ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 22–54
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-22-54

УДК 517, 531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ТРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Во многих задачах динамики возникают системы с пространствами положений — трехмерными многообразиями. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к ним. В работе рассматриваются динамические системы с переменной диссипацией. В работе показана интегрируемость общих классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к трехмерным многообразиям.

***Ключевые слова*:** динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLE OF A THREE-DIMENSIONAL MANIFOLD

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In many problems of dynamics, the position spaces of systems considered are three-dimensional manifolds and hence the phase spaces of such systems are the corresponding tangent bundles. In this paper possess, we consider dynamical systems with variable (alternating) dissipation. We prove the integrability of general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on the tangent bundles of three-dimensional manifolds.

***Keywords and phrases*:** dynamical system, nonconservative force field, integrability, transcendental first integral.

***AMS Subject Classification*:** 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к трехмерному многообразию

Необходимо напомнить ряд результатов, без которых рассмотрение систем с диссипацией невозможно (см. также [1, 4, 13, 65, 66]).

1.1. Общие обозначения. Рассмотрим гладкое трехмерное риманово многообразие M^3 с метрикой g_{ij}, которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, x^2, x^3)$ на многообразии порождает гладкую аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$. Рассмотрим также $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; x^1, x^2, x^3\}$ к гладкому многообразию M^3, где $z = (z_3, z_2, z_1)$ — координаты в касательном пространстве.

Если $z_i = \dot{x}^i$, $i = 1, 2, 3$ (точкой обозначена производная по натуральному параметру), то уравнения геодезических линий имеют вид

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{11}(x)(\dot{x}^1)^2 + 2\Gamma^i_{12}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^2) + 2\Gamma^i_{13}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^3) + \\ + \Gamma^i_{22}(x)(\dot{x}^2)^2 + 2\Gamma^i_{23}(x)(\dot{x}^2)(\dot{x}^3) + \Gamma^i_{33}(x)(\dot{x}^3)^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.1}$$

1.2. Специальные обозначения. Обозначим для наглядности в случае трехмерного многообразия координаты (x^1, x^2, x^3) через (α, β), $\beta = (\beta_1, \beta_2)$.

Тогда уравнения (1.1) на касательном расслоении $T_*M^3\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примут вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + \\ \qquad + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^\alpha_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \Gamma^1_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + \\ \qquad + \Gamma^1_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^1_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + \Gamma^2_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^2_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + \\ \qquad + \Gamma^2_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Пример 1.1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, когда метрика на трехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства, уравнения (1.2) примут вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - [\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2\beta_1]\sin\alpha\cos\alpha = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dot{\beta}_2^2\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

т.е. шесть ненулевых коэффициентов связности равны

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1, \qquad \Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$
$$\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1, \qquad \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}.$$

Пример 1.2. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, но когда метрика на трехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. [5, 41–43]), уравнения (1.2) примут вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - [\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2\beta_1]\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_1\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - \dot{\beta}_2^2\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_2\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

т.е. шесть ненулевых коэффициентов связности равны

$$\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1, \qquad \Gamma^{1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha},$$
$$\Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1, \qquad \Gamma^{2}_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, \qquad \Gamma^{2}_{12}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}.$$

1.3. Замены координат касательного пространства. Исследуем структуру уравнений (1.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^3. Рассмотрим следующую обратимую замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{3} R^{ij}(x) z_j, \quad z_j = \sum_{i=1}^{3} T_{ji}(x)\dot{x}^i; \tag{1.5}$$

при этом R^{ij}, T_{ji}, $i,j = 1,2,3,$ — функции от x^1, x^2, x^3, а также $RT = E$, где $R = (R^{ij})$, $T = (T_{ji})$. Назовем уравнения (1.5) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^3 (ср. с [8, 9, 11]).

Справедливы следующие тождества:

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{3} \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{3} T_{ji}\ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^{3} T_{ji,k}\dot{x}^k, \tag{1.6}$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad j,i,k = 1,2,3.$$

Подставляя в (1.6) уравнения (1.1), имеем:

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^{3} T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^{3} T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q, \tag{1.7}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{x}^i$, $i = 1,2,3$, надо подставить формулы (1.5), и правые части соотношений (1.7) будут квадратичными формами по z_1, z_2, z_3 (см. также [3, 10, 15]). Другими словами, равенство (1.7) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^{3} Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k|_{(1.5)} = 0, \tag{1.8}$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{3} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{1.9}$$

Непосредственно из формул (1.7) получаем следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Система* (1.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (1.5), (1.7).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1.1) к эквивалентной системе уравнений (1.5), (1.7) зависит как от замены переменных (1.5) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$. В частности, для примеров 1.1, 1.2 получаем в явном виде следующие утверждения.

Следствие 1.1. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, *когда метрика на трехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства* (*см. также пример* 1.1), *система, эквивалентная при* $\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1 \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.3), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3, & \dot{z}_1 = \dfrac{z_1 z_3}{\cos\alpha\sin\alpha} - \dfrac{z_1 z_2}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \dot{z}_3 = -\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{\cos\alpha\sin\alpha}, & \dot{\beta}_1 = \dfrac{z_2}{\cos\alpha\sin\alpha}, \\ \dot{z}_2 = \dfrac{z_2 z_3}{\cos\alpha\sin\alpha} + \dfrac{z_1^2}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \dot{\beta}_2 = -\dfrac{z_1}{\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta_1}, \end{cases} \tag{1.10}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (1.10) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Следствие 1.2. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, *но когда метрика на двумерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий* (*см.* [36, 38, 39], *а также пример* 1.2), *система, эквивалентная при* $\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1 \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.4), *примет следующий вид*:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3, & \dot{z}_1 = z_1 z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \dot{z}_3 = -(z_1^2 + z_2^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, & \dot{\beta}_1 = z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, & \dot{\beta}_2 = -z_1\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \end{cases} \tag{1.11}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (1.11) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Очевидно, что системы (1.10) и (1.11) имеют аналитический первый интеграл следующего вида:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \text{const}, \tag{1.12}$$

т.е. в других координатах для системы (1.11)

$$\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_1^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dot{\beta}_2^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2\beta_1 = \text{const},$$

а для системы (1.10) — аналитический первый интеграл

$$\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_1^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \dot{\beta}_2^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta_1 = \text{const}.$$

1.4. Первые интегралы для уравнений геодезических. Случай I.

Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в следующем виде (случай I):

$$\dot{\alpha} = -z_3, \quad \dot{\beta}_1 = z_2 f_1(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \tag{1.13}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2 z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [45, 48, 49]:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (1.13) уравнения (1.7) примут вид

$$
\begin{aligned}
\dot z_1 &= \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1z_2,\\
\dot z_2 &= \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
\dot z_3 &= f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2 + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

и уравнения геодезических (1.14) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.13) почти всюду эквивалентны составной системе (1.13), (1.15) на многообразии $T_*M^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$. Для полного интегрирования системы (1.13), (1.15) шестого порядка необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов.

Следующее утверждение фиксирует исследуемую систему в задаче интегрирования уравнений геодезических.

