ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 76–87
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-76-87

УДК 517.929

ЦИКЛЫ ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В РАМКАХ ОДНОЙ ИЗ ВЕРСИЙ МОДЕЛИ ГУДВИНА

© 2022 г. **Д. А. КУЛИКОВ, О. В. БАЕВА**

Аннотация. Рассмотрена задача о конкурентном взаимодействии двух макроэкономических систем. В качестве базисной модели выбрана известная модель бизнес-цикла Гудвина. Получены достаточные условия, при реализации которых в рассматриваемой системе могут появиться устойчивые предельные циклы.

***Ключевые слова*:** модель Гудвина, конкуренция, экономический цикл, устойчивость, бифуркация, асимптотическая формула.

CYCLES OF TWO COMPETING MACROECONOMIC SYSTEMS WITHIN A CERTAIN VERSION OF THE GOODWIN MODEL

© 2022 **D. A. KULIKOV, O. V. BAEVA**

Abstract. In this paper, we examine the problem of competitive interaction of two macroeconomic systems. As the basic model, the well-known Goodwin model is chosen. We obtain sufficient conditions under which stable limit cycles can appear in the system considered.

***Keywords and phrases*:** Goodwin model, competition, economic cycle, stability, bifurcation, asymptotic formula.

***AMS Subject Classification*:** 34C15, 34C23, 37N40

1. Введение. Как показывает практика, эволюция макроэкономических систем происходит циклически. Это означает, что экономические показатели изменяются колебательным образом и в идеализированном варианте у соответствующих математических моделей существуют устойчивые периодические решения (устойчивые циклы).

Классическая экономическая теория исходила из двух основных положений.

1. Во-первых, согласно этой теории маловероятна ситуация, когда уровень совокупных расходов будет недостаточен для закупки продукции, произведенной при полной занятости. Отрицалась возможность кризиса «перепроизводства товаров».
2. Во-вторых, если такая ситуация встретится, то незамедлительно изменится заработная плата, цена и рыночная ставка процента и, следовательно, ситуация стабилизируется на новом уровне, при новом состоянии экономического равновесия.

Эти идеи нашли свое отражение в математических моделях того периода. Например, в модели «спрос-предложение» существует состояние экономического равновесия, но отсутствуют циклы (см. [17]). В своем основополагающем труде [11] Дж. Кейнс подверг критике некоторые из положений классической экономической теории и объяснил механизм возникновения цикличности в рыночной экономике. В частности, это привело к созданию новых математических моделей, которые позволяли описывать циклические колебания экономических показателей. Одной из первых математических моделей, пригодной для описания цикличности экономики, следует считать модель Гудвина [7, 9, 13, 14, 16].

Ниже будет приведен вариант модели Гудвина и, в частности, показано существование устойчивых периодических решений в этом варианте модели. Математическая модель Гудвина представляет собой дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + A(x)\dot{x} + B(x) = 0. \tag{1}$$

Здесь $x = x(t)$ — отклонение от равновесного дохода. В уравнении (1) $A(x)$, $B(x)$ — достаточно гладкие функции. При этом $A(x)$ — четная функция и $A(0) < 0$, $A''(0) > 0$. Наконец, $B(x)$ — нечетная функция. В частности, $B(0) = 0$. Например, функции $A(x)$, $B(x)$ можно выбрать следующим образом: $A(x) = x^2 - \alpha$, $B(x) = bx + x^3$, где α, b — положительные постоянные.

Уместно подчеркнуть, что предложенный выбор $A(x)$ и $B(x)$ при определенных значениях параметров задачи позволяет находить устойчивые периодические решения у дифференциального уравнения (1).

Анализ уравнения (1) приводит к описанию нелинейной динамики в рамках отдельно взятой экономики. Вместе с тем представляет интерес вопрос о взаимодействии двух или нескольких экономик [15]. В работе ограничимся анализом системы дифференциальных уравнений, описывающей взаимодействие двух конкурирующих экономик. Как будет показано далее, эта задача близка по духу задаче о синхронизации двух автоколебательных систем. При этом будут рассмотрены два способа учета взаимодействия между макроэкономическими системами. В статье показана возможность существования автоколебательных решений трех типов. В обоих случаях выбора взаимодействия экономик возможны синхронные колебания обоих частей изучаемой макроэкономической системы, противофазные колебания, а также более сложные колебания, которые описываются асимметричными циклами изучаемой системы. При этом будет изучен актуальный вопрос об устойчивости, т.е. экономической реализуемости циклов трех типов.

2. Периодические решения в модели Гудвина. В этом разделе покажем, что в базисной модели Гудвина могут существовать устойчивые периодические решения. Рассмотрим достаточно стандартную версию модели Гудвина

$$\ddot{x} + a(x^2 - \alpha^2)\dot{x} + bx + x^3 = 0, \tag{2}$$

где a, b, α — некоторые положительные постоянные. Уравнение (2) можно и удобно переписать в форме

$$\ddot{x} - a\alpha^2\dot{x} + \omega^2 x = -a\dot{x}x^2 - x^3, \tag{3}$$

где $\omega^2 = b$. Пусть $a\alpha^2 = 2\varepsilon$, где далее ε будем интерпретировать как малый параметр. Отметим, что при таком выборе параметров (т.е. при $\alpha = \sqrt{2\varepsilon/a}$) уравнение (3) имеет устойчивый предельный цикл. Этот ответ для уравнения (3) хорошо известен, а уравнение (3) часто называют осциллятором Ван дер Поля—Дюффинга. Для соответствующего цикла справедлива следующая асимптотическая формула (см., например, [5, §§ 10—12], а также [6, гл. 9]):

$$x(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\sqrt{2/a}\cos(\omega(\varepsilon)t + \varphi) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где φ — произвольная действительная постоянная, $\omega(\varepsilon) = \omega + 3\varepsilon/a\omega$.

