ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-3-9

УДК 517, 531.01

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ» ИМ. ПРОФ. В. В. ТРОФИМОВА ПОД РУКОВОДСТВОМ С. А. АГАФОНОВА, Д. В. ГЕОРГИЕВСКОГО И М. В. ШАМОЛИНА

© 2022 г. **Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Приведена краткая информация о заседаниях семинара в 2020 г.

Ключевые слова: качественная теория динамических систем, геометрия, классическая механика, механика жидкости и газа, механика деформируемого твердого тела.

SESSIONS OF THE WORKSHOP OF THE MATHEMATICS AND MECHANICS DEPARTMENT OF THE LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY, “URGENT PROBLEMS OF GEOMETRY AND MECHANICS” NAMED AFTER V. V. TROFIMOV

© 2022 **D. V. GEORGIEVSKY, M. V. SHAMOLIN**

Abstract. Brief information on sessions of the workshop in 2020 is presented.

Keywords and phrases: qualitative theory of dynamical systems, geometry, classical mechanics, fluid and gas mechanics, solid mechanics.

AMS Subject Classification: 58-xx, 70-xx

Заседание 432 в рамках V Зимней научной школы-конференции по механике композитов им. Б. Е. Победри (Московская область, Красновидово) (7 февраля 2020 г.).

Д. В. Георгиевский.

Линейные дифференциальные операторы второго порядка над тензорными полями высоких рангов.

На тензорные поля произвольного ранга в многомерном пространстве естественным образом распространяются понятия операторов дивергенция, градиент, ротор, деформатор, а также их суперпозиций второго порядка. Приводятся два варианта обобщения ротора как внешнего произведения. Подробно рассматриваются дифференциальные операторы второго порядка, не меняющие ранг тензора, к которому применяются. Вводятся квадратные матрицы, состоящие из дифференциальных операторов $\mathrm{Div}_l\mathrm{Grad}_k$, $\mathrm{Grad}_k\mathrm{Div}_l$, и устанавливается их взаимосвязь. Выписывается явное выражение для повторного оператора ротор. Все введённые обобщённые операторы в частных случаях согласуются по своим свойствам с соответствующими им классическими в векторном и тензорном анализе операторами.

Заседание 433 (21 февраля 2020 г.)
М. В. Шамолин.
Интегрируемые системы нечетного порядка с диссипацией.

Описание диссипации в динамической системе является довольно затруднительной задачей. Но это, к примеру, может быть сделано следующим образом: вполне определенные коэффициенты указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства, а в других его областях — на подкачку энергии. Это приводит к потере классических первых интегралов (законов сохранения), глобально выражающихся через гладкие функции.

Топологическим препятствием к наличию в системе полного набора гладких первых интегралов являются притягивающие или отталкивающие предельные множества. При их обнаружении необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве автономных первых интегралов.

При исследовании систем с диссипацией если и удается найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями (имеющими существенно особые точки). Поэтому результаты, полученные в данной работе, особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Данная тематика уже затрагивалась в ряде работ автора. Так, например, были рассмотрены системы даже девятого порядка на своем фазовом многообразии с ненулевыми коэффициентами связности Γ^i_{jk}:

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v,$$

$$\begin{cases}
\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde{f}(\alpha),\\
Z_4' = F(\alpha) + \Gamma_4 f^2(\alpha)Z_3^2 + \Gamma_4 f^2(\alpha)Z_2^2 + \Gamma_4 f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_4\Psi(\alpha, Z),\\
Z_3' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_3Z_4 - \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)Z_2^2 -\\
\qquad\qquad - \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z),\\
Z_2' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_2Z_4 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha)Z_2Z_3 -\\
\qquad\qquad - \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z),\\
Z_1' = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1Z_4 - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] f(\alpha)Z_1Z_3 -\\
\qquad\qquad - \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] f(\alpha)g(\beta_1)Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),\\
\beta_1' = Z_3f(\alpha), \qquad \beta_2' = Z_2f(\alpha)g(\beta_1), \qquad \beta_3' = Z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2),
\end{cases}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta(\alpha),\ \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)}, \quad \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$Z = (Z_1, \ldots, Z_4)$, $z_k = Z_kv$, $k = 1, \ldots, 4$, $b \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$, $f(\alpha)$, $g(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ — некоторые гладкие функции. Сначала в системе отсутствовало внешнее поле сил $b_1 \neq 0$, когда присутствуют лишь коэффициенты при параметре $b \geqslant 0$. Данные коэффициенты не нарушали консервативности, поскольку данные системы обладают полным набором (шестью) гладких первых интегралов. Затем в рассматриваемой системе были введены и диссипативные коэффициенты через унимодулярное преобразование.