Следствие 1.3. *Если $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения, то система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.14)*, может быть приведена к следующему виду*:

$$
\begin{cases}
\dot\alpha = -z_3,\\
\dot z_3 = f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2 + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
\dot z_2 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,\\
\dot z_1 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1z_2,\\
\dot\beta_1 = z_2f_1(\alpha),
\end{cases}
\tag{1.16}
$$

$$
\dot\beta_2 = z_1f_2(\alpha)g(\beta_1). \tag{1.17}
$$

Если при этом аффинная связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ при всех i, j, k не зависит от угла β_2, то происходит отделение независимой подсистемы пятого порядка (1.16).

Можно выписать достаточные условия существования квадратичного по скоростям z_1, z_2, z_3 первого интеграла более общего вида, нежели (1.12), а именно,

$$
\sum_{i,j=1;\ i\leqslant j}^{3} a_{ij}(\alpha,\beta)z_iz_j = \mathrm{const}, \tag{1.18}
$$

не требуя даже положительной определенности матрицы $(a_{ij}(\alpha,\beta))$, но мы пока ограничимся следующим случаем (см. также [44, 46, 51]).

Предложение 1.2. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств*

$$
\begin{cases}
2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\equiv 0,\\
2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0,\\
f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0,
\end{cases}
\tag{1.19}
$$

то система (1.16), (1.17) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида:*

$$
\Phi_1(z_3,z_2,z_1) = z_1^2+z_2^2+z_3^2 = C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{1.20}
$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.20) в силу системы (1.16), (1.17) дает

$$2\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right]z_2^2z_3+$$
$$+2\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right]z_1^2z_3-$$
$$-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_1(\alpha)}\equiv 0,$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.19). □

Согласно предложению 1.2 найдем наиболее общий вид правых частей систем, эквивалентных уравнениям геодезических (1.3) и (1.4) из примеров 1.1 и 1.2, соответственно, и имеющих аналитический первый интеграл вида (1.20).

Следствие 1.4. *В случае сферических координат (α,β), когда метрика на трехмерной сфере индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего четырехмерного пространства (см. также пример 1.1), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических (1.3), и имеющая первый интеграл вида (1.20), примет следующий вид:*

$$\begin{cases}\dot\alpha=-z_3,\\ \dot z_3=-(z_1^2+z_2^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha},\\ \dot z_2=z_2z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}+z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\ \dot z_1=z_1z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}-z_1z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\ \dot\beta_1=z_2\dfrac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\ \dot\beta_2=-z_1\dfrac{1}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\quad \nu_1\in\mathbb{R},\end{cases}\tag{1.21}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (1.21) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Следствие 1.5. *В случае сферических координат (α,β), но когда метрика на трехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. [40, 47, 50], а также пример 1.2), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических (1.4), и имеющая первый интеграл вида (1.20), примет следующий вид:*

$$\begin{cases}\dot\alpha=-z_3,\\ \dot z_3=-(z_1^2+z_2^2)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha},\\ \dot z_2=z_2z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}+z_1^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\ \dot z_1=z_1z_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}-z_1z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\ \dot\beta_1=z_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\\ \dot\beta_2=-z_1\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\quad \nu_1\in\mathbb{R},\end{cases}\tag{1.22}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (1.22) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Системы (1.10) и (1.11) получаются из систем (1.21) и (1.22) при $\nu_1 = -1$ и $\nu_1 = 0$ соответственно.

Важно заметить, что, на первый взгляд, при интегрировании системы равенств (1.19) должны получиться три произвольные постоянные, определяющие трехпараметрические семейства искомых систем вида (1.21) и (1.22). Но, оказывается, система равенств (1.19) определяет не более чем трехпараметрическое семейство искомых систем. Утверждается, что в данном случае возможно найти лишь однопараметрические искомые семейства.

Система равенств (1.19) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.20) (или см. ниже (2.3)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [20,26,27]). Но, как известно, поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы равенств (1.19) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (1.20) для системы (1.16), (1.17) уравнений геодезических. Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для системы уравнений геодезических (системы при отсутствии силового поля), или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (1.19) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в системе (1.16), (1.17) выполнение условия

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha); \tag{1.23}$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из системы равенств (1.19):

$$2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0. \tag{1.24}$$

Таким образом, функция $g(\beta_1)$ зависит от коэффициентов связности; ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут приведены ниже.

Предложение 1.3. *Если выполнены свойства* (1.23), (1.24), *при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) = \Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{1.25}$$

то система (1.16), (1.17) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\ \Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{1.26}$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.26) в силу системы (1.16), (1.17) при условиях (1.23)—(1.25) дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_3\sqrt{z_1^2 + z_2^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 1.4. *Если выполнено свойство* (1.23), *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{1.27}$$

а также второе равенство из (1.25) $(\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha))$, *то система* (1.16), (1.17) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_3(z_1;\alpha,\beta_1) = z_1\Phi_0(\alpha)\Phi(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \tag{1.28}$$

$$\Phi(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.28) в силу системы (1.16), (1.17) при рассматриваемых условиях дает

$$z_1z_3\Phi(\beta_1)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right] + \\ + z_1z_2f_1(\alpha)\Phi_0(\alpha)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1) + \frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Phi(\beta_1)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha), \quad \frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)$$

соответственно, что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 1.1. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.19), а также условия (1.25), (1.27), то в системе (1.16), (1.17) появляется независимая подсистема пятого порядка, состоящая из первых пяти уравнений (уравнение на $\dot\beta_2$ отделяется):

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3, \\ \dot z_3 = f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_2^2 + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_1^2, \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1)z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2, \\ \dot\beta_1 = z_2f_1(\alpha), \end{cases} \tag{1.29}$$

$$\dot\beta_2 = z_1f_2(\alpha)g(\beta_1). \tag{1.30}$$

Предложение 1.5. *Если выполнены условия предложений 1.3, 1.4, то система* (1.29), (1.30) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_4(\beta_1,\beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\frac{C_3g(b)}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(b) - C_3^2}}db = C_4 = \text{const}, \tag{1.31}$$

где после взятия интеграла (1.31) *вместо постоянных* C_2, C_3 *можно формально подставить левые части равенств* (1.26), (1.28) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.3, 1.4, то, значит, система (1.29), (1.30) обладает двумя первыми интегралами (1.26) и (1.28). Далее, рассмотрим два уровня C_2 и C_3 первых интегралов (1.26) и (1.28) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_3}{\sqrt{C_2^2\Phi^2(\beta_1) - C_3^2}}. \tag{1.32}$$

Угол β_2 будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (1.29), (1.30):

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = \frac{z_1}{z_2} g(\beta_1).$$

Используя в этом уравнении равенство (1.32), и получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.2, 1.3, 1.4 и 1.5 является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия предложений* 1.2, 1.3 *и* 1.4, *то система* (1.29), (1.30) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых первых интегралов вида* (1.20), (1.26), (1.28), (1.31).

Тот факт, что полный набор состоит из *четырех*, а не из пяти, первых интегралов, будет доказан ниже.

1.5. Первые интегралы для уравнений геодезических. Случай II. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в следующем виде (случай II):

$$\dot\alpha = z_3 f_3(\alpha), \quad \dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \quad \dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \tag{1.33}$$

где $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения. Такие координаты z_1, z_2 z_3 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических [61, 62, 64]:

$$\begin{cases} \ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0, \end{cases} \tag{1.34}$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (1.33) уравнения (1.7) примут вид

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2, \\ \dot z_2 &= -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_3 &= -f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \end{aligned} \tag{1.35}$$

и уравнения геодезических (1.34) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.33) почти всюду эквивалентны составной системе (1.33), (1.35) на многообразии $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$. Для полного интегрирования системы (1.33), (1.35) шестого порядка необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов.

