ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 107–118
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-107-118

УДК 517.933; 531.01

АЛГОРИТМЫ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ПРЯМОГО И НЕПРЯМОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Посвящается И. Т. Борисенку

Аннотация. Рассмотрена диагностика неисправностей в системе непрямого управления объектом, движение которого описывается нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями третьего порядка (задача Б. В. Булгакова). Рассматривается также диагностика неисправностей в одной системе прямого управления движением летательного аппарата, которое может быть описано нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. В соответствии с разработанной ранее методикой построен алгоритм диагностирования.

***Ключевые слова*:** задача дифференциальной диагностики, система непрямого управления, система прямого управления, диагностирование, сфера контроля, асимптотическая устойчивость.

DIAGNOSTIC ALGORITHMS IN SOME SYSTEMS OF DIRECT AND INDIRECT CONTROL

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. We discuss the diagnostics of malfunctions in a system of indirect control of an object whose motion is governed by third-order nonlinear ordinary differential equations (B. V. Bulgakov's problem). We also consider diagnostics of malfunctions in one system of direct control of the aircraft described by second-order nonlinear differential equations. Using methods developed earlier, we construct a diagnostic algorithm.

***Keywords and phrases*:** problem of differential diagnostics, indirect control system, direct control system, diagnostics, sphere of control, asymptotic stability.

***AMS Subject Classification*:** 34Cxx, 62-xx

1. Введение. Задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления, в решение которой значительный вклад внес И. Т. Борисенок (см. [1, 2]), может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля, т.е. установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, т.е. поиску происшедшей неисправности (см. [8, 9]). Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта, в любой точке внутри данной поверхности контроля (см. [10, 11, 22]).

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации может быть выбрана поверхность контроля (см. [17, 18]).

Задача диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма краткого интервала времени, например, за полупериод или за четвертую часть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. Эти обстоятельства иногда не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики.

2. Задача контроля как начальная задача диагностики. Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$x' = f_0(x,t), \quad x(t_0) = x^0 \in S^0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T_0, \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где x — n-мерный фазовый вектор системы, $f_0(x,t)$ — непрерывная (или гладкая) вектор-функция, S^0 — известная с центром в начале координат и радиуса R^0 сфера начальных значений, T_0 — конечное время.

Предположим, что тривиальное решение системы (1) при условии

$$f_0(0,t) \equiv 0, \quad \forall t \in [t_0, T_0],$$

асимптотически устойчиво и описывает желаемое движение, которое обеспечивается во времени в рассматриваемой области пространства системой управления (СУ) посредством функции $u(t)$. Структура СУ (управление $u(t)$) и соответствующие параметры выбираем, исходя из цели управления и условий устойчивости системы (1), полученных, например, с помощью некоторой функции Ляпунова $v(x,t) > 0$. Систему (1), удовлетворяющую перечисленным условиям, обычно называют исправной (см. [27, 28]).

Пусть в СУ движением данного объекта может произойти l неисправностей. Формально определим неисправность следующим образом. Априори известно, что в некоторый случайный момент времени t правая часть системы (1) изменяется каким-либо из l способов. При этом система (1) заменяется одной из систем следующего вида:

$$x' = f_j(x,t), \quad x(t_0) = x^0 \in S^0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T_0, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{2}$$

Фазовая траектория системы (1) после возникновения неисправности в некоторый момент времени непрерывно продолжается некоторой траекторией одной из систем вида (2).

Предположим, что наблюдение за некоторыми компонентами фазового вектора (данные компоненты, как известно, образуют вектор контроля $y(t)$ (см. [30, 31]), размерность которого m, очевидно, не превзойдет размерность n фазового вектора $x(t)$) дает возможность судить о том, что система вида (2) исправна, или что в этой системе произошла неисправность. Задачу контроля сформулируем так.

В фазовом пространстве вектора контроля $y(t)$ требуется построить сферу S_R радиуса R такую, чтобы фазовые траектории вектора контроля, при интегрировании системы (1) с начальными условиями из некоторой выбранной сферы S^0 в течение времени $t < T_0 - t_0$ лежали внутри сферы S_R, а траектории систем вида (2) пересекались со сферой S_R.

Пусть фазовая траектория системы (1) находится в малой окрестности начала координат, а неисправности таковы, что они доставляют неустойчивость тривиального решения системы (1) (см. [3, 4, 7]). В некоторый случайный момент времени происходит неисправность, т.е. непрерывный переход на траекторию одной из систем вида (2), которая выходит из окрестности начала координат.

В этом случае, проводя розыгрыш начальных условий x^0 из ограниченного множества S^0 и с этими начальными условиями интегрируя систему (1) на интервале времени $[t_0, T_0]$, можно построить m ансамблей портретов координат вектора контроля $y(t)$. В качестве сферы контроля S_R можно выбрать сферу, охватывающую объем ансамблей.

