ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 10–15
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-10-15

УДК 517.953, 517.968

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. **В. Б. ВАСИЛЬЕВ, Н. В. ЭБЕРЛЕЙН**

Аннотация. Рассматривается задача сопряжения для эллиптического псевдодифференциального уравнения на плоскости с угловым разрезом в пространстве Соболева—Слободецкого. Кроме условий на границе задаются дополнительные интегральные условия. При наличии специальной волновой факторизации символа псевдодифференциального оператора с определенным индексом описано сведение такой краевой задачи к эквивалентной системе линейных интегральных уравнений.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, интегральное условие, задача сопряжения, волновая факторизация, разрешимость, система линейных интегральных уравнений.

CONJUGATION PROBLEM FOR ELLIPTIC PSEUDODIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE PLANE

© 2022 **V. B. VASILYEV, N. V. EBERLEIN**

Abstract. The conjugation problem for an elliptic pseudodifferential equation on the plane with an angular cut in the Sobolev–Slobodetskii space is considered. In addition to the boundary conditions, integral conditions are posed. Under a specific wave factorization of the symbol of the pseudodifferential operator, we reduce this boundary-value problem to an equivalent system of linear integral equations.

Keywords and phrases: pseudodifferential equation, integral condition, conjugation problem, wave factorization, solvability, system of linear integral equations.

AMS Subject Classification: 35J58, 45A05

1. Введение. Пусть плоский сектор имеет вид $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, \ a > 0\}$, A— эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1 \leqslant |A(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}| \leqslant c_2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим задачу нахождения нетривиальной пары функций $u_+ \in H^{s_1}(C_+^a)$, $u_- \in H^{s_2}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$ из соответствующих пространств Соболева—Слободецкого [5], удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$(Au_+)(x) = 0, \quad x \in C_+^a,$$
$$(Av_-)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a},$$

и условий, при которых такая пара может быть определена единственным образом.

Простейший вариант задачи сопряжения представляет собой классическая краевая задача Римана о нахождении пары аналитический функций в двух областях с общей границей, на которой

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FZWG-2020-0029).

их граничные значения связаны линейным соотношением [3, 4]. Для других дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений варианты таких задач сопряжения рассмотрены в [5,6,8].

Если предположить, что символ допускает волновую факторизацию [1] относительно конуса с индексом $\varkappa$, то сразу можно заключить, что при

$$|\varkappa - s| < 1/2$$

имеется только тривиальное решение. Рассматриваем случай $\varkappa - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$ и подбираем различные типы дополнительных условий на пары, при которых такая пара может быть однозначно определена. Некоторые варианты условий рассматривались в [7,8]; здесь вводим в рассмотрение комбинацию локальных и нелокальных условий на искомые функции.

Так, в частности, при дополнительном условии

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_2 = g(x_1),$$

где g — заданная функция, и линейному соотношению, связывающему граничные значения u_+, u_- на ∂C^a_+, вопрос об однозначной разрешимости сформулированной задачи сопряжения сводится к однозначной разрешимости полученной системы линейных интегральных уравнений. Эта система строится по элементам волновой факторизации и коэффициентам линейного соотношения граничных значений $u_\pm$.

2. Постановка задачи. Рассмотрим случай $s_1 = s_2$. Обозначим $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = a|x_1|, a > 0\}$. Рассмотрим следующую задачу о нахождении функции U, состоящей из двух элементов

$$U(x) = \begin{cases} U_+(x), & x \in C^a_+, \\ U_-(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C^a_+}. \end{cases}.$$

в пространстве $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$, удовлетворяющую некоторым дополнительным условиям, более точно

$$\begin{cases} (AU)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_+(x_1, x_2)dx_2 = g_0(x_1), & x_1 \in \mathbb{R}, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_-(x_1, x_2)dx_2 = g_1(x_1), & x_1 \in \mathbb{R}, \\ u_+(x) - u_-(x) = g_2(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

где u_+, u_- — граничные значения U из C^a_+ и $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C^a_+}$, соответственно, решение u разыскивается в пространстве $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$, функции $g_0, g_1 \in H^{s+1/2}(\mathbb{R})$, $g_2 \in H^{s-1/2}(\Gamma)$ заданы.