Следующее утверждение фиксирует исследуемую систему в задаче интегрирования уравнений геодезических.

Следствие 1.6. *Если* $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ — *не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения, то система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.34), *может быть приведена к следующему виду*:

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_3 f_3(\alpha), \\ \dot z_3 = -f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3^2 - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_2^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_2 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot z_1 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \end{cases} \tag{1.36}$$

$$\dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1). \tag{1.37}$$

Если при этом аффинная связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ *при всех* i, j, k *не зависит от угла* β_2, *то происходит отделение независимой подсистемы пятого порядка* (1.16).

Можно выписать достаточные условия существования квадратичного по скоростям z_1, z_2, z_3 первого интеграла более общего вида (1.18), нежели (1.12), для рассматриваемой системы, но мы пока ограничимся следующим случаем.

Предложение 1.6. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств*

$$\begin{cases} f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\equiv 0,\\ f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0,\\ f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0,\\ \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\equiv 0,\end{cases}\tag{1.38}$$

то система (1.36), (1.37) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_3,z_2,z_1)=z_1^2+z_2^2+z_3^2=C_1^2=\mathrm{const}.\tag{1.39}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.39) в силу системы (1.36), (1.37) дает

$$\begin{aligned}&-2f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2^3-\\ &\qquad-2\left[f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_3}{f_3(\alpha)}-\\ &\qquad-2\left[f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_3}{f_3(\alpha)}-\\ &\qquad\qquad-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_1(\alpha)}\equiv 0,\end{aligned}$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.38). □

Пример 1.3. Уравнения (1.2) геодезических в трехмерном пространстве Лобачевского с координатами $(x=\beta_1, y=\beta_2, z=\alpha)$ примут вид

$$\ddot\alpha-\frac{1}{\alpha}(\dot\alpha^2-\dot\beta_1^2-\dot\beta_2^2)=0,\quad \ddot\beta_1-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_1=0,\quad \ddot\beta_2-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_2=0,\tag{1.40}$$

т.е. ненулевые коэффициенты связности равны

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha},\quad \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\alpha},\quad \Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)=\Gamma^1_{\alpha 2}(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha}.$$

Согласно предложению 1.6 найдем наиболее общий вид правых частей систем, эквивалентных уравнениям геодезических (1.40) из примера 1.3 и имеющих аналитический первый интеграл вида (1.39).

Следствие 1.7. *В случае геодезических в трехмерном пространстве Лобачевского с координатами* $(x=\beta_1, y=\beta_2, z=\alpha)$ (*см. также пример* 1.3), *четырехпараметрическая система,* *эквивалентная при* $\nu_1, \nu_3 \neq 0$, $\alpha \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.40)*, и имеющая первый интеграл вида* (1.39)*, примет следующий вид*:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_3\nu_1\alpha, & \dot{z}_1 = z_1 z_3 \dfrac{\nu_1\nu_3^2\alpha^2}{\nu_3^2\alpha^2+\nu_4}, \\ \dot{z}_3 = -z_2^2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2} - z_1^2\dfrac{\nu_1\nu_3^2\alpha^2}{\nu_3^2\alpha^2+\nu_4}, & \dot{\beta}_1 = z_2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_3\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}, & \dot{\beta}_2 = z_1\dfrac{\nu_1\nu_3\alpha^2}{\sqrt{\nu_3^2\alpha^2+\nu_4}}, \end{cases} \qquad \nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4 \in \mathbb{R}, \tag{1.41}$$

если первое, пятое и шестое уравнения системы (1.41) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Важно заметить, что при интегрировании системы равенств (1.38) и получились четыре произвольные постоянные, определяющие четырехпараметрические семейства искомых систем вида (1.41). Система равенств (1.19), вообще говоря, определяет не более чем четырехпараметрическое семейство искомых систем. Утверждается, что в данном случае стало возможным найти максимально возможное параметрическое семейство.

Система равенств (1.38) по-прежнему может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.39) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [6, 12, 14]). Но, как известно, поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

По-прежнему актуально следующее замечание. Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$ системы дифференциальных равенств (1.38) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (1.39) для системы (1.36), (1.37) уравнений геодезических. Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для системы уравнений геодезических (системы при отсутствии силового поля), или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (1.38) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в системе (1.36), (1.37) выполнение условия

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha), \tag{1.42}$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из системы равенств (1.38):

$$2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) \equiv 0. \tag{1.43}$$

Таким образом, функция $g(\beta_1)$ зависит от коэффициентов связности; ограничения на функции $f(\alpha)$, $f_3(\alpha)$ будут приведены ниже.

Предложение 1.7. *Если выполнены свойства* (1.42)*,* (1.43)*, при этом справедливы равенства*

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta) = \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{1.44}$$

то система (1.36)*,* (1.37) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\ \Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{1.45}$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.45) в силу системы (1.36), (1.37) при условиях (1.42)—(1.44) дает

$$-f_3(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_3\sqrt{z_1^2+z_2^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 1.8. *Если выполнено свойство* (1.42), *при этом справедливо равенство*

$$\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)=\Gamma_2(\beta_1), \tag{1.46}$$

а также второе равенство из (1.44) ($\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha)$), *то система* (1.36), (1.37) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_3(z_1;\alpha,\beta_1)=z_1\Phi_0(\alpha)\Phi(\beta_1)=C_3=\mathrm{const}, \tag{1.47}$$

$$\Phi(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Доказательство. Дифференцирование функции (1.47) в силу системы (1.36), (1.37) при рассматриваемых условиях дает

$$\begin{aligned}&-f_3(\alpha)z_1z_3\Phi(\beta_1)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+\\&\qquad+f_1(\alpha)z_1z_2\Phi_0(\alpha)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)+\frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}\right].\end{aligned}$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Phi(\beta_1)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\quad \frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)$$

соответственно, что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 1.2. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.38), а также условия (1.44), (1.46), то в системе (1.36), (1.37) появляется независимая подсистема пятого порядка, состоящая из первых пяти уравнений (уравнение на $\dot\beta_2$ отделяется):

$$\begin{cases}\dot\alpha=z_3f_3(\alpha),\\ \dot z_3=-\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha)z_2^2-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta_1)z_1^2,\\ \dot z_2=-f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta_1)z_1^2,\\ \dot z_1=-f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2,\\ \dot\beta_1=z_2f_1(\alpha),\end{cases} \tag{1.48}$$

$$\dot\beta_2=z_1f_2(\alpha)g(\beta_1). \tag{1.49}$$

Предложение 1.9. *Если выполнены условия предложений 1.7, 1.8, то система* (1.48), (1.49) *имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Phi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const}, \tag{1.50}$$

где, после взятия интеграла (1.50), *вместо постоянных* C_2, C_3 *можно формально подставить левые части равенств* (1.45), (1.47) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.7, 1.8, то, значит, система (1.48), (1.49) обладает двумя первыми интегралами (1.45) и (1.47). Рассмотрим два уровня C_2 и C_3 первых интегралов (1.45) и (1.47) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_3}{\sqrt{C_2^2 \Phi^2(\beta_1) - C_3^2}}. \tag{1.51}$$

Угол β_2 будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (1.48), (1.49):

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = \frac{z_1}{z_2} g(\beta_1).$$

Используя в этом уравнении равенство (1.51), и получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.6, 1.7, 1.8 и 1.9 является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Если выполнены условия предложений* 1.6, 1.7 *и* 1.8, *то система* (1.48), (1.49) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых первых интегралов вида* (1.39), (1.45), (1.47), (1.50).