Изложенный подход позволяет решать задачу контроля и в случае, когда среди систем вида (2) имеются устойчивые системы (т.е. системы, тривиальное решение которых асимптотически устойчиво). Траектории $y(t)$ таких систем, выходящие из сферы S^0, также должны пересекать сферу S_R.

Рассмотрим также сферу контроля S_R и квадратичную форму

$$(y, y') = 0.$$

Этим уравнением для каждой из систем вида (2) определяется объем траекторий вектора контроля. Границу этого объема изнутри будем аппроксимировать некоторой конической поверхностью, пересечение которой со сферой S_R обозначим через S_R^j, $j = 1, \dots, l$. Фазовые траектории вектора контроля $y(t)$, полученные интегрированием j-й системы вида (2) с начальными условиями из сферы S^0 ($R^0 < R$), будут выходить из сферы S_R через множество S_R^j. Те множества S_R^j, которые не пересекаются с другими траекториями вектора контроля, определяют номер неисправности. В противном случае j-я гипотеза отбрасывается сразу (см. также [12, 13, 19, 20]).

Таким образом, уже при решении задачи контроля можно уменьшить список систем вида (2) и даже диагностировать некоторые неисправности.

3. Некоторая динамическая система с непрямым управлением. Рассмотрим динамическую систему с непрямым управлением, которая впервые изучена Б. В. Булгаковым:

$$\begin{cases} T^2\eta'' + U\eta' + k\eta = T^2\xi, \\ \xi' = \varphi(\sigma), \\ \sigma = a\eta + E\eta' + G^2\eta'' - \dfrac{1}{l}\xi. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь T^2 — постоянная, характеризующая инерционность объекта управления, $U > 0$ и $k > 0$ — его естественное демпфирование и восстанавливающая сила; a, E, G^2, l — постоянные параметры системы управления. Величина $\varphi(\sigma)$ принадлежит к классу так называемых допустимых функций и удовлетворяет условиям

$$\varphi(\sigma) = 0 \ \text{ при } \ \sigma = 0 \quad \text{и} \quad \sigma\varphi(\sigma) > 0 \ \text{ при } \ \sigma \neq 0.$$

Будем считать, что в задаче (3) мы параметры T^2, U, k не изменяются в процессе движения, а параметры a, E, G^2, l в процессе движения могут претерпевать изменения.

Сначала необходимо найти условия асимптотической устойчивости тривиального решения системы (3) в пространстве ее параметров.

3.1. Достаточные условия устойчивости. Уравнения (3) запишем в следующей форме ($\eta = x_1$, $\eta' = x_1' = x_2$):

$$x' = Ax + b\xi, \quad \xi' = \varphi(\sigma), \quad \sigma = C^*x - \rho\xi. \tag{4}$$

Здесь

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix};$$

$$a_1 = \frac{U}{T^2} > 0, \quad a_2 = \frac{k}{T^2} > 0, \quad \rho = \frac{1}{l} - G^2, \quad \gamma_1 = E - U\frac{G^2}{T^2}, \quad \gamma_2 = a - k\frac{G^2}{T^2};$$

звездочкой обозначено транспонирование. Матрица A в (4) является «устойчивой», поскольку корни ее характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

имеют отрицательные действительные части (E — единичная матрица).

Приведем уравнения (4) к виду ($x' = \zeta$)

$$\zeta' = A\zeta + b\varphi(\sigma), \quad \sigma' = C^*\zeta - \rho\varphi(\sigma). \tag{5}$$

При этом для невырожденности преобразования координат

$$\zeta = Ax + b\xi, \quad \sigma = C^* x - \rho\xi, \tag{6}$$

необходимо и достаточно, чтобы следующий определитель был отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} A & b \\ C^* & -\rho \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

Поскольку $|A| = a^2 \neq 0$, из (7) получаем условие

$$\rho \neq -C^* A^{-1} b = \frac{\gamma_2}{a^2} \quad \text{или} \quad a \neq \frac{1}{l}\frac{k}{T^2}. \tag{8}$$

Задача состоит в определении такой области значений параметров (регулятора), при которых гарантируется асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (5).

Возьмем функцию Ляпунова

$$V = \zeta^* B\zeta + \int\limits_0^\sigma \varphi(s)ds.$$

Ее полная производная в силу системы (5) имеет вид

$$-\dot{V}\big|_{(5)} = \begin{pmatrix} \zeta^* & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & d \\ d^* & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \varphi \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$-C = A^* B = BA, \quad -d = Bb + \frac{1}{2}C. \tag{10}$$

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ q_0 & r_0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что если выполнены неравенства

$$p > 0, \quad r - q^2 > 0, \tag{11}$$

то матрица C положительно определена.