В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к гладкому многообразию. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Заседание 434 (28 февраля 2020 г.)
Н. А. Раутиан.

Полугруппы для вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости.

Заседание 435 (20 марта 2020 г.)
А. Ю. Бондаренко (ЦНИИ машиностроения, г. Королёв).

Совершенствование методов расчетного анализа динамических нагрузок на конструкции и способов их отработки с учетом результатов натурных испытаний.

Заседание 436 (8 сентября 2020 г.)
Д. В. Георгиевский.

Оценки экспоненциального затухания возмущений, наложенных на продольные гармонические колебания вязкого слоя.

Исследована эволюция картины возмущений, наложенных на плоскопараллельное периодическое по времени течение ньютоновской вязкой жидкости в слое, одна из границ которого совершает продольные гармонические колебания вдоль самой себя, а на другой границе возможно проскальзывание материала с нулевым трением. Ставится обобщённая задача Орра—Зоммерфельда как линеаризованная задача гидродинамической устойчивости нестационарных вязких несжимаемых течений. На основе метода интегральных соотношений, основанного на вариационных неравенствах для квадратичных функционалов и развитого применительно к нестационарным течениям, выводятся достаточные интегральные оценки экспоненциального затухания начальных возмущений. Эти оценки для каждого волнового числа представляют собой неравенства, связывающие три постоянные безразмерные величины: среднюю по периоду максимальную по толщине скорость сдвига в слое, амплитуду колебаний границы и число Рейнольдса. Произведено сравнение оценок устойчивости для плоской и трёхмерной картин возмущений.

Заседание 437 (9 октября 2020 г.)
В. А. Банько.

Оптимизация распределения масс по длине консервативно нагруженных стержней.

Заседание 438 (16 октября 2020 г.)
А. Б. Подпросветова.

Теоретическое и экспериментальное исследование движения жидкости внутри мягких эластичных трубок.

В работе проведено исследование существования и единственности осесимметричных состояний упругих трубок при протекании степенных жидкостей на основе разработанной одномерной модели течения неньютоновской жидкости в упругой трубке. Для трубок бесконечной длины рассматривались решения в виде бегущих волн и выводилось дисперсионное уравнение. Анализом его корней найдены критерий устойчивости безграничной однородной трубки и критерий абсолютной неустойчивости. Показано, что неустойчивость, при которой сохраняется осесимметричность движения трубки, возможна лишь при показателе степенного закона $n < 0{,}611$, а абсолютная неустойчивость — при $n < 1/3$.

Для сколь угодно большой, но конечной длины трубки граница устойчивости определялась асимптотическим методом глобальной неустойчивости. Для трубок конечной длины была решена задача на собственные значения, а граница устойчивости исследовалась численно с учетом упругости стенки трубки, продольного натяжения и длины трубки.

В связи с существующим несоответствием между большим количеством экспериментальных исследований с турбулентным течением жидкости в упругой трубке и биомеханическими применениями, где поток в большей части сердечно-сосудистой системы ламинарный, экспериментально было изучено влияние режимов потока на возникновение и характер колебаний упругой трубки (модельного кровеносного сосуда) на установке типа «Starling Resistor».

Заседание 439 (23 октября 2020 г.)

А. А. Бобылев.

О самосопряжённости и коэрцитивности оператора Пуанкаре—Стеклова для упругой полуплоскости.

Заседание 440 (6 ноября 2020 г.)

Э. Б. Завойчинская.

О много- и гигацикловой усталости металлов и сплавов при одноосном нагружении.