Напомним, что пространство $H^s(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, определяется как подпространство функций $u(x) \in H^s(\mathbb{R}^2)$ с носителем в $\overline{D}$ и с индуцированной нормой

$$\|u\|_s = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi \right)^{1/2},$$

где $\tilde{u}(\xi)$ обозначает преобразование Фурье функции u:

$$\tilde{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi} u(x)dx.$$

Пространство $H^s(\Gamma)$ можно трактовать как прямую сумму $H^s(\mathbb{R}_+) \oplus H^s(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+$ — положительная полуось $\{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$.

3. Волновая факторизация символа и структура общего решения. Обозначим $\overset{*}{C^a_+}$ сопряженный конус к C^a_+, который имеет вид

$$\overset{*}{C^a_+}= \{x \in \mathbb{R}^2 : ax_2 > |x_1|\},$$

и положим $\overset{*}{C^a_-}= - \overset{*}{C^a_+}$.

Радиальной трубчатой областью $T(\overset{*}{C^a_+})$ над конусом $\overset{*}{C^a_+}$ понимается область двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$ вида $\mathbb{R}^2 + i\,\overset{*}{C^a_+}$ [2].

Определение 1. Волновой факторизацией символа $A(\xi)$ относительно конуса C^a_+ называется его представление в виде

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

где сомножители $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ определены всюду в $\mathbb{R}^2$ кроме, возможно, точек $a^2\xi_2^2 = \xi_1^2$;

(ii) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(\overset{*}{C^a_+})$, $T(-\overset{*}{C^a_+})$ соответственно, и эти продолжения удовлетворяют оценкам

$$|A^{\pm1}_{\neq}(\xi + i\tau)| \leqslant c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm\varkappa}, \quad |A^{\pm1}_{=}(\xi - i\tau)| \leqslant c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha-\varkappa)}, \quad \forall\tau \in \overset{*}{C^a_\pm}.$$

Число $\varkappa \in \mathbb{R}$ называется индексом волновой факторизации.

Рассмотрим отдельно уравнение

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in C^a_+. \tag{2}$$

Воспользуемся здесь одним из ключевых результатов работы [1].

Теорема 1. *Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C^a_+ с таким индексом $\varkappa$, что $\varkappa - s = n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$, то общее решение $u \in H^s(C^a_+)$ уравнения (2) в образах Фурье имеет вид*

$$\tilde u(\xi) = A^{-1}_{\neq}(\xi)\sum_{k=0}^{n-1}(\tilde a_k(\xi_1 - a\xi_2)(\xi_1 + a\xi_2)^k + \tilde b_k(\xi_1 + a\xi_2)(\xi_1 - a\xi_2)^k),$$

где a_k, b_k — произвольные функции из $H^{s_k}(\mathbb{R})$, $s_k = s - \varkappa + k + 1/2$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Имеют место априорные оценки

$$\|u\|_s \leqslant C\sum_{k=0}^{n-1}([a_k]_{s_k} + [b_k]_{s_k}),$$

где $[\cdot]_s$ обозначает $H^s(\mathbb{R})$-норму.

4. Разрешимость задачи сопряжения. При $n = 1$ утверждение теоремы 1 выглядит следующим образом:

$$\tilde U_+(\xi) = A^{-1}_{\neq}(\xi)(\tilde a_0(\xi_1 - a\xi_2) + \tilde b_0(\xi_1 + a\xi_2)).$$

Рассмотрим другое уравнение

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C^a_+}. \tag{3}$$

Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что общее решение уравнения (3) выглядит подобным образом,

$$\tilde U_-(\xi) = A^{-1}_{=}(\xi)(\tilde c_0(\xi_1 - a\xi_2) + \tilde d_0(\xi_1 + a\xi_2)),$$

где c_0, d_0 — другая пара произвольных функций.