Из второго неравенства (11) следует, что должно быть выполнено строгое неравенство

$$r > 0. \tag{12}$$

Из первого равенства (10) находим

$$p = 2a_2 q_0, \quad q = a_1 q_0 + a_2 r_0 - p_0, \quad r = 2(a_1 r_0 - q_0). \tag{13}$$

Определитель системы (13) относительно неизвестных p_0, q_0, r_0 равен $4a_1a_2 > 0$, поэтому данная система имеет единственное решение:

$$p_0 = \frac{1}{2}\frac{a_1^2 + a_2}{a_1 a_2} p - q + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} r, \quad q_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{a_2} p, \quad r_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{a_1 a_2} p + \frac{1}{2}\frac{1}{a_1} r. \tag{14}$$

Далее используем так называемую модификацию Лурье: на выбор параметров системы (5) наложим ограничение, положив $d = 0$. Тогда в соответствии с (10), учитывая (13), получаем два соотношения:

$$p + a_2\gamma_2 = 0, \quad p + ra_2 + a_1 a_2 \gamma_1 = 0. \tag{15}$$

Из первого равенства (15) в силу первого условия (11) следует, что $\gamma_2 < 0$, а из второго равенства (15), в соответствии с неравенством (12), заключаем, что и $\gamma_1 < 0$. Исключая p из (15), с учетом неравенства (12) находим $\gamma_2 > a_1\gamma_1$.

Таким образом, имеем три условия устойчивости параметров системы (3):

$$\gamma_1 < 0, \quad \gamma_2 < 0, \quad \gamma_2 > a_1\gamma_1. \tag{16}$$

К этим условиям необходимо добавить условие, вытекающее непосредственно из (8):

$$\rho > d^* C^{-1} d = 0. \tag{17}$$

Группы неравенств (16) и (17) являются достаточными условиями асимптотической устойчивости тривиального решения рассматриваемой системы. Запишем их в исходных обозначениях:

$$E < U\frac{G^2}{T^2}, \quad 0 < k\frac{G^2}{T^2} - a < \frac{U}{T^2}\left(U\frac{G^2}{T^2} - E\right), \quad G^2 < \frac{1}{l}. \tag{18}$$

Рассмотрим трехмерное пространство параметров a, E, G^2. В этом пространстве условия (18) задают область $\overline{Y}$, целиком принадлежащую области Y, и соответствуют асимптотической устойчивости тривиального решения исходной системы. Область $\overline{Y}$ ограничена следующими плоскостями:

$$G^2 = \frac{ET^2}{U}. \quad G^2 = \frac{aT^2}{k}. \quad G^2 = \frac{1}{l}. \quad G^2 = T^2\frac{a - EU/T^2}{k - U^2/T^2}.$$

Условие (7) невырожденности преобразования (6) удовлетворяется во всех внутренних точках этой области. Номинальные значения $\overline{a}$, $\overline{E}$, $\overline{G^2}$ параметров a, E, G^2 выбираем внутри области $\overline{Y}$.

Рассмотрим численный пример и алгоритмы решения задачи диагностики (см. [5, 6]).

3.2. Исправная система. Пусть параметры объекта управления рассматриваемой системы (3) имеют значения

$$T = 1; \quad U = 0{,}4; \quad k = 1; \tag{19}$$

а параметры a, E, G^2 системы управления объектом — номинальные значения из области $\overline{Y}$:

$$\overline{a} = 0{,}5; \quad \overline{E} = 0{,}2; \quad \overline{G^2} = 0{,}5. \tag{20}$$

Кроме того, будем считать, что «параметр обратной связи» (l) удовлетворяет условию

$$l = 1. \tag{21}$$

Тривиальное решение системы (3) с параметрами (19)—(21) асимптотически устойчиво. Эту систему и будем считать исправной.

В качестве (замкнутой) области начальных условий H выберем шар (ограниченный сферой S_r) радиуса r:

$$H : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant r^2. \tag{22}$$

Если выбрать $r = 0{,}7$, то любая траектория системы (3) с параметрами (19)—(21) и начальными условиями из области (22) за конечное время вернется в H и не выйдет оттуда, т.е. будет лежать в области притяжения начала координат.

3.3. Выбор сферы контроля S_R. При выборе сферы контроля S_R радиуса R использована идея метода статистических испытаний (см. [14, 15, 25]). Выбор точки в пространстве параметров осуществлен так. Параметры a, E, G^2 приняты независимыми нормально распределенными случайными величинами с математическими ожиданиями $\overline{a}$, $\overline{E}$, $\overline{G^2}$ и дисперсиями $\sigma_a^2 = 0{,}03$, $\sigma_E^2 = 0{,}005$ и $\sigma_{G^2}^2 = 0{,}03$, обеспечивающими близкую к единице вероятность попадания в область $\tilde{Y} \subset \overline{Y}$, имеющую следующие параметры:

$$\tilde{Y}: \quad \overline{a} \pm 3\sigma_a, \quad \overline{E} \pm 3\sigma_E, \quad \overline{G^2} \pm 3\sigma_{G^2}. \tag{23}$$

Для выбора точки в области H начальных условий будем полагать, что при любых фиксированных параметрах из только что построенной области $\tilde{Y}$ область H начальных условий целиком погружена в область притяжения начала координат. В этом случае любая траектория, начинающаяся из области H, за конечное время вернется в H и уже не выйдет оттуда.

Обозначим через X_H область фазового пространства, заполненную траекториями системы, начинающимися в области H. Для отыскания границ множества X_H достаточно рассмотреть только те траектории, которые начинаются со сферы S_r, а в качестве поверхности контроля выбрать сферу S_R, охватывающую множество X_H.

Таблица 1

Неисправность	a	E	G^2	$1/l$
1	0,5	1,5	0,5	1
2	0,5	0,2	1,5	1
3	0,5	0,2	0,5	0

Таблица 2

M_j	$N=1$	$N=2$	$N=3$
M_1	$0{,}50124 \cdot 10^{-4}$	$0{,}74702 \cdot 10^{-9}$	$0{,}43220 \cdot 10^{-9}$
M_2	$0{,}11825 \cdot 10^{-6}$	$0{,}14546 \cdot 10^{-10}$	$0{,}24749 \cdot 10^{-11}$
M_3	$0{,}12751 \cdot 10^{-6}$	$0{,}22850 \cdot 10^{-10}$	$0{,}13614 \cdot 10^{-10}$

Начальные условия считаем независимыми и равномерно распределенными по следующей сфере (радиуса $r = 0{,}7$):

$$S_r : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0{,}7^2. \tag{24}$$

Точку в пространстве параметров $\tilde{Y}$ (23) и точку в пространстве начальных условий на сфере S_r (24) выбираем независимо одну от другой. В качестве сферы S_R выбрана сфера радиуса $R = 1$, целиком содержащая множество X_H из более чем 600 траекторий.

3.4. Неисправные системы. Рассмотрим три неисправных системы вида (3) с параметрами, приведенными в таблице 1, и со следующими видами неисправностей: 1 — неисправен датчик угловой скорости, 2 — неисправен прибор, вырабатывающий сигнал, пропорциональный угловому ускорению, 3 — оборвана обратная связь в исполнительном органе. Все описанные неисправности имеют различную физическую природу и различные размерности, т.е. являются невырожденными. Перечисленные неисправности создают неустойчивость тривиального решения рассматриваемой системы. Интегрирование уравнений системы (3) с параметрами, соответствующими неисправным системам, начиналось из точек, равномерно распределенных на сфере S_r радиуса $r = 0{,}7$.

3.5. Выбор констант M_j. Каждая система уравнений (3) с параметрами a, E, G^2, l, соответствующими неисправностям типов 1—3 (см. таблицу 1), проинтегрирована 450 раз. Всякий раз после выхода фазовой траектории в момент времени τ_0 на сферу S_R радиуса $R = 1$ на интервале времени $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$, где $\tau = 0{,}2$ с, для различных $N = 1, 3, 5$ осуществлен подсчет чисел

$$S_j = \sum_{i=1}^{N} [(x_{ij1} - x_{ig1}^2 + (x_{ij2} - x_{ig2}^2) + (x_{ij3} - x_{ig3}^2]. \tag{25}$$

Максимальное из 450 чисел S_j ($j = 1, 2, 3$), полученных для каждой неисправности типа 1—3 (см. таблицу 1) при $N = 1, 3, 5$, выбрано в качестве константы $M_j = \max S_j$ (при каждом фиксированном j) (см. таблицу 2).

Из таблицы 2 видно, что с возрастанием значения N величина константы M_j уменьшается. Таким образом, каждой неисправной системе соответствует определенное число M_j.