Проблеме обеспечения безопасной эксплуатации конструкций с длительными сроками службы посвящено обширное количество работ последних лет, актуальность которых, в том числе, связана с необходимостью продления сроков службы их элементов. В зарубежных работах построение кривой усталости в много- и гигацикловой областях при симметричном одноосном нагружении основывается на модели Х. Муграби с выделением двух механизмов зарождения усталостного разрушения: от очагов микроразрушения на поверхности образца с образованием устойчивых полос скольжения (область ограниченной усталости) и от геометрических концентраторов структуры внутри и на границах зерен, около включений и др. в обьеме тела с формированием области мелкогранулированной зернистой структуры «рыбий глаз» и образованием блестящих фасеток микроскола (область гигацикловой усталости). В области многоцикловой усталости наблюдаются оба механизма зарождения микроразрушения. В отечественной литературе рассматривается бифуркационная кривая усталости с наличием области, в которой эти механизмы реализуются с разной вероятностью, полагается возможным разрыв кривой усталости и существование нескольких пределов выносливости. Различные ветви кривой описываются различными степенными зависимостями предельной амплитуды напряжения от числа циклов.

В докладе показано, что диаграмма Х. Муграби и бифуркационная кривая усталости отражают на одном графике области разных кривых усталости при разных частотах симметричного одноосного нагружения. Обсуждаются классы с зависящими и не зависящимися от частоты нагружения материалов. Для никелевого сплава ЭИ437Б и 9–12% хромистой мартенситной стали, усталостные свойства которых не зависят от частоты, строятся области развития хрупких микро-, мезо- и макродефектов и кривые усталости по уровням дефектности, которые удовлетворительно описывают опытные данные. Первый из описанных выше механизмов является механизмом вязкого разрушения с развитием неупругого деформирования, возможно, имеющий место в области ограниченной усталости пластичных материалов. Второй механизм — это механизм развития хрупкого разрушения, который является определяющим в областях гигацикловой усталости. Очаги хрупкого микроразрушения вероятны как в обьеме тела, так и на поверхности от геометрических концентраторов структуры, когда поверхность опережает в накоплении микродефектов внутренние обьемы тела. Оба механизма имеют место при нагружении с любой частотой в зависимости от числа циклов. В области ограниченной усталости пластичных материалов идут одновременно процесс развития вязкого разрушения по первому механизму и развитие хрупких микро- и макротрещин по второму механизму. Предельная амплитуда напряжений является функцией трех переменных: числа циклов, частоты нагружения и температуры. Базовые характеристики модели масштабно-структурного разрушения материалов необходимо рассматривать как функции частоты нагружения и температуры.

Заседание 441 в рамках конференции «Ломоносов–2020» (13 ноября 2020 г.).

А. С. Удалов.

Исследование трещин в упругой среде методом разрывных смещений повышенной точности.

В. А. Банько.

Чувствительность параметра критической силы к перераспределению массы по длине консервативно нагруженных стержней переменного сечения.

А. В. Сероштанов (Донецкий национальный университет).

Изгиб тонких электромагнитоупругих плит.

А. И. Занько (Донецкий национальный университет).

Изгиб эллиптического кольца из вязкоупругого материала.

Т. А. Гаджибеков (МГТУ им. Н. Э. Баумана).

Спектральный анализ дисперсионного уравнения продольных волн Похгаммера–Кри.

Эльсайед Асмаа (МИСИ).

Определение порядка дробной производной по оператору Капуто в модели Бэгли—Торвика.

С. А. Монин (МЭИ).

Статистическое моделирование реакции трибун спортивных сооружений на воздействие зрителей.

И. С. Ермаков (МАИ).

Численное решение трёхмерной задачи теории упругости о концентрации напряжений в одноосно растягиваемой толстой анизотропной пластине с круговым отверстием.

М. А. Полянский (Донецкий национальный университет).

Электромагнитоупругое состояние пьезопластин с криволинейными отверстиями.

Заседание 442, посвященное профессору С. А. Агафонову (20 ноября 2020 г.).

Заседание посвящено соруководителю семинара профессору С. А. Агафонову, из-за тяжелой болезни вынужденному последние годы вести домашний режим. Участники рассказали о своих научных результатах за время пандемии, поделились опытом научной и преподавательской работы в дистанционном формате, а также обсудили планы на будущее.

Заседание 443 (11 декабря 2020 г.)

С. В. Нестеров (ИПМ им. А. Ю. Ишлинского РАН), Д. В. Георгиевский.

Метод ускоренной сходимости в задаче о крутильных колебаниях неоднородного по толщине круглого диска.

На основе разработанного авторами метода ускоренной сходимости численно и аналитически исследуются крутильные колебания насаженного на ось упругого диска, толщина которого зависит от радиуса. Внутренняя граница диска прикреплена к оси, тогда как внешняя свободна от нагрузок. Для различных отношений внешнего и внутреннего радиусов диска и разных распределений масс находятся первые частоты собственных крутильных колебаний.

Заседание 444 (18 декабря 2020 г.)

А. В. Аксенов, К. П. Дружков.

Симметрии, законы сохранения и точные решения одномерной системы уравнений мелкой воды над неровным дном. .

Проведена классификация симметрий одномерной системы уравнений мелкой воды над неровным дном в эйлеровых переменных. На основе результатов полученной классификации сделан вывод о возможности сведения одномерной системы уравнений мелкой воды к линейной системе уравнений с помощью точечных преобразований только в случаях горизонтального и наклонного профилей дна. Также проведена классификация контактных симметрий одномерного уравнения мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных.

Проведена классификация гидродинамических законов сохранения одномерной системы уравнений мелкой воды в эйлеровых переменных. Получен новый базовый закон сохранения. Проведена классификация законов сохранения первого порядка одномерного уравнения мелкой воды в лагранжевых переменных.

Получено и исследовано трехпараметрическое семейство точных решений одномерной системы уравнений мелкой воды над наклонным дном, описывающее набег волны типа «ступеньки» на берег и отражение от него. Описаны нелинейный эффект заплеска и эффект усиления набегающей волны при отражении ее от берега.

Библиография

1. *Аксенов А. В., Доброхотов С. Ю., Дружков К. П.* Точные решения типа «ступеньки» одномерных уравнений мелкой воды над наклонным дном// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 6. — С. 930–936.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
3. *Стокер Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. — М.: ИЛ, 1959.
4. *Aksenov A. V., Druzhkov K. P.* Conservation laws and symmetries of the shallow water system above rough bottom// J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — *722*. — P. 1–7.
5. *Aksenov A. V., Druzhkov K. P.* Conservation laws of the equation of one-dimensional shallow water over uneven bottom in Lagrange's variables// Int. J. Nonlin. Mech. — 2020. — *119*. — 103348.

Заседание 445 (25 декабря 2020 г.)

М. В. Шамолин.

Задача геодезических, движение в потенциальном поле и в поле с диссипацией.

Изучение интегрируемости автономных динамических систем на двумерном конфигурационном многообразии приводит к изучению систем четвертого порядка на касательном расслоении данного многообразия. При этом ключевым, наряду с геометрией многообразия, является структура силового поля, присутствующего в системе. Так, например, известная задача о движении пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т.д. Иногда в системах с диссипацией все же удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных, в смысле комплексного анализа, функций, поскольку о полном списке даже непрерывных автономных первых интегралов приходится забыть. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил. В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. При этом силовые поля приводят к появлению диссипации переменного знака и обобщают ранее рассмотренные. В частности, рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - f_2(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^2 - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot{z}_1 = F_1(\beta) f_1(\alpha) - f_2(\alpha)\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot{\beta} = z_1 f_1(\alpha), \end{cases}$$

которая почти всюду эквивалентна следующей системе маятникового типа:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot{\alpha} - F_2(\alpha) f_2^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_2^1(\alpha) + \\ \qquad + b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2 = 0, \\ \ddot{\beta} - \left\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot{\beta} - F_1(\beta) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0, \\ \tilde{\delta}(\alpha) = \dfrac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}. \end{cases}$$

В последних системах в явном виде видно линейное по квазискоростям силовое поле, которое в разных частях фазового пространства имеет либо диссипативный характер, либо характер подкачки энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. Фундам. направл. — 2007. — *23.* — С. 16–45.
2. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *62.* — С. 3–13.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65.* — С. 3–10.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76.* — С. 3–10.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2013. — *88.* — С. 3–19.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2015. — *98.* — С. 3–8.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100.* — С. 3–11.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *150.* — С. 3–25.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *174.* — С. 3–11.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *187.* — С. 3–11.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2021. — *202.* — С. 3–9.

Георгиевский Дмитрий Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `cotedurhone@mail.ru, georgiev@mech.math.msu.su`

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`