Тот факт, что полный набор состоит из *четырех*, а не из пяти, первых интегралов, будет доказан ниже.

2. Уравнения движения на касательном расслоении к трехмерному многообразию в потенциальном силовом поле

2.1. Приведенная система. Случай I. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в виде (1.13) (случай I). Уравнения (1.7) примут вид (1.15). А уравнения геодезических (1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.13) почти всюду эквивалентны составной системе (1.13), (1.15) на многообразии $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ (более общие утверждения см. в [2, 7, 16]).

В общем случае кинематические соотношения (1.13) (с тремя «произвольными» функциями $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $g(\beta_1)$) не могут, вообще говоря, обеспечить существование необходимого количества первых интегралов, поскольку в уравнениях геодезических содержатся, вообще говоря, до 18 коэффициентов аффинной связности Γ^i_{jk}.

Теперь несколько модифицируем систему (1.16), (1.17). При этом получим систему *консервативную.* А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (2.1) (в отличие от системы (1.16)). В данном случае вводится (внешнее) силовое поле в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$, $\dot z_3$ соответственно:

$$\tilde F(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \big(0,\ 0,\ F(\alpha)\big)^T.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3, \\ \dot z_3 = F(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2 + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \\ \dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Система (2.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2. Первые интегралы для уравнений в потенциальном поле. Случай I.

Предложение 2.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств* (1.19), *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad V(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da. \tag{2.3}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (2.3) в силу системы (2.1) дает

$$2F(\alpha)z_3 + 2\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right] z_2^2 z_3 + \\ + 2\left[2\Gamma^1_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right] z_1^2 z_3 - \\ - 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2 z_2}{f_1(\alpha)} - 2F(\alpha)z_3 \equiv 0,$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.19). □

Предложение 2.2. *Если выполнены условия предложения* 1.3, *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.26).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.26) в силу системы (2.1) при условиях (1.23)—(1.25) дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_3\sqrt{z_1^2 + z_2^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 2.3. *Если выполнены условия предложения* 1.4, *то система* (2.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.28).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.28) в силу системы (2.1) при рассматриваемых условиях дает

$$z_1 z_3 \Phi(\beta_1)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right] + \\ + z_1 z_2 f_1(\alpha)\Phi_0(\alpha)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1) + \frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Phi(\beta_1)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha), \qquad \frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)$$

соответственно, что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 2.1. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.19), а также условия (1.25), (1.27), то в системе (2.1) появляется независимая подсистема пятого порядка, состоящая из первых пяти уравнений (уравнение на $\dot\beta_2$ отделяется):

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3, \\ \dot z_3 = F(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha)z_2^2 + f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta_1)z_1^2, \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2 z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta_1)z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha)g(\beta_1). \tag{2.5}$$

Предложение 2.4. *Если выполнены условия предложений* 1.3, 1.4, *то система* (2.4), (2.5) *имеет первый интеграл вида* (1.31), *где, после взятия интеграла* (1.31), *вместо постоянных* C_2, C_3 *можно формально подставить левые части равенств* (1.26), (1.28) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.3, 1.4, то, значит, система (2.4), (2.5) обладает двумя первыми интегралами (1.26) и (1.28). Рассмотрим два уровня C_2 и C_3 первых интегралов (1.26) и (1.28) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство (1.32). Угол β_2 будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (2.4), (2.5):

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = \frac{z_1}{z_2}g(\beta_1).$$

Используя в этом уравнении равенство (1.32), и получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4 является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия предложений* 2.1, 2.2 *и* 2.3, *то система* (2.4), (2.5) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых первых интегралов вида* (2.3), (1.26), (1.28), (1.31).

Тот факт, что полный набор состоит из *четырех*, а не из пяти, первых интегралов, будет доказан ниже.

2.3. Приведенная система. Случай II. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в виде (1.33) (случай II). Уравнения (1.7) примут вид (1.35). Уравнения геодезических (1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.33) почти всюду эквивалентны составной системе (1.33), (1.35) на многообразии $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

В общем случае кинематические соотношения (1.33) (с четырьмя «произвольными» функциями $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g(\beta_1)$) не могут, вообще говоря, обеспечить существование необходимого количества первых интегралов, поскольку в уравнениях геодезических содержатся, вообще говоря, до 18 коэффициентов аффинной связности Γ^i_{jk}.

Теперь несколько модифицируем систему (1.36), (1.37). При этом получим систему *консервативную*. А именно, введем гладкое (внешнее) силовое поле в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$, $\dot z_3$ соответственно:

$$\tilde F(z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)\\ F_2(\beta_1)f_1(\alpha)\\ F_3(\alpha)f_3(\alpha)\end{pmatrix}$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$ примет вид

$$\begin{cases}\dot\alpha=z_3f_3(\alpha),\\ \dot z_3=F_3(\alpha)f_3(\alpha)-f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3^2-\\ \qquad\qquad -\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,\\ \dot z_2=F_2(\beta_1)f_1(\alpha)-f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2,\\ \dot z_1=F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)-f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3-\\ \qquad\qquad -f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2,\\ \dot\beta_1=z_2f_1(\alpha),\\ \dot\beta_2=z_1f_2(\alpha)g(\beta_1).\end{cases}\tag{2.6}$$

Система (2.6) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases}\ddot\alpha-F_3(\beta_1)f_3^2(\alpha)+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\ \ddot\beta_1-F_2(\beta_1)f_1^2(\alpha)+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2=0,\\ \ddot\beta_2-F_1(\beta_2)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)+2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2=0.\end{cases}\tag{2.7}$$

2.4. Первые интегралы для уравнений в потенциальном поле. Случай II.

