits_{l \to \infty} V^{(l)}$ вершин и отношением смежности $\varphi = \lim\limits_{l \to \infty} \varphi^{(l)}$, назовем *иерархическим графом, порождаемым графом* $\Gamma_0 = \langle V_0, \varphi_0 \rangle$.

Очевидно, иерархический граф $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ локально компактен, так как он порождается склеиванием локально компактных конечных связных графов из набора $\mathfrak{G}$, причем на каждом этапе приклеивается только лишь конечный набор графов, каждый раз с новыми вершинами склейки. Порождаемый таким образом иерархический граф обладает выделенной вершиной $\mathbf{0}$. Вершины иерархического графа Γ, помеченные в результате его построения всеми метками $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$, $m \in \mathbb{N}$, являются его *вершинами сочленения* между *блоками* $\Gamma_{j_1,\dots,j_m}$, которые образуются в процессе его построения посредством склеивания конечных графов $\Gamma_{0,j_1,\dots,j_m}$. Это означает, что любой путь, соединяющий вершины из блоков $\Gamma_{j_1,\dots,j_m}$ и $\Gamma_{j_1,\dots,j_m,j_{m+1}}$, обязательно пройдет через вершину $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$.

Пусть на иерархическом графе Γ определено однородное бернуллиевское поле $\{\tilde{n}(x);\ x \in V\}$ с параметром $c \in (0,1)$. Для такого графа определено случайное событие

$$\mathfrak{A}_\infty = \Big\{ W \subset V:\ \exists(\gamma(\mathbf{0}):\ \{\gamma(\mathbf{0})\} \subset W,\ |\gamma(\mathbf{0})| = \infty) \Big\}$$

наличия перколяции из вершины $\mathbf{0}$. Таким образом, определена *иерархическая перколяционная модель* $\Upsilon(\Gamma_0, A^{(0)}))$. Такие иерархические перколяционные модели могут обладать свойством, которое позволяет строить на их основе аппроксимации решений задач перколяции для бесконечных локально компактных графов довольно общего вида.

Обозначим через $\mathfrak{A}_m(B)$, $B \subset S_m$, случайное событие, состоящее в том, что для любой вершины из B существует путь из $\mathbf{0}$ с конечной вершиной в B, а для любой вершины из $S_m \setminus B$ такой путь отсутствует. Тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любого набора $B \subset S_m$, удовлетворяющего условию $\{x\} = \mathsf{T}B \neq \varnothing$ при $x \in S_{m-1}$, условная вероятность события $\mathfrak{A}_m\big(B\big)$ при условии $x \sim \mathbf{0}$ равна*

$$\Pr\big\{\mathfrak{A}_m(B) \,\big|\, x \sim \mathbf{0}\big\} = \Pr\big\{W \subset V^{(m)} : W \cap S_m = B\big\} = p(B).$$

Доказательство. Равенство следует из того, что, в силу независимости значений случайного поля $\tilde{n}(z)$, $z \in V$, появление любого пути $\tilde{\gamma}(x,y)$ на конфигурациях $W \subset V^{(m)}$, который связывает вершину x с вершинами $y \in B$, и отсутствие пути, который бы связывал вершину x с вершинами из $(V^{(m)})_x \setminus B$, $\mathsf{T}(V^{(m)})_x = \{x\}$, не зависит от части случайной реализации поля $\tilde{n}(z)$, $z \in V$ в вершинах $z \in V^{(m)} \setminus (V^{(m)})_x$. □

Пусть отношение $x \sim A$ означает, что вершина x связана с каждой вершиной из A. Следствием леммы 3 является следующее утверждение.

Лемма 4. *Для любых наборов $B \subset S_m$ и $B' \subset S_{m-1}$, $\mathsf{T}B \subset B'$ имеют место формулы*

$$\Pr\big\{\mathfrak{A}_m(B) \,\big|\, \mathfrak{A}_{m-1}(B')\big\} = p_0^{|B' \setminus \mathsf{T}B|} \Pr\big\{\mathfrak{A}_m(B) \,\big|\, \mathfrak{A}_{m-1}(\mathsf{T}B)\big\}, \tag{9}$$

$$\Pr\big\{\mathfrak{A}_m(B) \,\big|\, \mathfrak{A}_{m-1}(\mathsf{T}B)\big\} = \prod_{x \in \mathsf{T}B} p(B_x), \tag{10}$$

где $p_0 = \Pr\{W \subset I_n : \neg(\mathbf{0} \overset{W}{\sim} S_1)\}$ — вероятность отсутствия связи вершины $\mathbf{0}$ с множеством S_1, а $p(B_x) = \Pr\big\{W \subset I_n:\ \mathbf{0} \overset{W}{\sim} B_x,\ \neg(\mathbf{0} \overset{W}{\sim} S_1 \setminus B_x)\big\}$ — вероятности связанности вершины $\mathbf{0}$ с B_x и отсутствия у нее связи с $S_1 \setminus B_x$, $x \in \mathsf{T}B$.

Построим теперь марковскую цепь с ветвлением на бесконечном древесном однородном графе $\bar{\Gamma}$, которая обладает марковским измельчением, с подходящим распределением вероятностей $p(A)$, $A \subset 2^{I_n}$, $n = |A^{(0)}|$, для которой задача перколяции из начальной вершины эквивалентна задаче перколяции исходной перколяционной модели. Для этого выберем подходящим образом наборы S_m, $m \in \mathbb{N}$, для ее пространств состояний. Входящие в них вершины являются вершинами сочленения иерархического графа с метками $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$, $m \in \mathbb{N}$, $j_k \in I_n$, $k \in I_m$ с $n = |A^{(0)}|$. Условную вероятность перехода $P^{(m)}(A, A')$ определим формулой (5), в которой распределение вероятностей на 2^{I_n} вводится следующим образом.

Пусть $\mathfrak{A}(A) = \big\{W \subset V^{(0)}:\ \mathbf{0} \overset{W}{\sim} A,\ \neg(\mathbf{0} \overset{W}{\sim} I_n \setminus A)\big\}$ — классы конфигураций, которые являются дизъюнктивными для различных наборов $A \subset A^{(0)}$. Тогда $p(A) = \Pr\{\mathfrak{A}(A)\}$. При этом имеет место соотношение $\sum\limits_{A\subset I_n} p(A) = 1$. Новую перколяционную модель, определяемую ветвящейся марковской цепью с марковским измельчением, обозначим $\overline{\Upsilon}(\Gamma_0, A^{(0)})$. Пусть $\mathfrak{A}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})$ и $\overline{\mathfrak{A}}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})$ — случайные события наличия перколяции из вершины $\mathbf{0}$ для моделей $\Upsilon(\Gamma_0, A^{(0)})$ и $\overline{\Upsilon}(\Gamma_0, A^{(0)})$ соответственно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Для перколяционных моделей* $\Upsilon(\Gamma_0, A^{(0)})$ *и* $\overline{\Upsilon}(\Gamma_0, A^{(0)})$ *имеет место равенство*

$$\Pr\bigl\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})\bigr\} = \Pr\bigl\{\overline{\mathfrak{A}}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})\bigr\}.$$

Доказательство. Пусть Γ — бесконечный иерархический локально компактный граф с набором вершин сочленения $\langle j_1, \ldots, j_m\rangle$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда, согласно возрастанию номера поколения m, любой бесконечный путь $\gamma(\mathbf{0})$ из начальной вершины обязательно последовательно пройдет через вершины с метками $\langle j_1, \ldots, j_m\rangle$, $m \in \mathbb{N}$. Это означает, что для любого $m \in \mathbb{N}$ ограничению каждого пути $\gamma(\mathbf{0})$, входящего в случайное событие $\mathfrak{A}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})\}$ на граф $\Gamma^{(m)}$, однозначно соответствует путь $\gamma(\mathbf{0}, z)$, $z \in A^{(m)}$ длины m.

Пусть $\mathfrak{A}_m = \bigl\{\tilde{n}(x),\ x \in V :\ \exists(z \in S_m :\ \mathbf{0} \overset{\mathsf{W}[\tilde{n}]}{\sim} z)\bigr\}$ — случайное событие в перколяционной иерархической модели, при котором существует путь $\gamma(\mathbf{0})$ с конечной вершиной среди набора вершин сочленения S_m. Тогда

$$\mathfrak{A}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})\} = \lim_{m\to\infty} \mathfrak{A}_m.$$

Покажем, что мера события $\mathfrak{A}_m$ совпадает с мерой соответствующего события для марковской цепи.

Далее, пусть $F_m(\zeta)$ — введенная ранее производящая функции ветвящейся марковской цепи с марковским измельчением. Вычислим производящую функцию

$$\overline{F}_m(\zeta) = \sum_{\varnothing\neq B\subset S_m} \zeta^{|B|} \Pr\{\mathfrak{A}(B)\},$$

для которой имеет место равенство

$$F_m(\zeta) = \overline{F}_m(\zeta) + \Pr\bigl\{W \subset S_m : W = \varnothing\bigr\}.$$

Для этого применим формулу полной вероятности:

$$\Pr\{\mathfrak{A}_m(B)\} = \sum_{\substack{\varnothing\neq B'\subset S_{m-1}:\\ B'\supset \mathsf{T}B}} \Pr\bigl\{\mathfrak{A}_m(B)\,\big|\,\mathfrak{A}_{m-1}(B')\bigr\} \Pr\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\}.$$

Так как для любого непустого множества $B \subset S_m$ при $\mathsf{T}B_x = \{x\}$ справедливо такое дизъюнктивное разложение $B = \sum\limits_{x\in \mathsf{T}B} B_x$, что $\mathfrak{A}_m(B) = \bigcap\limits_{x\in\mathsf{T}B} \mathfrak{A}_m\bigl(B_x\bigr)$, то с учетом (9) и (10) находим

$$\begin{aligned}
\overline{F}_m(\zeta) &= \sum_{\varnothing\neq B\subset S_m} \zeta^{|B|} \Pr\{\mathfrak{A}_m(B)\} = \\
&= \sum_{\varnothing\neq B\subset S_m} \zeta^{|B|} \sum_{\substack{\varnothing\neq B'\subset S_{m-1}:\\ B'\supset \mathsf{T}B}} p_0^{|B'\setminus \mathsf{T}B|} \Pr\bigl\{\mathfrak{A}_m(B)\,\big|\,\mathfrak{A}_{m-1}(\mathsf{T}B)\bigr\} \Pr\bigl\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\bigr\} = \\
&= \sum_{\varnothing\neq B'\subset S_{m-1}} \Pr\bigl\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\bigr\} \sum_{\substack{\varnothing\neq B\subset S_m:\\ B'\supset \mathsf{T}B}} p_0^{|B'\setminus \mathsf{T}B|} \prod_{x\in\mathsf{T}B} \zeta^{|B_x|} p(B_x) = \\
&= \sum_{B'\subset S_{m-1}} \Pr\bigl\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\bigr\} \sum_{\varnothing\neq C\subset B'} p_0^{|B'\setminus C|} \prod_{x\in C} \sum_{\substack{\langle\varnothing\neq B_x;\\ x\in C\rangle}} \zeta^{|B_x|} p(B_x) = \\
&= \sum_{\varnothing\neq B'\subset S_{m-1}} \Pr\bigl\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\bigr\} \sum_{\varnothing\neq C\subset B'} p_0^{|B'\setminus C|} \Bigl(G(\zeta) - p_0\Bigr)^{|C|} =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\varnothing \neq B' \subset S_{m-1}} \Pr\left\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\right\}\left(G^{|B'|}(\zeta) - p_0^{|B'|}\right) =$$
$$= \overline{F}_{m-1}(\zeta) - \sum_{\varnothing \neq B' \subset S_{m-1}} \Pr\left\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\right\} p_0^{|B'|}.$$

Наконец, принимая во внимание равенство

$$\Pr\left\{W \subset S_m : W = \varnothing\right\} = \Pr\left\{W \subset S_{m-1} : W = \varnothing\right\} + \sum_{\varnothing \neq B' \subset S_{m-1}} \Pr\left\{\mathfrak{A}_{m-1}(B')\right\} p_0^{|B'|},$$

получаем $F_m(\zeta) = F_{m-1}\big(G(\zeta)\big)$. Ввиду совпадения уравнения для производящей функции $F_m(\zeta)$, связанной с иерархической перколяционной моделью, с производящей функцией соответствующей ей марковской цепи и совпадения их начальных состояний, находящихся с вероятностью 1 в вершине $\{\mathbf{0}\}$, согласно леммам 1 и 2, условия на положительность вероятности $\Pr\left\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma_0, A^{(0)})\right\}$ точно такие, как и для вероятности наличия перколяции марковской цепи. $\square$

5. Аппроксимации моделей перколяции на локально компактных графах. Пусть имеется связный бесконечный локально компактный граф $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$. Для произвольной конфигурации W вершин из Γ определим набор

$$\partial_+ W = \left\{x \notin W : \exists (y \in W : x \sim y)\right\},$$

который назовем его *внешней границей*. В частности, это определение распространяется на любой кластер $W(z)$, содержащий фиксированную вершину z. Точно так же введем набор

$$\partial_- W = \left\{x \in W : \exists (y \notin W : x \sim y)\right\},$$

который назовем *внутренней границей* конфигурации W; в частности, $\partial_- W(z)$ — внутренняя граница кластера $W(z)$.

Очевидно, что внутренняя граница конечного кластера на локально компактном графе представляет собой конечный набор вершин. По определению, каждая вершина внешней границы конечного кластера W смежна с какой-либо вершиной из W. Поэтому внешняя граница конечного кластера также является конечным набором. В противном случае в W нашлась бы вершина, которая смежна с бесконечным набором вершин из $\partial_+ W$.

Пусть W — конечный кластер в Γ. Вершину $z \in V \setminus W$ назовем внешней по отношению W, если существует бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(z)$ с начальной вершиной z, который не пересекает W, $\{\gamma(z)\} \cap W = \varnothing$. В противном случае вершину z назовем внутренней по отношению к W. Любой бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(z)$, начиняющийся во внутренней вершине z кластера W, обязательно пересекает его внутреннюю и внешнюю границы, так как такой путь на каком-либо шаге должен попасть в вершину вне W. Первая из таких вершин, по порядку из входящих в состав пути, как раз и будет вершиной внешней границы кластера W, а предшествующая ей — вершиной из внутренней границы.

Лемма 5. *Любой конечный кластер W в локально компактном графе может иметь лишь конечный набор внутренних вершин.*

Доказательство. Допустим противное, что в кластере W набор $\operatorname{Int} W$ его внутренних вершин бесконечен. Рассмотрим для каждой вершины $x \in \operatorname{Int} W$ соответствующее ей множество бесконечных несамопересекающихся путей. У каждого из этих путей имеется вершина u первого пересечения внешней границы $\partial_+ W$. Пусть $x \in \operatorname{Int} W$ и $g(x)$ — бесконечный несамопересекающийся путь. Его начальная часть $\gamma(x, u)$ состоит из внутренних вершин, кроме последней вершины u. Так как $|\partial_+ W| < \infty$ и $|\operatorname{Int} W| = \infty$, то среди всех вершин $u \in \partial_+ W$ найдется такая, для которой набор $X(u) = \{x \in \operatorname{Int} W : \gamma(x, u)\}$ бесконечен. Степень вершины u конечна. Среди всех вершин, смежных с вершиной u, найдутся такие, которые являются внутренними; они принадлежат $\partial_- W$. Выберем из них ту вершину v, через которую происходит бесконечное множество путей $\gamma(x, u)$, определяющих набор вершин $X(u)$.

При сделанном предположении о бесконечности множества $\operatorname{Int} W$ функционал $\mathsf{d}(u,x)$ не может быть ограниченным на $X(u)$, так как число всех путей ограниченной длины внутри кластера из вершины u ограниченной длины на локально компактном графе конечно, и поэтому число конечных вершин x внутри W тоже должно быть конечным. Тогда среди всех вершин из $X(u)$, пути $\gamma(x,u)$ которых проходят через вершину v, можно выделить последовательность $\langle x_k; k \in \mathbb{N}\rangle$, для которой $\mathsf{d}(u,x_k)$ монотонно возрастает. Следовательно, имеется бесконечный путь с началом в выбранной вершине v, полностью состоящий из внутренних вершин; это противоречит тому, что v — внутренняя по отношению к кластеру W. □

Кластер W назовем *полным*, если он не имеет внутренних вершин. Ввиду конечности набора внутренних вершин конечного кластера его всегда можно сделать полным, добавив к нему все его внутренние вершины, при этом оставляя пополненный кластер конечным. Появление новых внутренних вершин при такой операции пополнения невозможно.

Рассмотрим в локально компактном бесконечном графе $\Gamma = \langle V, \varphi\rangle$ конечный граф $\Gamma^{(0)} = \langle V^{(0)}, \varphi^{(0)}\rangle$, выбрав $V^{(0)} \subset V$, где $V^{(0)} = W \cup \partial_+ W$, W — конечный полный кластер, содержащий отмеченную вершину $\mathbf{0}$, а $\varphi^{(0)}$ — сужение φ на $V^{(0)}$. Предположим, что $A^{(0)} = \partial_+ W$ является набором его внешних граничных вершин. На основе графа $\Gamma^{(0)}$ построим иерархический граф $\bar\Gamma$, определяемый $\Gamma^{(0)}$ с набором граничных вершин $A^{(0)}$. Перколяционную модель, основанную на иерархическом графе $\bar\Gamma$, будем называть *аппроксимирующей*, если для любого значения концентрации $c \in (0,1)$ однородного бернуллиевского случайного поля $\tilde n(x)$, $x \in V$, $x \in \bar\Gamma$, имеет место неравенство $\Pr\left\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)\right\} \leqslant \Pr\left\{\mathfrak{A}_\infty(\bar\Gamma)\right\}$.

Далее, пусть $\langle W_m; m \in \mathbb{N}\rangle$ — бесконечная расширяющаяся последовательность полных кластеров на локально компактном графе Γ, содержащих отмеченную вершину $\mathbf{0}$ этого графа. На основе этой последовательности определим последовательность графов

$$\Big\langle \Gamma^{(0)}_m = \big\langle V^{(0,m)} = W_m \cup \partial_+ W_m,\ \varphi^{(0,m)}\big\rangle;\ m \in \mathbb{N}_+\Big\rangle,$$

где $\varphi^{(0,m)}$ — сужения отношения φ на $V^{(0,m)}$ с соответствующими им наборами $A^{(0,m)} = \partial_+ W_m$ граничных вершин, $m \in \mathbb{N}$. Определим последовательность иерархических графов $\bar\Gamma_m$, соответствующих графам $\Gamma^{(0)}_m$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть граф Γ допускает такой выбор последовательности $\langle W_m;\ m \in \mathbb{N}\rangle$, когда все графы $\bar\Gamma_m$ определяют иерархические модели $\overline{\Upsilon}(\Gamma^{(0)}_m, A^{(0,m)})$, являющиеся аппроксимирующими.

Докажем утверждение, которое позволяет решать задачу перколяции на бесконечном локально компактном графе Γ со сколь угодно большой точностью, если граф допускает построение описанной выше последовательности аппроксимирующих моделей.

Теорема 10. *Для последовательности $\Upsilon(\Gamma^{(0)}_m, A^{(0,m)})$, $m \in \mathbb{N}$, перколяционных моделей, аппроксимирующих бесконечный локально компактный граф Γ с отмеченной вершиной $\mathbf{0}$, соответствующая ей последовательность $\langle \bar P^{(m)}(c);\ m \in \mathbb{N}\rangle$ вероятностей перколяции однородного бернуллиевского случайного поля $\tilde n(x)$, $x \in V$, с концентрацией $c \in (0,1)$ на графах $\overline{\Gamma}_m = \langle V^{(m)}, \varphi^{(m)}\rangle$ стремится при $m \to \infty$ к вероятности перколяции $P(c)$ из вершины $\mathbf{0}$ на графе $\Gamma = \langle V, \varphi\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_d(\Gamma)$ — случайное событие, состоящее в том, что конфигурация W бернуллиевского поля $\{\tilde n(x); x \in V\}$ с концентрацией $c = \Pr\left\{\tilde n(x) = 1\right\} \in (0,1)$ содержит какой-либо несамопересекающийся путь $\gamma(\mathbf{0}, z)$ из отмеченной "вершины $\mathbf{0}$, имеющий длину d. Соответственно, $\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)$ — случайное событие, когда конфигурация W этого поля содержит какой-либо несамопересекающийся путь $\gamma(\mathbf{0})$ бесконечной длины. Так как любой бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(\mathbf{0})$ на бесконечном графе представим в виде склейки $\gamma(\mathbf{0}, z) * \gamma(z)$ несамопересекающихся путей $\gamma(\mathbf{0}, z)$ длины d и бесконечного пути $\gamma(z)$, то имеет место соотношение $\mathfrak{A}_\infty(\Gamma) \subset \mathfrak{A}_d(\Gamma)$, а событие $\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)$ является пределом событий $\mathfrak{A}_d(\Gamma)$, $d \to \infty$:

$$\lim_{d\to\infty} \mathfrak{A}_d(\Gamma) = \mathfrak{A}_\infty(\Gamma).$$

Поэтому

$$\Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)\} \leqslant \Pr\{\mathfrak{A}_d(\Gamma)\}, \quad \lim_{d\to\infty} \Pr\{\mathfrak{A}_d(\Gamma)\} = \Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)\}.$$

Далее, пусть $\Gamma_l^{(0)} = \langle V^{(0,l)}, \varphi^{(0,l)}\rangle$ — конечные графы с наборами $A^{(0,l)} = \{x_k^{(l)};\ 1,\ldots,n^{(l)}\}$ граничных вершин, $|A^{(0,l)}| = n^{(l)}$ таковы, что $V^{(l)} \subset V^{(l+1)}$. Они являются подграфами графа Γ, содержащими вершину $\mathbf{0}$ и порождаемые полными кластерами $W^{(l)} \ni \mathbf{0}$, так что

$$V^{(0,l)} = W^{(l)} \cup \partial_+ W^{(l)}, \quad A^{(0,l)} = \partial_+ W^{(l)}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Положив $d = \max\{\mathsf{d}(\gamma(\mathbf{0}, z)) : x \in A^{(0,l)}\}$ в конечном графе $\Gamma_l^{(0)}$, находим, что справедливо включение $\mathfrak{A}_d(\Gamma) \subset \mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})$, т.е. $\mathfrak{A}_d(\Gamma)$ содержится в событии о наличии перколяции на графе $\Gamma_l^{(0)}$ на его внешнюю границу. Тогда

$$\Pr\{\mathfrak{A}_d(\Gamma)\} \leqslant \Pr\{\mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})\}.$$

Учитывая предыдущее предельное соотношение, имеем

$$\Pr\{\mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})\} \xrightarrow[l\to\infty]{} \Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)\}.$$

Построим для каждого значения $l \in \mathbb{N}$, посредством процедуры подклеивания изоморфных друг другу экземпляров графа $\Gamma_l^{(0)}$ с вершиной $\mathbf{0}$ конечную последовательность графов

$$\Gamma_l^{(1)} = \langle V^{(1,l)}, \varphi^{(1,l)}\rangle, \quad \Gamma_l^{(2)} = \langle V^{(2,l)}, \varphi^{(2,l)}\rangle, \quad \ldots, \quad \Gamma_l^{(m)} = \langle V^{(m,l)}, \varphi^{(m,l)}\rangle,$$

как это описано в разделе 4, используя для этого граничные вершины $x_k^{(l)}$ графа $\Gamma_l^{(0)}$, $k = 1,\ldots,n^{(l)}$. Предел $\lim\limits_{m\to\infty} \Gamma_l^{(m)} \equiv \overline{\Gamma}_l$ является графом, который порождает последовательность аппроксимирующих иерархических перколяционных моделей $\Upsilon(\Gamma_l^{(0)}, A^{(0,l)})$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\overline{\Gamma}_l)\} = \lim_{m\to\infty} \Pr\{\mathfrak{A}_m(\Gamma_l^{(m)})\}.$$

Так как все бесконечные пути $\gamma(\mathbf{0})$ на графе $\bar{\Gamma}_l$ проходят через его вершины сочленения, которые являются граничными вершинами у графа $\Gamma_l^{(0)}$, то $\mathfrak{A}_\infty(\overline{\Gamma}_l) \subset \mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})$ и поэтому

$$\Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\overline{\Gamma}_l)\} \leqslant \Pr\{\mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})\}.$$

Наконец, ввиду того, что построенные иерархические перколяционные модели $\Upsilon(\Gamma_l^{(0)}, A^{(0,l)})$ являются аппроксимирующими для графа Γ, выполняется неравенство

$$\Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\overline{\Gamma}_l)\} \leqslant \Pr\{\mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})\}.$$

Следовательно, переходя к пределу $l \to \infty$ в цепочке неравенств

$$\Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\overline{\Gamma}_l)\} \leqslant \Pr\{\mathfrak{A}_\infty(\Gamma)\} \leqslant \Pr\{\mathfrak{A}(\Gamma_l^{(0)})\}$$

и воспользовавшись полученными выше предельными соотношениями, приходим к утверждению теоремы. $\square$

Доказанное утверждение ничего не говорит о точности аппроксимаций. Для установления гарантированных оценок точности аппроксимаций необходима дополнительная информация о структуре графа Γ. Отметим также, что несмотря на то, что из доказанной теоремы следует существование предела $\lim\limits_{l\to\infty} c_*^{(l)}$ последовательности $\langle c_*^{(l)};\ l \to \infty\rangle$ порогов перколяции аппроксимирующих перколяционных моделей, ввиду сделанного замечания, отсюда не следует, что этот предел равен порогу перколяции c_* однородного бернуллиеского поля с $c \in (0,1)$ на графе Γ.

6. Заключение. Несмотря на прозрачность определения приближений, описанных в настоящей работе, их построение сталкивается с серьезными техническими трудностями при увеличении порядка. Они связаны не только с увеличением сложностью анализа ветвящейся марковской цепи с марковским измельчением, соответствующей заданному порядку аппроксимации, при росте порядка аппроксимации. Это является следствием резкого возрастания степени полинома в (8) и рутинностью вычисления его коэффициентов ввиду быстрого возрастания числа необходимых кластеров. Дополнительные сложности проистекают ввиду усложнения перечисления кластеров. Например, в случае периодических графов при увеличении числа вершин в кластерах появляются такие, у которых в двумерном случае имеются отверстия, а в трехмерном и, тем более при более высокой размерности, появляются топологически нетривиальные кластеры. Нужно заметить, что точно такие же проблемы возникают при вычислении членов кластерного разложения для вероятности перколяции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонова Е. С., Вирченко Ю. П.* Свойство монотонности вероятности перколяции бернуллиевских случайных полей на бесконечных графах// Науч. вед. БелГУ. Сер. Физ. Мат. — 2010. — *11 (82)*, № 20. — С. 28–61.
2. *Вирченко Ю. П.* Перколяция// в кн.: Математическая физика. Энциклопедия. — Российская энциклопедия, 1998.
3. *Вирченко Ю. П.* Периодический граф// в кн.: Математическая физика. Энциклопедия. — М.: Российская энциклопедия, 1998.
4. *Вирченко Ю. П., Толмачёва Ю. А.* Мажорантные оценки порога перколяции бернуллиевского поля на квадратной решётке// Укр. мат. ж. — 2005. — *57*, № 10. — С. 1315–1326.
5. *Вирченко Ю. П., Шпилинская О. Л.* Точечные случайные поля с марковскими измельчениями и геометрия фрактально неупорядоченных сред// Теор. мат. физ. — 2000. — *124*, № 3. — С. 490–505.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
7. *Меньшиков М. В., Молчанов С. А., Сидоренко А. Ф.* Теория перколяции и некоторые приложения// в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей, математическая статистика и теоретическая кибернетика. Т. 2. — М.: ВИНИТИ, 1986. — С. 53–110.
8. *Молчанов С. А., Степанов А. К.* Просачивание случайных полей, I// Теор. мат. физ. — 1983. — *55*, № 2. — С. 246–256.
9. *Молчанов С. А., Степанов А. К.* Просачивание случайных полей, II// Теор. мат. физ. — 1983. — *55*, № 3. — С. 419–430.
10. *Молчанов С. А., Степанов А. К.* Просачивание случайных полей, III// Теор. мат. физ. — 1985. — *65*, № 3. — С. 371–379.
11. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971.
12. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты. — М.: Наука, 1980.
13. *Тарасевич Ю. Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. — М.: Эдиториал УРСС, 2002.
14. *Черкашин Д. А., Вирченко Ю. П.* Иерархические решеточные модели теории перколяции// в кн.: Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXXV (*Кондаурова Д. Э.*, ред.). — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2024. — С. 364–366.
15. *Antonova E. S., Virchenko Yu. P.* Monotonicity of the probability of percolation for Bernoulli random fields on periodic graphs// J. Math. Sci. — 2011. — *175*, № 1. — P. 86–90.
16. *Barucha-Reid A. T.* Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. — New York: Mc Grow-Hill, 1960.
17. *Broadbent S. R., Hammersley J. M.* Percolation processes, I. Crystals and mazes// Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1957. — *53*. — P. 629–641.
18. *Essam J. W.* Percolation Theory// Rep. Prog. Phys. — 1986. — *43*. — P. 833–912.
19. *Frisch C. M., Hammersley J. M.* Percolation processes and related topics// J. SIAM. — 1963. — *11*. — P. 894–918.
20. *Grimmett G.* Percolation. — New York: Springer-Verlag, 1999.
21. *Hammersley J. M.* Percolation processes: lower bounds for the critical probability// Ann. Math. Stat. — 1957. — *28*, № 3. — P. 790–795.

22. *Kesten H.* Percolation Theory for Mathematicians. — Boston: Birkhäuser, 1982.
23. *Nummelin E.* General Irreducible Markov Chains and Non-negative Operators. — New York: Cambridge Univ. Press, 1984.
24. *Ruelle D.* Statistical Mechanics. Rigorous Results. — Benjamin, 1969.
25. *Simon R.* The $P(\varphi)_2$ Euclidian (Quantum) Field Theory. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1974.
26. *Virchenko Yu. P., Shpilinskaya O. L.* Spaces of random sets in $\mathbb{R}^d$// Lobachevsky Math. J. — 2023. — *44*, № 3. — P. 1043–1059.
27. *Virchenko Yu. P., Tolmacheva Yu. A.* Method of Sequential Approximative Estimates in Discrete Percolation Theory// in: Studies in Mathematical Physics Research (*Benton C. V.*, ed.). — New York: Nova Science, 2004. — P. 155–175.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Вирченко Юрий Петрович (Virchenko Yurii Petrovich)
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова
(V. G. Shukhov Belgorod State Technological University, Belgorod, Russia)
E-mail: `virch@bsu.edu.ru`

Черкашин Дмитрий Андреевич (Cherkashin Dmitrii Andreevich)
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова
(V. G. Shukhov Belgorod State Technological University, Belgorod, Russia)
E-mail: `dmt.cherkashin@gmail.com`