Наша задача — описать алгоритм однозначного определения четверки произвольных функций при заданных граничных условиях.

Во-первых, отметим, что интегральные условия задачи (1) в образах Фурье принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{U}_+(\xi_1, 0) &= \tilde{g}_0(\xi_1), \\ \tilde{U}_-(\xi_1, 0) &= \tilde{g}_1(\xi_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Во-вторых, сужение функции $u(x_1, x_2)$ на прямую, например, $x_2 = 0$ в образах Фурье выглядит следующим образом:

$$F_{x_1 \to \xi_1}(u(x_1, 0)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2) d\xi_2. \tag{5}$$

Используя (4) и (5), сконструируем систему линейных интегральных уравнений, эквивалентную задаче (1).

Применение условий (4) сразу позволяет выписать одну зависимость, связывающую четыре произвольные функции. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{U}_+(\xi_1, 0) &= A_{\neq}^{-1}(\xi_1, 0)(\tilde{a}_0(\xi_1) + \tilde{b}_0(\xi_1)), \\ \tilde{U}_-(\xi_1, 0) &= A_{=}^{-1}(\xi_1, 0)(\tilde{c}_0(\xi_1) + \tilde{d}_0(\xi_1)), \end{aligned}$$

откуда получаем первое два соотношения

$$\begin{aligned} A_{\neq}^{-1}(\xi_1, 0)(\tilde{a}_0(\xi_1) + \tilde{b}_0(\xi_1)) &= \tilde{g}_0(\xi_1), \\ A_{=}^{-1}(\xi_1, 0)(\tilde{c}_0(\xi_1) + \tilde{d}_0(\xi_1)) &= \tilde{g}_1(\xi_1). \end{aligned} \tag{6}$$

Теперь перейдем к граничным значениям. Делаем замену переменных, которая переводит $\overset{*}{C}{}^a_+$ во второй квадрант,

$$\begin{cases} \xi_1 - a\xi_2 = t_1 \\ \xi_1 + a\xi_2 = t_2 \end{cases}$$

и переобозначаем

$$\tilde{U}_\pm\left(\frac{t_2 + t_1}{2}, \frac{t_2 - t_1}{2a}\right) \equiv \tilde{V}_\pm(t_1, t_2),$$

$$A_{\neq}\left(\frac{t_2 + t_1}{2}, \frac{t_2 - t_1}{2a}\right) \equiv a_{\neq}(t_1, t_2), \quad A_{=}\left(\frac{t_2 + t_1}{2}, \frac{t_2 - t_1}{2a}\right) \equiv a_{=}(t_1, t_2),$$

так что граничные значения $u_\pm$ на сторонах угла представляют собой граничные значения $v_\pm$ осях координат в переменных t_1, t_2. Теперь можем переписать общее решение в новых координатах

$$\begin{aligned} \tilde{V}_+(t_1, t_2) &= a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2)(\tilde{a}_0(t_1) + \tilde{b}_0(t_2)), \\ \tilde{V}_-(t_1, t_2) &= a_{=}^{-1}(t_1, t_2)(\tilde{c}_0(t_1) + \tilde{d}_0(t_2)). \end{aligned}$$

Согласно свойству преобразования Фурье о линейной замене переменных C^a_+ также трансформируется в квадрант, так что граничные значения решения в новых координатах также будут определены на осях координат. Тогда по свойству (5) можем записать

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2)(\tilde{a}_0(t_1) + \tilde{b}_0(t_2)) dt_1 = \tilde{v}_+(0, t_2)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1, t_2)(\tilde{a}_0(t_1) + \tilde{b}_0(t_2)) dt_2 = \tilde{v}_+(t_1, 0),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1, t_2)(\tilde{c}_0(t_1) + \tilde{d}_0(t_2)) dt_1 = \tilde{v}_-(0, t_2),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)(\tilde{c}_0(t_1)+\tilde{d}_0(t_2))dt_2 = \tilde{v}_-(t_1,0).$$