Предложение 2.5. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств* (1.38), *то система* (2.6) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)=z_1^2+z_2^2+z_3^2+V(\alpha,\beta_1,\beta_2)=C_1=\text{const},\tag{2.8}$$

$$V(\alpha,\beta_1,\beta_2)=V_3(\alpha)+V_2(\beta_1)+V_1(\beta_2)=-2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F_3(a)da-2\int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1}F_2(b)db-2\int\limits_{\beta_{20}}^{\beta_2}F_1(b)db.$$

Доказательство. Дифференцирование функции (2.8) в силу системы (2.6) дает

$$2z_3F_3(\alpha)f_3(\alpha)+2z_2F_2(\beta_1)f_1(\alpha)+2z_1F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)-2f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2^3-$$
$$-2\left[f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_3}{f_3(\alpha)}-$$
$$-2\left[f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_3}{f_3(\alpha)}-$$

$$-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_1(\alpha)}-$$
$$-2z_3F_3(\alpha)f_3(\alpha)-2z_2F_2(\beta_1)f_1(\alpha)-2z_1F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1)\equiv 0,$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.38). □

Предложение 2.6. *Пусть* $F_1(\beta_2)\equiv F_2(\beta_1)\equiv 0$. *Если выполнены условия предложения* 1.7, *то система* (2.6) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.45).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.45) в силу системы (2.6) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_3(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_3\sqrt{z_1^2+z_2^2}.$$

Функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 2.7. *Пусть* $F_2(\beta_1)\equiv 0$. *Если выполнены условия предложения* 1.8, *то система* (2.6) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.47).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.47) в силу системы (2.6) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_3(\alpha)z_1z_3\Phi(\beta_1)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+$$
$$+f_1(\alpha)z_1z_2\Phi_0(\alpha)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)+\frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}\right].$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Phi(\beta_1)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\qquad \frac{d\Phi(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Phi(\beta_1)$$

соответственно, что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 2.2. Пусть $F_1(\beta_2)\equiv F_1^0=\mathrm{const}$. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.38), а также условия (1.44), (1.46), то в системе (2.6) появляется независимая подсистема пятого порядка, состоящая из первых пяти уравнений (уравнение на $\dot\beta_2$ отделяется):

$$\begin{cases}\dot\alpha=z_3f_3(\alpha),\\ \dot z_3=F_3(\alpha)f_3(\alpha)-\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha)z_2^2-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta_1)z_1^2,\\ \dot z_2=F_2(\beta_1)f_1(\alpha)-f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3-\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta_1)z_1^2,\\ \dot z_1=F_1^0f_2(\alpha)g(\beta_1)-f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3-\\ -f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2,\\ \dot\beta_1=z_2f_1(\alpha),\end{cases}\tag{2.9}$$

$$\dot\beta_2=z_1f_2(\alpha)g(\beta_1).\tag{2.10}$$

Предложение 2.8. *В рассматриваемом случае имеем* $F_1(\beta_2) \equiv F_2(\beta_1) \equiv 0$. *Если выполнены условия предложений* 1.7, 1.8, *то система* (2.9), (2.10) *имеет первый интеграл вида* (1.50), *в котором после вычисления интеграла* (1.50) *вместо постоянных* C_2, C_3 *можно формально подставить левые части равенств* (1.45), (1.47) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.7, 1.8, то, значит, система (2.9), (2.10) обладает двумя первыми интегралами (1.45) и (1.47). Далее рассмотрим два уровня C_2 и C_3 первых интегралов (1.45) и (1.47) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство (1.32). Угол β_2 будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (2.9), (2.10):

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = \frac{z_1}{z_2} g(\beta_1).$$

Используя в этом уравнении равенство (1.32), и получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 2.5, 2.6, 2.7 и 2.8 является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если выполнены условия предложений* 2.5, 2.6 *и* 2.7, *то система* (2.9), (2.10) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых первых интегралов вида* (2.8), (1.45), (1.47), (1.50).

Тот факт, что полный набор состоит из *четырех*, а не из пяти, первых интегралов, будет доказан ниже.

3. Уравнения движения на касательном расслоении к трехмерному многообразию в силовом поле с диссипацией

3.1. Приведенная система. Случай I. Теперь несколько модифицируем систему (2.1). При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (3.1) (в отличие от системы (2.1)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$, $\dot z_3$ соответственно:

$$\tilde F(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \\ z_3 F_3^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot z_3 = F(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta) z_2^2 + f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot\beta_1 = z_2 f_1(\alpha), \\ \dot\beta_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1). \end{cases} \tag{3.1}$$

Система (3.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha - \left[b\tilde\delta(\alpha) + F_3^1(\alpha)\right]\dot\alpha + F(\alpha) + b\delta(\alpha)F_3^1(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 - \left\{b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] + F_2^1(\alpha)\right\}\dot\beta_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 - \left\{b\delta(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + F_1^1(\alpha)\right\}\dot\beta_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0; \end{cases} \tag{3.2}$$

здесь и далее $\tilde\delta(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.2. Первые интегралы для уравнений в поле с диссипацией. Случай I. Перейдем к интегрированию системы шестого порядка (3.1) при выполнении свойств (1.19), (1.25), (1.27), (1.23). Система (3.1) допускает отделение независимой подсистемы пятого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + f^2(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta_1)z_2^2 + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta_1)z_1^2 + z_3F_3^1(\alpha), \\ \dot{z}_2 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2z_3 - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1z_3 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 = z_2f(\alpha), \end{cases} \tag{3.3}$$

при наличии также шестого уравнения

$$\dot{\beta}_2 = z_1f(\alpha)g(\beta_1). \tag{3.4}$$

Перейдем к интегрированию системы шестого порядка (3.3), (3.4) при выполнении равенств

$$\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta_1) = \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta_1)g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \tag{3.5}$$

Введем ограничение на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять первому дифференциальному равенству из (1.19), преобразованному в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha) = 0. \tag{3.6}$$

Предположим также, что выполнено (в некотором смысле, техническое) равенство:

$$F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F^1(\alpha). \tag{3.7}$$

Для полного интегрирования (системы) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \to z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}, \tag{3.8}$$

система (3.3), (3.4) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)z^2 + z_3F_3^1(\alpha), \\ \dot{z} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] zz_3 + zF^1(\alpha), \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_* = \pm z\sqrt{1+z_*^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm\dfrac{zz_*}{\sqrt{1+z_*^2}}f(\alpha), \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm\frac{z}{\sqrt{1+z_*^2}}f(\alpha)g(\beta_1). \tag{3.11}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.9)—(3.11) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.9), один — системы (3.10), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.11) (т.е. всего *четыре*).

Будем также предполагать, что для некоторых $\kappa, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \tag{3.12}$$

а также

$$F(\alpha) = \lambda_0\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}, \quad F^1(\alpha) = \lambda_1\frac{d}{d\alpha}\delta(\alpha), \quad F_3^1(\alpha) = \lambda_3\frac{d}{d\alpha}\delta(\alpha). \tag{3.13}$$

Условие (3.12) назовем *геометрическим*, потому что, будучи условием на коэффициент связности $\Gamma_3(\alpha)$, оно приводит соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условия группы (3.13) назовем *энергетическими*, потому что при их наложении (внешние) силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\delta^2(\alpha)/2$ (или $\delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (относительно функции $\delta(\alpha)$). При этом функция $\delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков или так называемую *знакопеременную диссипацию* (см. также [19, 22, 24]).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (3.12) *и* (3.13). *Тогда система* (3.9)—(3.11) *обладает полным набором* (*четырьмя*) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 3.1 для начала сопоставим системе третьего порядка (3.9) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dz_3}{d\alpha} = \dfrac{F(\alpha)+\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)z^2+z_3F_3^1(\alpha)}{-z_3+b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dz}{d\alpha} = \dfrac{\left[2\Gamma_1(\alpha)+d\ln|f(\alpha)|/d\alpha\right]zz_3+zF^1(\alpha)}{-z_3+b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$z = u_1\delta(\alpha), \quad z_3 = u_2\delta(\alpha), \tag{3.15}$$