3. Постановка задачи. Основное внимание в работе будет уделено задаче об анализе системы из двух слабосвязанных экономик, взаимодействие которых учтено двумя наиболее естественными способами.

Первая система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -ax_1^2\dot{x}_1 - x_1^3 + 2d\varepsilon(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -ax_2^2\dot{x}_2 - x_2^3 + 2d\varepsilon(x_1 - x_2), \end{cases} \tag{4}$$

где коэффициент $d \in \mathbb{R}$ характеризует степень взаимодействия. Наличие ε в последних слагаемых учитывает то обстоятельство, что связь экономик относительно слабая. В модели (4) взаимодействие экономик пропорционально разности уровней доходов в каждой отдельной макроэкономической системе.

Второй вариант предусматривал анализ системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -a x_1^2 \dot{x}_1 - x_1^3 + 2d\varepsilon(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = -a x_2^2 \dot{x}_2 - x_2^3 + 2d\varepsilon(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь считаем, что интенсивность взаимодействия пропорциональна разности скоростей изменения доходов в каждой из частей. Если ориентироваться на изложение этого вопроса в монографии [15] (см. главу 4), первый вариант связи следует считать основным, быть может, более естественным с экономической точки зрения.

Для изучения динамики решений систем дифференциальных уравнений (4) и (5) будет использован подход, сочетающий два наиболее известных метода изучения автоколебательных систем: метод интегральных многообразий и нормальных форм Пуанкаре (см., например, [4, 12]).

4. Нормальная форма. Более подробно остановимся на анализе системы из двух дифференциальных уравнений (4). В частности, для нее вопрос об анализе динамики ее решений сведен к аналогичному вопросу для специальной системы, которую принято называть нормальной формой [1, 8]. При этом будем интересоваться теми решениями, которые находятся в малой окрестности нулевого состояния равновесия. Решения системы дифференциальных уравнений (4) из такой окрестности следует искать в следующем виде (см., например, [4, 12]):

$$\begin{aligned} x_1(t,s,\varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} u_1(t,s) + \varepsilon v_1(t,s) + \varepsilon^{3/2} w_1(t,s) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ x_2(t,s,\varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} u_2(t,s) + \varepsilon v_2(t,s) + \varepsilon^{3/2} w_2(t,s) + o(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $s = \varepsilon t$ — медленное время,

$$\begin{aligned} u_1 &= z_1(s)\exp(i\omega t) + \overline{z}_1(s)\exp(-i\omega t), \\ u_2 &= z_2(s)\exp(i\omega t) + \overline{z}_2(s)\exp(-i\omega t). \end{aligned}$$

Функции $v_j(t,s)$, $w_j(t,s)$, $j = 1, 2$ принадлежат классу функций W_p. Функция $K(t,s) \in W_p$, если она обладает следующими свойствами:

(1) $K(t,s)$ — достаточно гладкая по совокупности аргументов функция;
(2) по t имеет период $2\pi/\omega$;
(3) справедливы тождества

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} K(t,s)\exp(\pm i\omega t)dt = 0.$$

В последних двух равенствах интерпретируем s как независимую переменную (параметр).

Отметим, что комплекснозначные функции $z_1(s)$, $z_2(s)$ — решения вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = G_1(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \varepsilon), \\ z_2' = G_2(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \varepsilon), \end{cases} \tag{7}$$

где достаточно гладкие функции G_1, G_2 подлежат определению. Система (7) может быть названа нормальной формой, но основную роль играет «укороченный» ее вариант, т.е. система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} z_1' = Q_1(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2), \\ z_2' = Q_2(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2), \end{cases} \tag{8}$$

где $Q_j(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = G_j(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, 0)$, $j = 1, 2$. В системах (7), (8) штрихом обозначена производная по s.

Для определения правых частей дифференциальных уравнений (8) подставим правые части равенств (6) в систему (4) с последующим выделением членов при $\varepsilon^{1/2}$, ε, $\varepsilon^{3/2}$ в обоих уравнениях. В результате для v_1, v_2 получим линейные дифференциальные уравнения вида

$$\ddot{v}_1 + \omega^2 v_1 = 0, \quad \ddot{v}_2 + \omega^2 v_2 = 0.$$

Откуда находим, что с необходимостью $v_1 = v_2 = 0$, если, конечно, мы определяем решения как функции, принадлежащие W_p.

Наконец, для определения w_1, w_2 получаем уже систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$\ddot{w}_1 + \omega^2 w_1 = \Phi_1(t,s), \quad \ddot{w}_2 + \omega^2 w_2 = \Phi_2(t,s),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(t,s) &= -au_1^2\dot{u}_1 - u_1^3 + 2u_{1t} - 2u_{1st} + 2d(u_2 - u_1), \\ \Phi_2(t,s) &= -au_2^2\dot{u}_2 - u_2^3 + 2u_{2t} - 2u_{2st} + 2d(u_1 - u_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Из условий разрешимости системы (9) в классе $2\pi/\omega$ периодических по t функций, суть которых состоит в выполнении двух равенств

$$\frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega} \Phi_j(t,s)\exp(\pm i\omega t)dt = 0, \quad j = 1, 2,$$

выводим, что

$$Q_1 = z_1 + (l_1 + il_2)z_1|z_1|^2 - ig(z_2 - z_1), \quad Q_2 = z_2 + (l_1 + il_2)z_2|z_2|^2 - ig(z_1 - z_2),$$

где $g = d/\omega$, $l_1 = -a/2$, $l_2 = 3/(2\omega)$, т.е. в данном случае нормальная форма (точнее ее укороченный вариант) приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} z_1' = z_1 + (l_1 + il_2)z_1|z_1|^2 - ig(z_2 - z_1), \\ z_2' = z_2 + (l_1 + il_2)z_2|z_2|^2 - ig(z_1 - z_2). \end{cases} \tag{10}$$

Аналогичный анализ системы дифференциальных уравнений (5) приводит к следующей нормальной форме:

$$\begin{cases} z_1' = z_1 + (l_1 + il_2)z_1|z_1|^2 + d(z_2 - z_1), \\ z_2' = z_2 + (l_1 + il_2)z_2|z_2|^2 + d(z_1 - z_2), \end{cases} \tag{11}$$

Системы (10) и (11) различаются лишь последними слагаемыми в каждом из двух уравнений. Подчеркнём, что системы (4) и (5) различались также последними слагаемыми.