3.6. Подсчет $\overline{K_j}$, $\overline{\sigma_j}$, K_j и выбор N. С начальными условиями, равномерно распределенными на сфере S_r, интегрируем одну из неисправных систем при $j = 1, 2, 3$. После выхода фазовой траектории на сферу S_R на интервале времени $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$ при определенном $N = 1, 3, 5$ осуществляем подсчет трех сумм S_j и сравнение их с соответствующими значениями M_j, которые ранее были определены для данных N и j. Количество величин S_j, удовлетворяющих неравенству $S_j \leqslant M_j$, обозначим через $K_j^k(x_0^i)$. Интегрирование уравнений определенной неисправной системы с различными начальными условиями повторяем $k = 50$ раз и таким образом получаем следующие величины (см. [16, 21]):

$$\overline{K_j} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} K_j^k(x_0^i), \quad \overline{\sigma_j} = \left[\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} (\overline{K_j} - K_j^k(x_0^i))^2 \right]^{1/2}, \quad K_j = \overline{K_j} \pm \frac{\overline{\sigma_j}}{\sqrt{50}}.$$

Для рассматриваемой системы уравнений (3) с неисправностями (см. таблицу 2) 1, 2, 3 при произвольных начальных условиях на сфере S_r и $k = 50$, $N = 1, 3, 5$, получено значение $K_j = 1$ с ошибкой в вычислении, не превышающей 2%. Поэтому достаточно выбрать $N = 1$.

Таким образом, при одном измерении, исключая измерение начальных условий в момент выхода фазовой траектории системы на сферу S_R, алгоритм диагностирования позволяет точно определять указанные неисправности.

3.7. Реализация алгоритма восстановления. Используем найденные параметры алгоритма восстановления S_R, M_j, N для обнаружения возникшей неисправности и восстановления системы (3). В результате математического эксперимента по восстановлению системы (3) при неисправном датчике угловой скорости, т.е. с параметрами неисправности 1, установлено, что неисправность возникает в окрестности начала координат $(0; 0; 0{,}1)$ и фазовая точка перемещается по некоторой фазовой траектории T_1.

Согласно алгоритму поиска неисправности процесс восстановления осуществляется следующим образом. В момент τ_0 фазовая траектория неисправной системы встречается со сферой S_R. На интервале $[\tau_0, \tau]$ происходит поиск неисправности (формируются суммы S_j, которые сравниваются с соответствующими константами M_j; $N = 1$). В момент $\tau = 0{,}2$ с происходит обнаружение неисправности и подключение исправной системы. После этого фазовая точка по некоторой фазовой траектории T_2 возвращается в окрестность начала координат.

В случае, когда в системе управления (3) доступна измерению только одна фазовая координата, $x_1 = \eta$, а функционал диагностирования (25) имеет вид

$$S_j = \sum_{i=1}^{N} (x_{ij1} - x_{ig1})^2, \quad j = 1, 2, 3,$$

получается результат, аналогичный изложенному выше.

4. Некоторая динамическая система с прямым управлением (о движении летательного аппарата). Как уже отмечалось ранее (см. [1, 2]), задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля, т.е. установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, т.е. поиску происшедшей неисправности. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта, в любой точке внутри данной поверхности контроля (см. [23, 24]).

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации может быть выбрана поверхность контроля.

Задача диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма краткого интервала времени, например, за полупериод или за четвертую часть периода быстрых колебаний объекта, и не требовал дополнительного приборного обеспечения. Эти обстоятельства зачастую не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики.

Рассмотрим применение развиваемой методики диагностирования на интересном примере, взятом из теории летательных аппаратов.

4.1. Уравнения движения. Рассмотрим летательный аппарат с прямым управлением, движение которого может быть описано следующими нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка (см. [26]):

$$x' = A(x)\xi - b\delta, \quad \delta = \Phi(\zeta), \quad \zeta = r^T x + h\varphi(x, \delta, f(\eta)). \tag{26}$$

Здесь δ — координата управления;

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— вектор, характеризующий состояние летательного аппарата, и постоянная «устойчивая» матрица (т.е. действительные части ее собственных значений отрицательны);

$$\varphi(x, \delta, f(\eta)) = \int_{t_0}^{t} (p^T x + q\delta - f(\eta))dt;$$

матрицы

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

постоянны; q и h — постоянные скалярные величины; T — символ транспонирования матрицы.

Функции $\Phi(\zeta)$ и $f(\eta)$ (η — формируемый сигнал обратной связи) принадлежат к классу допустимых функций: они определены и непрерывны при всех значениях ζ и η и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\Phi(\zeta) = 0, \qquad \zeta = 0; \qquad \zeta\Phi(\zeta) > 0, \qquad \zeta \neq 0, \\ &f(\eta) = 0, \qquad \eta = 0; \qquad \eta f(\eta) > 0, \qquad \eta \neq 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Первая задача, которая возникает при исследовании системы (26), ставится следующим образом: найти такое формируемое η, которое не доставляет неустойчивости аппарату и обеспечивает выполнение цели управления. Целью управления может быть, например, отслеживание системой формируемого сигнала η. Для решения этой задачи прежде всего необходимо найти условия, при выполнении которых система (26) является устойчивой.

4.2. Достаточные условия устойчивости. В дальнейшем требуется выражение для ζ'. В силу системы (26) выполнены следующие равенства:

$$\zeta' = r^T x' + h\varphi' = c^T x - \rho\Phi(\zeta) - hf(\eta), \tag{28}$$

где

$$c = r^T A + hp^T = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{22} \end{pmatrix}, \quad \rho = r^T b + hq.$$

Функцию Ляпунова выберем в следующем виде:

$$V = x^T Bx + \int_0^{\zeta} \Phi(\zeta)d\zeta. \tag{29}$$

Полная производная по времени функции Ляпунова в силу системы (26) имеет вид

$$V' = x'^T Bx + x^T Bx' + \Phi(\zeta)\zeta'.$$

В силу (26) и (28) производная вдоль траектории будет равна

$$-V' = \begin{pmatrix} x^T & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & d \\ d^T & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \Phi \end{pmatrix} + \Phi(\zeta)hf(\eta), \tag{30}$$

где

$$-C = A^T B + BA, \quad d = Bb - \frac{1}{2}c.$$

Для положительной определенности величины $-V'$ как квадратичной формы от x, Φ и f потребуем выполнение условий

$$C > 0, \quad \rho > d^T C^{-1} d, \quad h > 0, \quad \Phi(\zeta)f(\eta) > 0. \tag{31}$$

Далее, положительную определенность величины $-V'$ гарантировать значительно проще, положив

$$d = Bb - \frac{1}{2}c = 0. \tag{32}$$

В силу (32) из (31) следует, что

$$\rho = r_1 b_1 + r_2 b_2 + hq > 0. \tag{33}$$

Из (31) также следует, что функция $f(\eta)$ должна иметь тот же знак, что и функция $\Phi(\zeta)$.

Перейдем теперь к совместному решению уравнений Ляпунова (30) и уравнения (32). С этой целью выберем матрицы B и C в следующем виде:

$$B = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ q_0 & r_0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Если в (34) принять, что $p > 0$, $r > 0$, то матрица C положительно определена.

С учетом (34) и уравнения Ляпунова (30) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -p = 2\left(\left(a_{11} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)p_0 - \dfrac{a_{21}^2}{a_{11}+a_{22}}r_0\right), \\ -r = 2\left(\left(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)r_0 + \dfrac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}p_0\right), \end{cases} \tag{35}$$

где $a_{11} + a_{22} \neq 0$. Если определитель системы алгебраических уравнений (35) относительно неизвестных p_0, r_0, равный

$$\Delta = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \tag{36}$$

отличен от нуля, то система (35) будет иметь единственное решение. Предположим, что определитель (36) не равен нулю, и выпишем решение системы уравнений (35) в следующем виде:

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{2}{\Delta}\left(-\left(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)p - \dfrac{a_{21}^2}{a_{11}+a_{22}}r\right), \\ r_0 = \dfrac{2}{\Delta}\left(-\left(a_{11} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)r - \dfrac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}p\right). \end{cases} \tag{37}$$

При этом

$$q_0 = \frac{2}{\Delta}\frac{1}{a_{11}+a_{22}}(a_{12}a_{22}p + a_{21}a_{11}r). \tag{38}$$

Далее, учитывая (34), выпишем решение уравнения (32). Имеем:

$$p_0 b_1 + q_0 b_2 = \frac{1}{2}c_{11}, \quad q_0 b_1 + r_0 b_2 = \frac{1}{2}c_{22}. \tag{39}$$

Перепишем уравнения (39) с учетом (37) и (38):

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\Delta}\left\{\left(-b_1\left(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right) + b_2\dfrac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}\right)p + \left(-b_1\dfrac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} + b_2\dfrac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}}\right)r\right\} = \dfrac{1}{2}c_{11}, \\ \dfrac{2}{\Delta}\left\{\left(b_1\dfrac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} - b_2\dfrac{a_{12}^2}{a_{11}+a_{22}}\right)p + \left(b_1\dfrac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2\left(a_{11} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)r\right\} = \dfrac{1}{2}c_{22}. \end{cases} \tag{40}$$

Определитель системы (40) имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\Delta} = \left(-b_1\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right) + b_2\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}}\right)\left(b_1\frac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right) - \\ - \frac{1}{(a_{11}+a_{22})^2}\big(-b_1a_{21}^2 + b_2a_{21}a_{11}\big)\big(b_1a_{12}a_{22} - b_2a_{12}^2\big). \end{aligned} \tag{41}$$

Решение системы алгебраических уравнений (40) примет следующий вид:

$$\begin{cases} p = \dfrac{1}{\Delta\overline{\Delta}}\left\{\left(b_1\dfrac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2\left(a_{11} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{11} - \dfrac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_2a_{21}a_{11} - b_1a_{21}^2)c_{22}\right\}, \\ r = \dfrac{1}{\Delta\overline{\Delta}}\left\{\left(b_2\dfrac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} - b_1\left(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{22} - \dfrac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_1a_{12}a_{22} - b_2a_{12}^2)c_{11}\right\}. \end{cases} \tag{42}$$

Учитывая условия $p > 0$ и $r > 0$, из (42) получим

$$\begin{cases} \left(b_1\dfrac{a_{21}a_{11}}{a_{11}+a_{22}} - b_2\left(a_{11} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{11} > \dfrac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_2a_{21}a_{11} - b_1a_{21}^2)c_{22}, \\ \left(b_2\dfrac{a_{12}a_{22}}{a_{11}+a_{22}} - b_1\left(a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}}\right)\right)c_{22} > \dfrac{1}{a_{11}+a_{22}}(b_1a_{12}a_{22} - b_2a_{12}^2)c_{11}. \end{cases} \tag{43}$$

Таким образом, если

$$a_{11} + a_{22} \neq 0, \quad \Delta \neq 0, \quad \overline{\Delta} \neq 0,$$

то выполняются условия $h > 0$, (33) и (43). Поэтому рассматриваемая система будет абсолютно устойчивой независимо от выбора допустимых функций Φ и f, удовлетворяющих условию $\Phi(\zeta)f(\eta) > 0$, т.е. все решения системы (26) будут сходиться к началу координат при $t \to +\infty$. При этом предполагается, что начало координат x_0 является единственной критической точкой системы (26).

Условие $\Phi(\zeta)f(\eta) > 0$ в силу (32) легко может быть нарушено. Могут возникнуть и другие ситуации, которые обусловят нежелательные последствия, то есть обусловят нарушение цели управления. Поэтому возникает вторая задача при исследовании системы (26) — задача диагностирования нежелательных ситуаций, то есть диагностирования неисправностей, которые могут возникнуть в системе управления летательным аппаратом.

4.3. Априорный список неисправностей. Остановимся только на диагностировании отказов в системе управления летательным аппаратом (26). Рассмотрим список отказов трех датчиков, так или иначе формирующих три обратные связи в системе управления объектом:

$$r_1 = 0. \tag{44}$$

$$r_2 = 0, \quad p_2 = 0, \quad q = 0. \tag{45}$$

$$\eta = 0. \tag{46}$$

4.4. Функционал диагностирования. Рассмотрим следующие суммы:

$$S_j = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_{jk}(t_l) - x_{gk}(t_l))^2, \quad j = 0, \dots, 3, \tag{47}$$

где $x_{jk}(t_l)$ являются значениями компонент вектора состояния рассматриваемой системы в момент t_l, $l = 1, \dots, N$, рассчитанными для j-й траектории по уравнениям (26) для исходной системы и систем с параметрами (44)—(46); величины же $x_{gk}(t_l)$ в (47) являются компонентами действительного вектора состояния, измеренного в моменты времени t_l, $l = 1, \dots, N$.

Справедлива следующая основная теорема для данной задачи.

Теорема 1. *Для конечного набора систем уравнений найдутся такие числа S_j и N* $(j = 0, \dots, 3)$, *что при некотором номере i величина $S_i = \min_j S_j$ возникшая в системе неисправность с неизвестным номером j в процессе движения объекта с помощью функционала* (47) *будет диагностирована однозначно* (ср. с теоремами из [1, 2, 29]).

Из этой теоремы и вытекает алгоритм диагностирования: из всех чисел S_j выбирается наименьшее, и номер i такого числа S_i принимается за номер случившейся неисправности. Под номером 0 в априорный список включена исходная (исправная) система (26). Алгоритм диагностирования включается циклически и, если он обнаруживает нулевую неисправность, то моделируется дальнейшее функционирование системы.

Если же номер j неисправности не был равен нулю, то выдается сигнал о возникновении j-й неисправности.

4.5. Численный эксперимент. Вычислительными средствами моделировалось поведение рассматриваемой системы, возникновение неисправности в системе и диагностика этой неисправности. Как уже отмечалось, априорный список содержал три неисправности, каждая из которых характеризует обрыв, соответствующий обратной связи в системе управления. В рассматриваемом примере вектор диагностирования был вектором состояния системы (x_1, x_2). Число измерений $N = 3$.

Моделировалось исправное движение системы, начинавшееся в момент $t_0 = 0$, затем возникновение неисправности № 1 в момент $t_1 = 15$ с, включение алгоритма диагностирования в момент $t_2 = 20$ с. Алгоритм правильно диагностировал неисправность в момент $t_3 = 24$ с.

Неисправность № 2 моделировалась аналогичным образом, значения t_0, t_1, t_2, t_3 были такими же, как при моделировании неисправности № 1. Неисправность № 2 была определена в момент t_3 правильно.

Неисправность № 3 моделировалась следующим образом: начало функционирования — момент $t_0 = 0$, возникновение неисправности — $t_1 = 10$ с, включение алгоритма — $t_2 = 15$ с. При первом включении алгоритм диагностировал систему как исправную, поэтому функционирование системы продолжалось и алгоритм включился вторично в момент $t_3 = 30$ с и правильно диагностировал неисправность № 3 в момент $t_4 = 34$ с.

5. Заключение. Сначала рассмотрен модельный пример по диагностике неисправностей в системе непрямого управления объектом, движение которого описывается нелинейными дифференциальными уравнениями третьего порядка, которые впервые изучались Б. В. Булгаковым. При этом используется алгоритм диагностирования, при котором выбирается сфера контроля, каждой неисправной системе ставится в соответствие некоторая константа и по определенным правилам осуществляется сравнение с этими константами чисел, полученных в процессе интегрирования уравнений и характеризующих функциональное состояние системы.

Затем на уровне математических моделей и программ рассматривается диагностика систем прямого управления летательных аппаратов и показывается работоспособность предлагаемых алгоритмов диагностики. Рассматривается летательный аппарат с прямым управлением, движение которого в вертикальной плоскости (посадка) может быть описано нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Диагностике подвергаются отказы трех датчиков, формирующих три обратные связи в системе управления объектом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики// Фундам. прикл. мат. — 1999. — *5*, № 3. — С. 775–790.
2. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
3. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем// Автомат. телемех. — 1994. — № 3. — С. 24–36.
4. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование динамических систем// Автомат. телемех. — 1980. — № 3. — С. 96–121..
5. *Окунев Ю. М., Садовничий В. А., Самсонов В. А., Черный Г. Г.* Комплекс моделирования задач динамики полета// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — № 6. — С. 66–75.
6. *Пархоменко П. П., Сагомонян Е. С.* Основы технической диагностики. — М.: Энергия, 1981.
7. *Чикин М. Г.* Системы с фазовыми ограничениями// Автомат. телемех. — 1987. — № 10. — С. 38–46.
8. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: «Экзамен», 2004.
9. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. Изд. 2. — М.: «Экзамен», 2007.
10. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 4. — С. 55–66.

11. *Шамолин М. В.* Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 1. — С. 97–115.
12. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 3. — С. 73–90.
13. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 5. — С. 31–44.
14. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 1. — С. 45–52.
15. *Шамолин М. В.* Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электрон. модел. — 2011. — *33*, № 3. — С. 121–126.
16. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случаях траекторных измерений с ошибкой и точных траекторных измерений// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *150.* — С. 88–109.
17. *Шамолин М. В.* Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 1. Уравнения движения и классификация неисправностей// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2019. — *25*, № 1. — С. 32–43.
18. *Шамолин М. В.* Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 2. Задача дифференциальной диагностики// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2019. — *25*, № 3. — С. 22–31.
19. *Шамолин М. В.* Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 3. Задача контроля// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2019. — *25*, № 4. — С. 36–47.
20. *Шамолин М. В.* Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Ч. 4. Задача диагностирования (случай точных траекторных измерений)// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2020. — *26*, № 1. — С. 36–47.
21. *Шамолин М. В., Кругова Е. П.* Задача диагностики модели гиростабилизированной платформы// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *160.* — С. 137–141.
22. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959.* — 080001.
23. *Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B. J., Shwartz A.* Power control in wireless cellular networks// IEEE Trans. Automat. Control. — 2009. — *54*, № 10. — P. 2328–2340.
24. *Antoulas A. C., Sorensen D. C., Zhou Y.* On the decay rate of Hankel singular values and related issues// Syst,. Control Lett. — 2002. — *46.* — P. 323–342.
25. *Beck A., Teboulle M.* Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization// Oper. Res. Lett. — 2003. — *31*, № 3. — P. 167–175.
26. *Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A.* The ordered subsets mirror descent optimization method with applications to tomography// SIAM J. Optim. — 2001. — *12*, № 1. — P. 79–108.
27. *Ober R. J.* Balanced parameterization of classes of linear systems *// SIAM J. Control Optim. — 1991. — *29*, № 6. — P. 1251–1287.
28. *Ober R. J., McFarlane D.* Balanced canonical forms for minimal systems: A normalized coprime factor approach// Linear Algebra Appl. — 1989. — *122-124.* — P. 23–64.
29. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — *114*, № 1. — P. 976–1024.
30. *Su W., Boyd S., Candes E.* A differential equation for modeling Nesterov's accelerated gradient method: Theory and insights// J. Machine Learning Res. — 2016. — № 17 (153). — P. 1–43.
31. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru`, `shamolin@imec.msu.ru`