приводим систему (3.14) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} + \tilde\delta(\alpha)u_2 = \dfrac{F(\alpha)+\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\delta^2(\alpha)u_1^2+\delta(\alpha)u_2F_3^1(\alpha)}{-u_2\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} + \tilde\delta(\alpha)u_1 = \dfrac{\left[2\Gamma_1(\alpha)+d\ln|f(\alpha)|/d\alpha\right]\delta^2(\alpha)u_1u_2+\delta(\alpha)u_1F^1(\alpha)}{-u_2\delta(\alpha)+b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Принимая во внимание (3.6), можем утверждать, что система (3.16) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} = \dfrac{H_3(\alpha)+\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_1^2+u_2F_3^1(\alpha)+\tilde\delta(\alpha)u_2^2-b\tilde\delta(\alpha)u_2}{-u_2+b}, \\ \delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} = \dfrac{-\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_1u_2+u_1F^1(\alpha)+\tilde\delta(\alpha)u_1u_2-b\tilde\delta(\alpha)u_1}{-u_2+b}, \quad H_3(\alpha) = \dfrac{F(\alpha)}{\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Теперь для интегрирования системы (3.17) нам потребуется выполнение геометрического условия и энергетических условий (3.12) и (3.13). Далее, условия (3.12) и (3.13) можно переписать следующим образом.

1. Для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{\tilde\delta(\alpha)}{\delta(\alpha)}. \tag{3.18}$$

2. Для некоторых $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ должны выполняться равенства

$$H_3(\alpha) = \lambda_0\tilde\delta(\alpha), \quad F_1^1(\alpha) = \lambda_1\tilde\delta(\alpha), \quad F_3^1(\alpha) = \lambda_3\tilde\delta(\alpha). \tag{3.19}$$

Действительно, после выполнения условий (3.12) и (3.13) (или (3.18) и (3.19)) система (3.17) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_0+\kappa u_1^2+u_2^2+(\lambda_3-b)u_2}{(1-\kappa)u_1u_2+(\lambda_1-b)u_1}. \tag{3.20}$$

Уравнение (3.20) имеет вид уравнения Абеля (см. [29, 30]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_3$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{3.21}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(z_3, z; \alpha) = \frac{z_3^2 + z^2 + (\lambda_1 - b)z_3\delta(\alpha) + \lambda_0\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{3.22}$$

□

Замечание 3.1. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.9) (как часть системы (3.9)—(3.11)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [21, 23, 25]. При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (3.6), геометрического и энергетических условий (3.12), (3.13) (но при любой гладкой функции $F(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda_1 = \lambda_3 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_3 + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F(\alpha) + \kappa\dfrac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}z^2 - bz_3\tilde{\delta}(\alpha), \\ \dot{z} = -\kappa\dfrac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}zz_3 - bz\tilde{\delta}(\alpha). \end{cases} \tag{3.23}$$

Действительно, система (3.23) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(z_3, z; \alpha) = z^2 + z_3^2 - 2bz_3\delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad V(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da, \tag{3.24}$$

$$\Phi_2(z; \alpha) = z\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{3.25}$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем:

$$\Phi_2(z;\alpha) = zf(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} = zf(\alpha)\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma_3(b)f^2(b) + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right]db\right\} \cong$$

$$\cong z\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_3(b)f^2(b)db\right\},$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. В силу (3.12) (или (3.18)) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_3 = -b$, перепишется в виде

$$z\exp\left\{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d}{db}\ln|\delta(b)|db\right\} \cong z\delta(\alpha) \tag{3.26}$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.24), (3.25) также является первым интегралом системы (3.23). Но при $\lambda_1 = \lambda_3 \neq -b$ каждая из функций

$$z_3^2 + z^2 + (\lambda_1 - b)z_3\delta(\alpha) + \lambda_0\delta^2(\alpha) \tag{3.27}$$

и (3.25) по отдельности не является первым интегралом системы (3.3). Однако отношение функций (3.27), (3.25) является первым интегралом системы (3.9) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda_1 = \lambda_3$, b.

Найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.9) при $\varkappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_3$. Преобразуем инвариантное соотношение (3.21) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{\lambda_1 - b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2}{4} - \lambda_0. \tag{3.28}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 - 4\lambda_0 \geqslant 0, \tag{3.29}$$

и фазовое пространство системы (3.9) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.28). Таким образом, в силу соотношения (3.21) первое уравнение системы (3.17) при условиях (3.12) и (3.13) и при $\varkappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_3$ примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda_0 + (\lambda_1 - b)u_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \tag{3.30}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0)}\right\}; \tag{3.31}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.29). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.9) примет вид

$$\int \frac{d\delta(\alpha)}{\delta(\alpha)} = \int \frac{(b - u_2)du_2}{2(\lambda_0 + (\lambda_1 - b)u_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + (\lambda_1 - b)u_2 + \lambda_0)}\}/2}. \tag{3.32}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $\ln|\delta(\alpha)|$. Если

$$u_2 + \frac{\lambda_1 - b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = (\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 - 4\lambda_0, \tag{3.33}$$

то правая часть равенства (3.32) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \mp \frac{b}{2} I_1, \tag{3.34}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{3.35}$$

При вычислении интеграла (3.35) возможны три случая:

(1) при $(\lambda_1 - b)^2 > 4\lambda_0$

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}}\right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 - 4\lambda_0}}\right| + \mathrm{const}; \tag{3.36}$$

(2) при $(\lambda_1 - b)^2 < 4\lambda_0$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4\lambda_0 - (\lambda_1 - b)^2}} \arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}; \tag{3.37}$$

(3) при $(\lambda_1 - b)^2 = 4\lambda_0$

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{3.38}$$

Возвращаясь к переменной
$$r_1 = \frac{z_2}{\delta(\alpha)} + \frac{\lambda_1 - b}{2}, \tag{3.39}$$
находим окончательный вид для величины I_1:

(1) при $(\lambda_1 - b)^2 > 4\lambda_0$
$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\right| +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda_1-b)^2-4\lambda_0}}\right| + \text{const}; \tag{3.40}$$

(2) при $(\lambda_1 - b)^2 < 4\lambda_0$
$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4\lambda_0-(\lambda_1-b)^2}} \arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}; \tag{3.41}$$

(3) при $(\lambda_1 - b)^2 = 4\lambda_0$
$$I_1 = \mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{3.42}$$

Итак, при перечисленных выше условиях (в том числе, при $\kappa = -1$, $\lambda_1 = \lambda_3$) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [28, 31, 32, 34]).

Замечание 3.2. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.21). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:
$$\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G\left(\delta(\alpha), \frac{z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{z}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}; \tag{3.43}$$
Выражение первого интеграла (3.43) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (3.9)—(3.11) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.9). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти один первый интеграл системы (3.10), становящейся независимой после соответствующей замены независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.11).

Искомый первый интеграл для системы (3.10) будет иметь вид
$$\Theta_3(z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1+z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}; \tag{3.44}$$
о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (1.28). В первоначальных переменных первый интеграл (3.44) примет вид
$$\Theta_3'(z_2, z_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1\Phi(\beta_1)} = C_3' = \text{const}. \tag{3.45}$$
Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.11), находится по аналогии с (1.31):
$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3'^2\Phi^2(b)-1}} db = C_4 = \text{const}, \tag{3.46}$$

куда после взятия интеграла (1.32) вместо постоянной C_3' можно формально подставить левую часть равенства (3.45). Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.9)—(3.11) имеет четыре первых интеграла, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа). Теорема 3.1 доказана.