Обозначим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)dt_1 \equiv r_1(t_2), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)dt_2 \equiv r_2(t_1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)dt_1 = r_3(t_2), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)dt_2 = r_4(t_1).$$

Теперь можем выписать два интегральных уравнения в соответствии с граничным условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{a}_0(t_1)dt_1 + \tilde{b}_0(t_2)r_1(t_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{c}_0(t_1)dt_1 - \tilde{d}_0(t_2)r_3(t_2) = \tilde{g}_{21}(t_2),$$

$$r_2(t_1)\tilde{a}_0(t_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{b}_0(t_2)dt_2 - r_4(t_1)\tilde{c}_0(t_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{d}_0(t_2))dt_2 = \tilde{g}_{22}(t_1),$$

где $\tilde{g}_{21}(t_2)$, $\tilde{g}_{22}(t_1)$ — преобразования Фурье граничных функций (элементов g_2) на сторонах квадранта.

Таким образом, получены 4 уравнения для определения четырех неизвестных функций. Очевидно, что из выражается через, и — через

$$\tilde{b}_0(\xi_1) = A_{\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}_0(\xi_1) - \tilde{a}_0(\xi_1),$$
$$\tilde{d}_0(\xi_1) = A_{=}(\xi_1,0)\tilde{g}_1(\xi_1) - \tilde{c}_0(\xi_1).$$

Тогда получим систему двух линейных интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций $\tilde{a}_0, \tilde{c}_0$:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{a}_0(t_1)dt_1 - \tilde{a}_0(t_2)r_1(t_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{c}_0(t_1)dt_1 + \tilde{c}_0(t_2)r_3(t_2) = \tilde{f}_1(t_2) \\ r_2(t_1)\tilde{a}_0(t_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{a}_0(t_2)dt_2 - r_4(t_1)\tilde{c}_0(t_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)\tilde{c}_0(t_2))dt_2 = \tilde{g}_{22}(t_1), \end{cases} \tag{7}$$

где введены обозначения

$$\tilde{f}_1(t_2) = \tilde{g}_{21}(t_2) - A_{\neq}(t_2,0)\tilde{g}_0(t_2)r_1(t_2) - A_{=}(t_2,0)\tilde{g}_1(t_2)r_3(t_2),$$

$$\tilde{f}_2(t_1) = \tilde{g}_{22}(t_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\neq}^{-1}(t_1,t_2)A_{\neq}(t_2,0)\tilde{g}_0(t_2)dt_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} a_{=}^{-1}(t_1,t_2)A_{=}(t_2,0)\tilde{g}_1(t_2)dt_2.$$

Таким образом, приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C_+^a с таким индексом $\varkappa$, что $\varkappa - s = 1+\delta, |\delta| < 1/2$, то однозначная разрешимость задачи* (1) *эквивалентна однозначной разрешимости системы интегральных уравнений* (7).

5. Заключение. Конечно, пока неясно, что можно сказать о разрешимости этой системы интегральных уравнений, однако с точки зрения вычисления система одномерных уравнений выглядит предпочтительней двумерной задачи. В некоторых специальных случаях возможно дальнейшее продвижение и сведение системы (7) к системе линейных алгебраических уравнений (см., например, [9]). Авторы надеются разобрать эти ситуации в последующих публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — М.: КомКнига, 2010.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
5. *Эскин Г. И.* Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1970. — *21.* — С. 245–292.
6. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
7. *Vasil'ev V. B.* On some new boundary-value problems in nonsmooth domains// J. Math. Sci. — 2011. — *173*, № 2. — P. 225–230.
8. *Vasilyev V. B.* On some transmission problems in a plane corner// Tatra Mt. Math. Publ. — 2015. — *63.* — P. 291–301.
9. *Vasilyev V. B.* General boundary-value problems for pseudo-differential equations and related difference equations// Adv. Difference Equations. — 2013. — *1.* — P. 289–295.

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: vbv57@inbox.ru

Эберлейн Николай Владимирович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: eberlein92@mail.ru