Следующие два раздела будут посвящены анализу нормальных форм (10) и (11) соответственно. В первом из них будет проанализирована нормальная форма (10), соответствующая системе дифференциальных уравнений (4).

5. Анализ нормальной формы основного варианты системы. Положим в системе дифференциальных уравнений (10)

$$z_1(s) = \rho_1(s)\exp(i\varphi_1(s)), \quad z_2(s) = \rho_2(s)\exp(i\varphi_2(s)), \tag{12}$$

где функции $\rho_1(s)$, $\rho_2(s) > 0$, если рассматривают решения, отличные от тривиальных. Замена (12) в системе дифференциальных уравнений (10) приводит ее к следующему виду:

$$\begin{cases} \rho_1' = \rho_1 + l_1\rho_1^3 + g\rho_2\sin\psi, \\ \rho_2' = \rho_2 + l_1\rho_2^3 - g\rho_1\sin\psi, \\ \varphi_1' = -g\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\cos\psi + g + l_2\rho_1^2, \\ \varphi_2' = -g\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\cos\psi + g + l_2\rho_2^2. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$. Систему (13) удобно перенормировать. Положим

$$\rho_1 = \rho_1(s) = \frac{y_1(s)}{\sqrt{|l_1|}}, \quad \rho_2 = \rho_2(s) = \frac{y_2(s)}{\sqrt{|l_1|}},$$

а $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ оставим без изменений. С учетом того обстоятельства, что $l_1 = -a/2 < 0$, вместо системы (13) получим уже следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_1^3 + gy_2 \sin\psi, \\ y_2' = y_2 - y_2^3 - gy_1 \sin\psi, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \varphi_1' = -g\dfrac{y_2}{y_1}\cos\psi + g + cy_1^2, \\ \varphi_2' = -g\dfrac{y_1}{y_2}\cos\psi + g + cy_2^2, \end{cases} \tag{15}$$

где $c = l_2/|l_1|$ (в нашем случае $c = 3/(a\omega)$). Далее считаем, что $c \neq 0$. Если теперь из второго уравнения системы (15) вычесть первое уравнение этой системы, не меняя при этом систему (14), то для $y_1 = y_1(s)$, $y_2 = y_2(s)$, $\psi = \psi(s)$ получим уже замкнутую подсистему дифференциальных уравнений для медленных переменных:

$$y_1' = y_1 - y_1^3 + gy_2 \sin\psi, \quad y_2' = y_2 - y_2^3 - gy_1 \sin\psi, \quad \psi' = (y_2^2 - y_1^2)\left(c + g\frac{\cos\psi}{y_1 y_2}\right), \tag{16}$$

Без нарушения общности можно считать, что систему (16) достаточно изучить при $g > 0$. Действительно, при $g < 0$ можно положить $y_1 = u_2$, $y_2 = u_1$, $\Theta = -\psi$. Тогда для переменных u_1, u_2, Θ получим систему, подобную (16), в которой следует считать $g > 0$.

Для нахождения периодических по s решений нормальной формы (10) сначала следует найти ненулевые состояния равновесия вспомогательной системы дифференциальных уравнений (16) для «медленных» переменных y_1, y_2, ψ. Это приводит к необходимости анализа следующей системы уравнений:

$$y_1 - y_1^3 + gy_2 \sin\psi = 0, \quad y_2 - y_2^3 - gy_1 \sin\psi = 0, \quad (y_2^2 - y_1^2)\left(c + g\frac{\cos\psi}{y_1 y_2}\right) = 0. \tag{17}$$

При ее анализе считаем, что $g \neq 0$ и, следовательно, $g > 0$. Если $g = 0$, то получаем несодержательный случай двух несвязанных макроэкономических систем.

Решения системы уравнений (17) (т.е. состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (16)) можно разделить на два типа:

тип 1: $y_1 = y_2 = \eta$ $(\rho_1 = \rho_2)$;
тип 2: $y_1 \neq y_2$ $(\rho_1 \neq \rho_2)$.

Пусть $y_1 = y_2 = \eta$ $(\eta > 0)$. Тогда первые два уравнения системы (17) запишутся в виде

$$\eta - \eta^3 + g\eta \sin\psi = 0, \quad \eta - \eta^3 - g\eta \sin\psi = 0,$$

Следовательно, $\sin\psi = 0$, $\eta = 1$. В результате получим лишь два состояния равновесия

$$S_o: \quad y_1 = y_2 = 1, \quad \psi = 0,$$
$$S_p: \quad y_1 = y_2 = 1, \quad \psi = \pi.$$

Состоянию S_o соответствует однородный цикл системы (10)

$$C_o: \quad z_1(s) = \frac{1}{\sqrt{|l_1|}}\exp(i\sigma s), \quad z_2(s) = \frac{1}{\sqrt{|l_1|}}\exp(i\sigma s), \quad \sigma = \frac{l_2}{|l_1|} \quad (\sigma = c).$$

В свою очередь, циклу C_o системы (10) соответствует цикл исходной системы (4)

$$x_1(t,\varepsilon) = x_2(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\frac{1}{\sqrt{|l_1|}}\cos(\omega(\varepsilon)t + h_0) + o(\varepsilon),$$

где $\omega(\varepsilon) = (\omega + \varepsilon\sigma)$, $h_0 \in \mathbb{R}$. Последний цикл называется синхронным (иногда его называют циклом Андронова—Хопфа). Подчеркнем, что $\sigma = 3/(a\omega)$.

Состоянию равновесия S_p соответствует противофазный цикл $C_p(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} &x_2(t,\varepsilon) = -x_1(t,\varepsilon),\\ &x_1(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\frac{1}{\sqrt{|l_1|}}\cos(\omega_p(\varepsilon)t + h_p) + o(\varepsilon), \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\omega_p(\varepsilon) = \omega + \varepsilon\sigma_p, \quad \sigma_p = \frac{l_2}{|l_1|} + 2g.$$

Отметим, что противофазный цикл (18) характерен тем, что колебания первого и второго осцилляторов разнятся на фазу π, а также, что $\sigma_p = \sigma + 2g$, т.е. $\sigma_p \neq \sigma$.

Перейдём к определению состояний равновесия второго типа, т.е. тех, для которых $y_1 \neq y_2$ ($\rho_1 \neq \rho_2$). Состояния равновесия второго типа будем обозначать S_a. Напомним, что такие циклы в теории синхронизации принято называть асимметричными (см., например, [4, 12]).

Их координаты могут быть определены как решения следующей системы уравнений:

$$y_1 - y_1^3 + gy_2\sin\psi = 0, \quad y_2 - y_2^3 - gy_1\sin\psi = 0, \quad y_1y_2 = -\frac{g}{c}\cos\psi. \tag{19}$$

Систему (19) можно преобразовать следующим образом. Во-первых, умножим первое уравнение системы (19) на y_1, а второе на y_2. Затем их сложим. В результате получим уравнение

$$y_1^2 + y_2^2 = y_1^4 + y_2^4.$$

Отметим, что справедливо тождество

$$y_1^4 + y_2^4 = \frac{1}{2}\big(y_1^2 + y_2^2\big)^2 + \frac{1}{2}\big(y_1^2 - y_2^2\big)^2.$$

Во-вторых, умножим первое уравнение этой системы на y_2, а второе — на y_1 и вычтем затем из первого уравнения второе. В результате получим ещё одно уравнение

$$y_1y_2(y_1^2 - y_2^2) = g(y_1^2 + y_2^2)\sin\psi.$$

Учёт третьего уравнения системы (19) позволяет последнее уравнение переписать в форме

$$y_1^2 - y_2^2 = -c(y_1^2 + y_2^2)\operatorname{tg}\psi.$$

Подчеркнём, что из третьего уравнения системы (19) вытекает неравенство

$$\left(\frac{g}{c}\right)\cos\psi < 0.$$

В нашем случае $c > 0$, а $g > 0$ по предположению. Следовательно, $\cos\psi < 0$.

Суммируя все эти преобразования, получаем систему из трёх уравнений

$$y_1^2 - y_2^2 = -\frac{2c(\operatorname{tg}\psi)}{c^2(\operatorname{tg}^2\psi) + 1}, \quad y_1^2 + y_2^2 = \frac{2}{1 + c^2\operatorname{tg}^2\psi}, \quad y_1^2y_2^2 = \frac{g^2}{c^2}\cos^2\psi \equiv \frac{g^2}{c^2(1 + \operatorname{tg}^2\psi)}. \tag{20}$$

Из первых двух уравнений системы (20) находим, что

$$y_1^2 = \frac{1-\xi}{1+\xi^2}, \quad y_2^2 = \frac{1+\xi}{1+\xi^2}, \tag{21}$$

где $\xi = c(\operatorname{tg}\psi)$ и, следовательно, $\xi \in (-1, 1)$. После подстановки правых частей равенств (21) в третье уравнение системы (20) для вспомогательной неизвестной $\xi \in (-1, 1)$ получаем уравнение

$$P(\eta) = (1 + g^2)\eta^2 - (1 - c^2 - 2g^2)\eta + (g^2 - c^2) = 0, \tag{22}$$

где $\eta = \xi^2 \in (0, 1)$.

При анализе квадратного уравнения (22) следует различать три случая:

Случай 1. $g^2 - c^2 < 0$;
Случай 2. $g^2 - c^2 > 0$;
Случай 3. $g^2 = c^2$ (в нашем случае $g = c$).

Рассмотрим сначала случай 1. При реализации неравенства $g^2 - c^2 < 0$ квадратное уравнение (22) имеет корни разных знаков. При этом $P(0) < 0$, $P(1) = 4g^2 > 0$ ($g \neq 0$ по условию). Это означает, что уравнение (22) имеет один подходящий корень

$$\eta = \frac{(1 - c^2 - 2g^2) + \sqrt{D}}{2(1 + g^2)}, \quad D = (1 - c^2 - 2g^2)^2 + 4(1 + g^2)(c^2 - g^2) > 0.$$

В свою очередь, последнее замечание позволяет сделать вывод, что в случае 1 система дифференциальных уравнений (16) имеет два состояния равновесия $S_a(1; 1+)$, $S_a(1; 1-)$:

$$S_a(1; 1+): \quad y_1 = \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 + \xi}{1 + \xi^2}}, \quad \psi = \arctan\frac{\xi}{c} + \pi, \qquad \xi = \sqrt{\eta},$$

$$S_a(1; 1-): \quad y_1 = \sqrt{\frac{1 + \xi}{1 + \xi^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi^2}}, \quad \psi = -\arctan\frac{\xi}{c} + \pi, \quad \xi = \sqrt{\eta}.$$

Напомним, что в нашем случае $c > 0$ (если c было бы отрицательным, то $\psi = \arctan(\xi/c)$ в первом варианте и $\psi = -\arctan(\xi/c)$ во втором).

Перейдем к случаю 2, т.е. пусть выполнено неравенство $g^2 - c^2 > 0$. Требование, что корни квадратного уравнения (22) принадлежат отрезку $(0, 1)$, приводит к двум неравенствам

$$1 - c^2 - 2g^2 > 0, \quad D > 0. \tag{23}$$

Отметим, что вывод условий (23) использует неравенства $P(0) > 0$, $P(1) > 0$, которые справедливы при изучении второго случая.

Если все предыдущие требования выполнены, то в случае 2 система дифференциальных уравнений (16) имеет четыре состояния равновесия $S_a(2; 1+)$, $S_a(2; 1-)$, $S_a(2; 2+)$, $S_a(2; 2-)$:

$$S_a(2; 1+): \quad y_1 = \sqrt{\frac{1 - \xi_1}{1 + \xi_1^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 + \xi_1}{1 + \xi_1^2}}, \quad \psi = \arctan\frac{\xi_1}{c} + \pi, \qquad \xi_1 = \sqrt{\eta_1},$$

$$S_a(2; 1-): \quad y_1 = \sqrt{\frac{1 + \xi_1}{1 + \xi_1^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 - \xi_1}{1 + \xi_1^2}}, \quad \psi = -\arctan\frac{\xi_1}{c} + \pi, \quad \xi_1 = \sqrt{\eta_1},$$

$$S_a(2; 2+): \quad y_1 = \sqrt{\frac{1 - \xi_2}{1 + \xi_2^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 + \xi_2}{1 + \xi_2^2}}, \quad \psi = \arctan\frac{\xi_2}{c} + \pi, \qquad \xi_2 = \sqrt{\eta_2},$$

$$S_a(2; 2-): \quad y_1 = \sqrt{\frac{1 - \xi_2}{1 + \xi_2^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 + \xi_2}{1 + \xi_2^2}}, \quad \psi = -\arctan\frac{\xi_2}{c} + \pi, \quad \xi_2 = \sqrt{\eta_2}.$$

Наконец,

$$\eta_1 = \frac{1 - c^2 - 2g^2 + \sqrt{D}}{2(1 + g^2)}, \quad \eta_2 = \frac{1 - c^2 - 2g^2 - \sqrt{D}}{2(1 + g^2)}.$$

Напомним, что $c > 0$, если мы изучаем модель Гудвина.

В случае 3 уравнение (22) имеет подходящий корень

$$\eta_3 = \frac{1 - 3c^2}{1 + c^2} \in (0, 1),$$

если $1 - 3c^2 > 0$. Тогда возможны так же, как и в случае 1, два варианта формул для координат состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (16)

$$S_a(3+): \quad y_1 = \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 + \xi}{1 + \xi^2}}, \quad \psi = \arctan\frac{\xi}{c} + \pi, \qquad \xi = \sqrt{\eta_3},$$

$$S_a(3-): \quad y_1 = \sqrt{\frac{1 + \xi}{1 + \xi^2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi^2}}, \quad \psi = -\arctan\frac{\xi}{c} + \pi, \quad \xi = \sqrt{\eta_3}.$$

Перейдем теперь к анализу устойчивости состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (16). При этом будет использована теорема об устойчивости по первому (линейному) приближению. Для этого в матрицу Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial y_1 & \partial F_1/\partial y_2 & \partial F_1/\partial \psi \\ \partial F_2/\partial y_1 & \partial F_2/\partial y_2 & \partial F_2/\partial \psi \\ \partial F_3/\partial y_1 & \partial F_3/\partial y_2 & \partial F_3/\partial \psi \end{pmatrix},$$

где

$$F_1 = y_1 - y_1^3 + gy_2 \sin\psi, \quad F_2 = y_2 - y_2^3 - gy_1 \sin\psi, \quad F_3 = (y_2^2 - y_1^2)\left(c + g\frac{\cos\psi}{y_1 y_2}\right),$$

необходимо подставить координаты исследуемого состояния равновесия и у получившейся матрицы с постоянными элементами определить собственные числа.

Пусть сначала $g^2 - c^2 < 0$, т.е. в задаче о существовании состояний равновесия третьего типа реализуется случай 1. Тогда система дифференциальных уравнений (16) имеет состояния равновесия S_o, S_p, $S_a(1;1+)$, $S_a(1;1-)$.

Анализ устойчивости S_o приводит к необходимости исследования спектра матрицы J при $y_1 = y_2 = 1$, $\psi = 0$. В результате получаем, что

$$J_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & g \\ 0 & -2 & -g \\ -2(c+g) & 2(c+g) & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4(c+g)) = 0,$$

у которого все корни лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, т.е. S_o асимптотически устойчиво. Аналогичные вычисления для S_p приводят уже к характеристическому уравнению

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4(g-c)) = 0,$$

у которого имеется корень в правой полуплоскости, т.е. состояние равновесия S_p неустойчиво ($g, c > 0$ в рассматриваемой задаче).

Перейдем теперь к анализу устойчивости состояний равновесия $S_a(1;1+)$ и $S_a(1;1-)$. В этом случае приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0,$$

где в данном случае

$$P = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}), \quad Q = b\big(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\big) + \big(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}\big) + \big(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\big),$$
$$R = -\det(J_a), \quad J_a = \{a_{jk}\}.$$

В свою очередь,

$$a_{11} = 1 - 3y_1^2, \qquad a_{12} = g\sin\psi, \qquad a_{13} = gy_2\cos\psi,$$
$$a_{21} = -g\sin\psi, \qquad a_{22} = 1 - 3y_2^2, \qquad a_{23} = -gy_1\cos\psi,$$
$$a_{31} = (y_1^2 - y_2^2)g\frac{\cos\psi}{y_1^2 y_2}, \quad a_{32} = (y_1^2 - y_2^2)g\frac{\cos\psi}{y_1 y_2^2}, \quad a_{33} = g(y_1^2 - y_2^2)\frac{\sin\psi}{y_1 y_2},$$

где y_1, y_2, ψ — координаты соответствующего состояния равновесия ($S_a(1;1+)$, $S_a(1;1-)$ в этом случае). Ясно, что анализ устойчивости, как обычно, сводится к проверке неравенств (критерий Рауса—Гурвица) $P, Q, R > 0$, $PQ - R > 0$. Анализ этих неравенств сразу показывает, что состояния равновесия $S_a(1;1+)$, $S_a(1;1-)$ одновременно устойчивы или неустойчивы. Более детальное изучение условий устойчивости опиралось на их численный анализ. Он показал, что в большинстве случаев такие состояния равновесия неустойчивы. Тем не менее, если c и g достаточно близки друг к другу, то можно указать диапазоны их изменения (не очень широкие), когда исследуемые состояния равновесия $S_a(1;1+)$ и $S_a(1;1-)$ асимптотически устойчивы. Пусть выбрано $g > 0$. Тогда можно указать такие g_Δ, что при $c \in (g, g_\Delta)$ предыдущее замечание справедливо. Возможность такого выбора g_Δ проверялось численно.

Например, если $g = 0{,}7$, то $g_\Delta \approx 0{,}8$ ($g = 1{,}6$, $g_\Delta = 1{,}9$; $g = 3{,}0$, $g_\Delta = 3{,}4$ и т. д.). Тем не менее всегда можно указать диапазоны g и c, что если $g^2 - c^2 < 0$ ($g < c$), то система дифференциальных уравнений (16) имеет 3 устойчивых состояния равновесия S_o, $S_a(1;1+)$, $S_a(1;1-)$. Аналогичный вывод можно сделать в случае 3.

Иная ситуация реализуется в случае 2, т.е. если $g^2 - c^2 > 0$ ($g > c > 0$). В этом случае асимптотически устойчивы S_o, S_p. При этом, как показал анализ устойчивости, четыре состояния равновесия $S_a(2;1+)$, $S_a(2;1-)$, $S_a(2;2+)$, $S_a(2;2-)$, если они и существуют, то всегда неустойчивы. Подчеркнем, что диапазоны изменения параметров g и c, при которых в случае 2 существуют асимметричные состояния равновесия достаточно узкие. Впрочем, детальный анализ этого вопроса не актуален с прикладной точки зрения. С экономической точки зрения интерес представляют только те решения, которые устойчивы и, следовательно, реализуемы на практике.

6. Анализ второй постановки задачи. В этом разделе изложим анализ нормальной формы (11), которая была получена при изучении системы дифференциальных уравнений (5). Напомним, что вариант модели (5), по-видимому, менее естественен для задач макроэкономики. Отметим также, что изучение системы дифференциальных уравнений (11) во многих аспектах повторяет анализ нормальной формы (10) и поэтому соответствующий анализ системы (11) будет изложен короче. Более того, ограничимся только вариантом $d > 0$. Он более естественен для приложений. Напомним, что $c > 0$ (см. начало статьи).

Итак, в системе дифференциальных уравнений (11) положим (см. предыдущий раздел)

$$z_j(s) = \mu y_j(s)\exp(i\varphi_j(s)), \quad j = 1,2, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{|l_1|}} \quad (l_1 = -a/2 < 0).$$

В результате последних замен, как и в п. 5, получаем систему дифференциальных уравнений для определения $y_1(s)$, $y_2(s)$, $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ следующего вида:

$$\begin{cases} y_1'(s) = y_1 - y_1^3 + d(y_2\cos\psi - y_1), \\ y_2'(s) = y_2 - y_2^3 + d(y_1\cos\psi - y_2), \\ \quad \varphi_1' = cy_1^2 + d\dfrac{y_2}{y_1}\sin\psi, \\ \quad \varphi_2' = cy_2^2 - d\dfrac{y_1}{y_2}\sin\psi, \end{cases}$$

где, как и ранее, использовано обозначение $c = l_2/|l_1|$. Если теперь вычесть из четвертого уравнения последней системы третье уравнение, то получим замкнутую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'(s) = y_1 - y_1^3 + d(y_2\cos\psi - y_1), \\ y_2'(s) = y_2 - y_2^3 + d(y_1\cos\psi - y_2), \\ \quad \psi' = c(y_2^2 - y_1^2) - d\sin\psi\left(\dfrac{y_1}{y_2} + \dfrac{y_2}{y_1}\right). \end{cases} \tag{24}$$

Подчеркнем, что систему дифференциальных уравнений (24) следует дополнить уравнением для $\varphi_1(s)$ или $\varphi_2(s)$. Например,

$$\varphi_2' = l_2\frac{y_2^2}{|l_1|} - g\left(\frac{y_1}{y_2}\cos\psi - 1\right) = cy_2^2 - g\left(\frac{y_1}{y_2}\cos\psi - 1\right).$$

У системы дифференциальных уравнений (24) найдём состояния равновесия и исследуем вопрос об их устойчивости. Как и в предыдущем разделе состояния равновесия можно разделить на 2 типа. К первому отнесём такие состояния равновесия, для которых $y_1 = y_2$, а ко второму — остальные, для которых $y_1 \neq y_2$.

Система дифференциальных уравнений (24) имеет два состояния равновесия первого типа: $E_o : y_1 = y_2 = 1,\ \psi = 0$, которое существует при всех значениях параметров задачи, а также $E_p : y_1 = y_2 = \sqrt{1-2d},\ \psi = \pi$, существующее при $1 - 2d > 0$ ($d < 1/2$).

Анализ их устойчивости показал, что в изучаемом случае состояние равновесия E_o асимптотически устойчиво всегда (при всех значениях параметров задачи). В свою очередь E_p при данных значениях d и c всегда неустойчиво ($d > 0$, $c > 0$).

Состояния равновесия второго типа обозначим E_a. Его координаты определяют как решения системы алгебраических уравнений

$$y_1 - y_1^3 + d(y_2\cos\psi - y_1) = 0, \quad y_2 - y_3^2 + d(y_1\cos\psi - y_2) = 0, \quad c(y_2^2 - y_1^2) - d\left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1}\right)\sin\psi = 0.$$

После преобразований, аналогичных тем, которые были использованы при изучении системы уравнений (17), получим уже систему

$$y_1^2 + y_2^2 = 1 - d, \quad y_1y_2 + d\cos\psi = 0, \quad y_1^2 - y_2^2 = \frac{1-d}{c}\operatorname{tg}\psi.$$

При получении последней системы уравнений было использовано предположение, что $y_1 \neq y_2$. Ясно, что она имеет решения $y_1, y_2 > 0$, если $\cos\psi < 0$ и если $1 - d > 0$, т.е. $d \in (0,1)$. При выполнении этих предварительных требований аналогично, как и в п. 5, вопрос об их существовании удаётся свести к анализу квадратного уравнения

$$G(\xi) = c^2\xi^2 - (c^2-1)\xi + Q^2 - 1 = 0, \tag{25}$$

где $Q = 2d/(1-d) > 0$. При этом интерес представляют только те корни этого уравнения, которые принадлежат отрезку $(0,1)$.

Случай 1. Пусть $(Q^2 - 1) < 0$, т.е. $d \in (0, 1/3)$. Тогда уравнение (25) имеет один подходящий корень

$$\xi = \frac{c^2 - 1 + \sqrt{(c^2-1)^2 - 4c^2(Q^2-1)}}{2c^2} \in (0,1);$$

второй корень отрицателен. В этом случае система дифференциальных уравнений (24) имеет два состояния равновесия

$$E_a(1;1+): \quad y_1 = \nu\sqrt{1+\sqrt{\xi}}, \quad y_2 = \nu\sqrt{1-\sqrt{\xi}}, \quad \psi = \arctan(c\xi) + \pi,$$
$$E_a(1;1-): \quad y_1 = \nu\sqrt{1-\sqrt{\xi}}, \quad y_2 = \nu\sqrt{1+\sqrt{\xi}}, \quad \psi = -\arctan(c\xi) + \pi,$$

где $\nu = \sqrt{(1-d)/2}$. Анализ таких решений показал, что они всегда неустойчивы.

Случай 2. Пусть $(Q^2 - 1) > 0$, т.е. $d \in (1/3, 1)$. Тогда состояние равновесия существуют, если выполнены ещё два условия (неравенства):

$$(c^2 - 1) > 0, \quad (c^2-1)^2 - 4c^2(Q^2-1) > 0.$$

В этом случае квадратное уравнение (25) имеет два подходящих корня, которым соответствуют четыре состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (24), но все эти состояния равновесия неустойчивы. Это было показано на основе использования теоремы о первом (линейном) приближении с привлечением численного анализа.

Случай 3. В этом случае $Q^2 = 1$, или $Q = 2d/(1-d) = 1$, т.е. $d = 1/3$. Квадратное уравнение имеет один подходящий корень $\xi = (c^2-1)/c^2$, если $(c^2 - 1) > 0$. Ему соответствуют два состояния равновесия системы дифференциальных уравнения (24), которые, как показал анализ, неустойчивы при всех соответствующих значениях c и рассматриваемых d.

7. Основные результаты. Возвратимся к анализу системы (4). Отметим, что каждому состоянию равновесия системы дифференциальных уравнений (16) для медленных переменных y_1, y_2, ψ соответствует периодическое решение нормальной формы (10)

$$z_1(s) = \rho_{1*}\exp(i\delta_*(s+h)), \quad \rho_{1*} = y_{1*}\frac{1}{\sqrt{|l_1|}}, \quad z_2(s) = \rho_{2*}\exp(i\delta_*(s+h) + i\psi_*), \quad \rho_{2*} = y_{2*}\frac{1}{\sqrt{|l_1|}},$$

где

$$\delta_* = cy_{2*}^2 - g\left(\frac{y_{1*}}{y_{2*}}\cos\psi_* - 1\right) \neq 0, \quad c = \frac{l_2}{|l_1|}.$$

Наконец, y_{1*}, y_{2*}, ψ_* координаты любого из найденных состояний равновесия системы (16). Если случайно оказалось, что $\delta_* = 0$, то у системы дифференциальных уравнений (10) получаем состояния равновесия вместо периодических решений. Ясно, что соответствующее δ_* определяется после интегрирования уравнения

$$\varphi_2' = l_2\frac{y_{2*}^2}{|l_1|} - g\left(\frac{y_{1*}}{y_{2*}}\cos\psi_* - 1\right).$$

В свою очередь, таким решениям полученной нормальной формы (10) соответствуют периодические решения системы дифференциальных уравнений (4). Справедливо утверждение (см. [2,3]), которое можно назвать основным результатом для системы (4).

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ любому существующему состоянию равновесия системы* (16) *соответствует предельный цикл системы* (4) *с наследованием устойчивости, т.е. асимптотически устойчивому состоянию равновесия S_* соответствует орбитально асимптотически устойчивый цикл C_* системы* (4). *Для него справедлива асимптотическая формула*

$$x_1(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\rho_{1*}\cos((\omega+\varepsilon\delta_*)(t+h)) + O(\varepsilon^{3/2}),$$
$$x_2(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\rho_{2*}\cos((\omega+\varepsilon\delta_*)(t+h)+\psi_*) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где $\rho_{1*} = y_{1*}/\sqrt{|l_1|}$, $\rho_{2*} = y_{2*}/\sqrt{|l_1|}$, а y_{1*}, y_{2*}, ψ_* координаты выбранного и существующего состояния равновесия вспомогательной системы (16), *а δ_* было определено ранее, а $h \in \mathbb{R}$.*

Отметим, что состояниями равновесия S_* могут быть состояния равновесия первого типа S_o, S_p, а также состояния равновесия второго типа (см. п. 5), т.е. S_a.

Например, если $g = 0{,}7$, $c = 0{,}8$, то существует синхронный цикл, в котором $\rho_{1*} = \rho_{2*} = 1$, $\psi_* = 0$, и он устойчив. Существует также противофазный, но неустойчивый цикл, для которого $\rho_{1*} = \rho_{2*} = 1$, $\psi_* = \pi$. Наконец, существуют два асимметричных цикла. Для первого $\rho_{1*} = 0{,}7/\sqrt{|l_1|}$, $\rho_{2*} = 1{,}1/\sqrt{|l_1|}$, $\psi_* = 3{,}62$ ($\psi_* \approx 1{,}15\pi$, т.е. угол в третьей четверти). Для второго получаем, что $\rho_{1*} = \frac{1{,}1}{\sqrt{|l_1|}}$, $\rho_{2*} = \frac{0{,}7}{\sqrt{|l_1|}}$, $\psi_* = 2{,}66$ ($\psi_* \approx 0{,}85\pi$, т.е. угол из второй четверти). В данном случае оба асимметричных цикла устойчивы.

Для системы дифференциальных уравнений (5) справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ каждому существующему состоянию равновесия E_* вспомогательной системы* (24) *соответствует цикл системы дифференциальных уравнений* (5) *с наследованием свойств устойчивости.*

Отметим, что для циклов системы дифференциальных уравнений (5) могут быть выписаны асимптотические формулы. Их вид аналогичен формулам из теоремы 1.

8. Заключение. В работе были рассмотрены две системы, описывающие динамику двух взаимодействующих макроэкономических систем. Если учет взаимодействия произведен тем способом, который использован в системе дифференциальных уравнений (5), то динамика такой системы достаточно простая. В ней могут реализоваться только синхронные колебания. Напомним, что у нее устойчив только однородный цикл, а противофазный и асимметричные, если даже и существуют, то неустойчивы. Эти выводы еще раз акцентируют внимание на то, что система дифференциальных уравнений (5) менее естественна для приложений в экономике.

Иная ситуация реализуется при использовании в качестве математической модели системы дифференциальных уравнений (4). Пусть имеет место первый случай, т.е. $g^2 - c^2 < 0$, то в этой ситуации устойчив синхронный цикл, а противофазный цикл неустойчив. В тоже время можно указать диапазоны изменения параметров задачи, когда существуют устойчивые асимметричные циклы. Справедливости ради можно отметить, что такие диапазоны не будут слишком большими. При $g^2 - c^2 > 0$, когда реализуется второй случай, ситуация кардинально изменяется: синхронный и противофазный циклы устойчивы, но асимметричные циклы, если и существуют, то неустойчивы. В этом случае колебания двух частей макроэкономической системы могут происходить в противофазном режиме, когда подъем одной из экономик сопровождается стагнацией в другой. Отметим, что такой вариант колебаний характерен для многих физических систем. Так, противофазные колебания достаточно типичны в задаче о колебаниях двух связанных маятников. Это явление было открыто опытным путем Гюйгенсом [10].

Добавим, что для системы дифференциальных уравнений (4) однородный цикл существует и устойчив всегда. Это означает, что в такой постановки задачи достаточно типична мультистабильность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 5. — С. 584–601.
3. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 6. — С. 738—753.
4. *Куликов Д. А.* Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов// Изв. вузов. Прикл. нелин. динам. — 2006. — *14*, № 5. — С. 120–132.
5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: ГИТТЛ, 1956.
6. *Морозов А. Д.* Математические модели теории колебаний. — М.-Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2017.
7. *Bashkirtseva I., Ryazanova T., Ryashko L.* Confidence domains in the analysis of noise-unduced transition to chaos for Goodwin model of business cycles// Int. J. Bifurcation Chaos. — 2014. — *24*, № 8. — P. 1–10.
8. *Guckenheimer J., Holmes P. J.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. — Berlin: Springer-Verlag, 1983.
9. *Gudwin R. M.* The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles// Econometrica. — 1951. — *19*, № 1. — P. 1–17.
10. *Huygens C.* The pendulum clock (English translation, original publication in 1673). — Iowa: Iowa State Univ. Press, 1986.
11. *Keynes J. M.* General Theory of Employment, Interest, and Money. — New-York: Harcourt Brace, 1936.
12. *Kulikov D. A.* Self-similar cycles and their local bifurcations in the problem of two weakly coupled oscillators// J. Appl. Math. Mech. — 2010. — *74*, № 4. — P. 389–400.
13. *Lorenz H. W.* Goodwin's nonlinear accelerator and chaotic motion// J. Econ. — 1987. — *47*, № 4. — P. 413–418.
14. *Lorenz H. W., Nusse H. E.* Chaotic attractors, chaotic saddles, and fractal basin boundaries: Goodwin's nonlinear accelerator model reconsidered// Chaos Soliton Fractals. — 2002. — *13*. — P. 957–965.
15. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — New York: Springer-Verlag, 1993.
16. *Ryazanova T., Jungeilges J.* Noise-induced transitions in a stochastic Goodwin-type business cycle model// Struct. Change Econ. Dyn. — 2017. — *40*. — P. 103–115.
17. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

Куликов Дмитрий Анатольевич
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: `kulikov_d_a@mail.ru`

Баева Ольга Владимировна
Академия ФСИН России, Рязань
E-mail: `olga836@mail.ru`