3.3. Приведенная система. Случай II. Модифицируя систему (2.6), получим систему с диссипацией. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризуется не только коэффициентом $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (3.47) (в отличие от системы (2.6)), но и следующей зависимостью (внешнего) силового поля в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$, $\dot z_3$:

$$\tilde F(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) \\ F_2(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_3(\alpha)f_3(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1F_1^1(\alpha) \\ z_2F_2^1(\alpha) \\ z_3F_3^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot z_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f_3(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3^2 - \\ \qquad\qquad - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_2^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_1^2 + z_3F_3^1(\alpha), \\ \dot z_2 = F_2(\beta_1)f_1(\alpha) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_3 - \\ \qquad\qquad - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha), \\ \dot z_1 = F_1(\beta_2)f_2(\alpha)g(\beta_1) - f_3(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_3 - \\ \qquad\qquad - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha), \\ \dot\beta_1 = z_2f_1(\alpha), \\ \dot\beta_2 = z_1f_2(\alpha)g(\beta_1). \end{cases} \tag{3.47}$$

Система (2.6) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha - \left\{b\tilde\delta(\alpha) + F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\alpha - \\ \qquad - F_3(\beta_1)f_3^2(\alpha) + b\delta(\alpha)F_3^1(\alpha) + b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] + \\ \qquad + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 - \left\{F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta_1 - \\ \qquad - F_2(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 - \left\{F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta_2 - \\ \qquad - F_1(\beta_2)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 = 0; \end{cases} \tag{3.48}$$

здесь, как и выше, $\tilde\delta(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.4. Первые интегралы для уравнений в поле с диссипацией. Случай II. Перейдем теперь к интегрированию искомой системы шестого порядка (3.47) при выполнении свойств (1.38), (1.44), (1.46), (1.42), а также при отсутствии проектирования внешней силы на оси $\dot z_1$ и $\dot z_2$ (т.е. присутствует проекция внешней силы на ось $\dot z_3$):

$$F_1(\beta_2) \equiv F_2(\beta_1) \equiv 0.$$

Тогда система (3.47) допускает отделение независимой подсистемы пятого порядка:

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot z_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha) z_2^2 - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot z_2 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_3 - f(\alpha) g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot z_1 = -f_3(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_3 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot\beta_1 = z_2 f(\alpha), \end{cases} \tag{3.49}$$

при наличии также четвертого уравнения

$$\dot\beta_2 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1). \tag{3.50}$$

Перейдем к интегрированию искомой системы шестого порядка (3.49), (3.50) при выполнении равенств

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1) g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \tag{3.51}$$

Введем ограничение на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять первому дифференциальному равенству из (1.38), преобразованному в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_3^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + \Gamma_3(\alpha) f^2(\alpha) = 0. \tag{3.52}$$

Предположим также, что выполнено (в некотором смысле, техническое) равенство:

$$F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F^1(\alpha). \tag{3.53}$$

Для полного интегрирования (системы) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \to z, z_*, \quad z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}, \tag{3.54}$$

система (3.49), (3.50) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot z_3 = F_3(\alpha) f_3(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) z^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\ \dot z = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) z z_3 + z F^1(\alpha), \end{cases} \tag{3.55}$$

$$\begin{cases} \dot z_* = \pm z\sqrt{1+z_*^2} f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot\beta_1 = \pm\dfrac{z z_*}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{3.56}$$

$$\dot\beta_2 = \pm\frac{z}{\sqrt{1+z_*^2}} f(\alpha) g(\beta_1). \tag{3.57}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.55)—(3.57) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (3.55), один — системы (3.56), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.57) (т.е. всего *четыре* первых интеграла).

Будем также предполагать, что для некоторых $\varkappa, \lambda_3^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, выполнены группы равенств

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) = \varkappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)|, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \tag{3.58}$$

$$F_3(\alpha) = \lambda_3^0\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \quad F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_3(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha), \quad k = 1, 2, 3. \tag{3.59}$$

Здесь, как уже отмечалось, $F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda^1$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (3.58) *и* (3.59)*. Тогда система* (3.55)—(3.57) *обладает полным набором* (из четырех) *независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.*

Условие (3.58) назовем *геометрическим*, потому что оно накладывает условие на коэффициент связности $\Gamma_3(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. а условия группы (3.59) — *энергетическими*. Условия группы (3.59) называют энергетическими, потому что (внешние) силы становятся в некотором смысле «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков или так называемую *знакопеременную диссипацию* (см. также [33, 35, 37]).

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 3.2 для начала сопоставим системе третьего порядка (3.55) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dz_3}{d\alpha} = \dfrac{F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)z^2/f_3(\alpha) + z_3F_3^1(\alpha)}{z_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\[2ex] \dfrac{dz}{d\alpha} = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)zz_3/f_3(\alpha) + zF^1(\alpha)}{z_3f_3(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.60}$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$z_3 = u_2\Delta(\alpha), \quad z = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \tag{3.61}$$

приводим систему (3.60) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 = \dfrac{F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_3(\alpha) + \Delta(\alpha)F_3^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\[2ex] \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_3(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \tag{3.62}$$

что, учитывая (3.52), почти всюду эквивалентно системе

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\left\{F_3(\alpha)f_3(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\dfrac{\Delta^2(\alpha)u_1^2}{f_3(\alpha)} - \right. \\[2ex] \qquad\qquad \left. - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2 + \Big[\Delta(\alpha)F_3^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\Big]u_2\right\}, \\[2ex] \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\left\{\Big[f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)\dfrac{\Delta^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\Big]u_1u_2 + \right. \\[2ex] \qquad\qquad \left. + \Big[\Delta(\alpha)F^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\Big]u_1\right\}, \end{cases} \tag{3.63}$$

здесь и далее $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$. Теперь для интегрирования системы (3.63) нам потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (3.58) и (3.59), которые можно переписать следующим образом:

(1) для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma_3(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)} = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}; \tag{3.64}$$

(2) для некоторых $\lambda_3^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, должны выполняться равенства

$$F_3(\alpha) = \lambda_3^0\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha), \quad F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_3(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \quad k = 1, 2, 3. \tag{3.65}$$

Действительно, после выполнения условий (3.58) и (3.59) (или (3.64) и (3.65)) система (3.63) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_3^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 + (\lambda_3^1 - b)u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 + (\lambda^1 - b)u_1}. \tag{3.66}$$

Уравнение (3.66) имеет вид уравнения Абеля [29, 30]; его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$ оно имеет первый интеграл

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 + (\lambda^1 - b)u_2 + \lambda_3^0}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{3.67}$$

который в прежних переменных выглядит следующий вид:

$$\Theta_1(z_3, z; \alpha) = \frac{f_3^2(\alpha)(z_3^2 + z^2) + (b - \lambda^1)z_3\delta(\alpha)f_3(\alpha) - \lambda_3^0\delta^2(\alpha)}{z\delta(\alpha)f_3(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{3.68}$$

□

Замечание 3.3. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.55) (как часть системы (3.55)—(3.57)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [40,47,50]). При выполнении условия (3.52), геометрического и энергетических условий (3.58), (3.59) (но при любой гладкой функции $F_3(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1 = \lambda_3^1 = -b$, $\kappa = -1$ она превращается в консервативную систему:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_3 = F_3(\alpha)f_3(\alpha) - \kappa f_3(\alpha)\dfrac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}z^2 - bz_3f_3(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{z} = \kappa f_3(\alpha)\dfrac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}zz_3 - bzf_3(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \tag{3.69}$$

Действительно, система (3.69) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(z_3, z; \alpha) = z^2 + z_3^2 - 2bz_3\delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad V(\alpha) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a)da, \tag{3.70}$$

$$\Phi_2(z; \alpha) = z\delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{3.71}$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем

$$\Phi_2(z; \alpha) = zf(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} = zf(\alpha)\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma_3(b)\frac{f^2(b)}{f_3^2(b)} + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right]db\right\} \cong$$
$$\cong z\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_3(b)\frac{f^2(b)}{f_3^2(b)}db\right\},$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. В силу (3.58) (или (3.64)) последняя величина (в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1 = -b$) перепишется в виде

$$z \exp\left\{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{db} \ln|\delta(b)| db\right\} \cong z\delta(\alpha) \tag{3.72}$$

с точностью до мультипликативной постоянной. Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.70), (3.71) также является первым интегралом системы (3.69). Но при $\lambda^1 = \lambda_3^1 \neq -b$ каждая из функций (3.71) и

$$z_3^2 + z^2 + (\lambda^1 - b)z_3\delta(\alpha) + \lambda_3^0\delta^2(\alpha) \tag{3.73}$$

по отдельности не является первым интегралом системы (3.49). Однако отношение функций (3.73), (3.71) является первым интегралом системы (3.55) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda^1 = \lambda_3^1$ и b.

Найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.55) при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (3.67) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{-\lambda^1 + b}{2}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2}{4} + \lambda_3^0. \tag{3.74}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda_1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_3^0 \geqslant 0, \tag{3.75}$$

и фазовое пространство системы (3.55) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.74).

Таким образом, в силу соотношения (3.67) первое уравнение системы (3.63) при условиях (3.58) и (3.59) и при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda_3^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1U_1(C_1, u_2)}{u_2 + b}, \tag{3.76}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_3^0)}\right\}; \tag{3.77}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.75). Квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.55) примет вид

$$-\int \frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} = \int \frac{(b + u_2)du_2}{2(\lambda_3^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1\{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_3^0)}\}/2}. \tag{3.78}$$

Очевидно, левая часть (с точностью до аддитивной постоянной) равна $-\ln|\Delta(\alpha)|$. Если

$$u_2 - \frac{\lambda^1 - b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = (\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_3^0, \tag{3.79}$$

то правая часть равенства (3.78) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \mp \frac{b}{2}I_1, \tag{3.80}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{3.81}$$

При вычислении интеграла (3.81) возможны три случая:

(1) при $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_3^0$

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2+4\lambda_3^0}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right| +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right| + \mathrm{const}; \quad (3.82)$$

(2) при $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_3^0$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_3^0-(\lambda^1-b)^2}} \arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}; \quad (3.83)$$

(3) при $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_3^0$

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \quad (3.84)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{z_3}{\Delta(\alpha)} - \frac{\lambda^1-b}{2}, \quad (3.85)$$

найдем окончательный вид для величины I_1:

(1) при $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_3^0$

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right| +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_0}} \ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_3^0}}\right| + \mathrm{const}. \quad (3.86)$$

(2) при $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_3^0$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_3^0-(\lambda^1-b)^2}} \arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)} + \mathrm{const}; \quad (3.87)$$

(3) при $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_3^0$

$$I_1 = \mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)} + \mathrm{const}. \quad (3.88)$$

Итак, мы нашли дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.55) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\varkappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_3^1$). Таким образом, предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [17, 52, 54, 55]).

Замечание 3.4. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.67). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(z_3, z; \alpha) = G\left(\Delta(\alpha), \frac{z_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{z}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \quad (3.89)$$

Выражение первого интеграла (3.89) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (3.55)—(3.57) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.55). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти один первый интеграл системы (3.56), становящейся независимой после соответствующей замены независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.57).

Первый интеграл для системы (3.56) будет иметь вид

$$\Theta_3(z_*;\beta_1) = \frac{\sqrt{1+z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \mathrm{const}; \tag{3.90}$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (1.47). В первоначальных переменных первый интеграл (3.90) примет вид

$$\Theta_3'(z_2,z_1;\beta_1) = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1\Phi(\beta_1)} = C_3' = \mathrm{const}. \tag{3.91}$$

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.57), находится по аналогии с (1.50):

$$\Theta_4(\beta_1,\beta_2) = \beta_2 \pm \int\limits_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3'^2\Phi^2(b)-1}}db = C_4 = \mathrm{const}, \tag{3.92}$$

куда после взятия интеграла (3.92) вместо постоянной C_3' можно формально подставить левую часть равенства (3.91).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.55)—(3.57) имеет четыре первых интеграла, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа). Теорема 3.2 доказана.

4. Заключение

Напомним, что самому понятию интегрируемости придают различные значения в соответствии с тем, в каких функциях производится интегрирование (аналитических, гладких, мероморфных и др.), каким образом понимается смысл интегрируемости. В данной работе обсуждается вопрос интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений в классе трансцендентных функций, т.е. функций, которые после продолжения в комплексную область имеют существенно особые точки. Понятие интегрируемости в классе трансцендентных функций возникает по причине наличия у системы асимптотических (притягивающих или отталкивающих) предельных множеств, т.е. множеств, окрестности которых состоят из многообразий размерности выше 1, полностью притягиваемых или отталкиваемых данными предельными множествами.

Более того, если разрыв трансцендентных интегралов происходит на асимптотических предельных множествах (т.е. на целых многообразиях), то удается выяснить наличие в системе предельных циклов. И хотя в последнем случае трансцендентный первый интеграл, как правило, не выражается через элементарные функции, он имеет многообразие неизолированных существенно особых точек.

В работе проанализированы как уже полученные ранее результаты автора (см. [53,56,57,59,60]), так и найденные впервые случаи интегрируемости систем с диссипацией разного знака на касательном расслоении к трехмерному гладкому многообразию, являющемуся пространством положений рассматриваемой динамической системы. При этом был применен следующий подход. Начиная с рассмотрения систем, в которых отсутствует какое-либо силовое поле, переходим в дальнейшем к системам, в которых присутствует внешнее консервативное силовое поле, и проводим исследование систем, в которых появляется внешнее неконсервативное силовое поле, обладающее диссипацией, причем разных знаков.

В дальнейшем будут получены аналогичные результаты и для систем более высокого порядка (ср. с [18,58,63,69,70]). Более того, в данном случае в многомерных системах будет присутствовать силовое поле существенно неконсервативное, в отличие от случаев, рассмотренных в монографиях автора [67, 68].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9*. — С. 119–211.
2. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.

3. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
12. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
13. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
14. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Извю РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.

30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1.* — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4.* — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
54. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.

55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
58. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
60. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
68. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
69. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
70. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru