



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 27–43
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-27-43

УДК 517.928.2

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ АСИМПТОТИКИ
РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ
НА ПОЛУОСИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА
ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ $V(x) = x$

© 2024 г. А. Г. ЕЛИСЕЕВ, П. В. КИРИЧЕНКО

Аннотация. Предложен метод построения асимптотического решения сингулярно возмущенной смешанной задачи на полуоси для нестационарного и неоднородного уравнения типа Шрёдингера в координатном представлении в случае нарушения условий стабильности спектра предельного оператора. Выбранный профиль потенциальной энергии приводит к спектральной особенности предельного оператора, которую в рамках метода регуляризации С. А. Ломова принято называть сильной точкой поворота.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, асимптотическое решение, точка поворота, метод регуляризации, квазиклассическое приближение.

CONSTRUCTION OF REGULARIZED ASYMPTOTICS
FOR THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED
MIXED PROBLEM ON THE HALF-AXIS FOR THE INHOMOGENEOUS
SCHRÖDINGER-TYPE EQUATION WITH THE POTENTIAL $V(x) = x$

© 2024 А. Г. ELISEEV, P. V. KIRICHENKO

ABSTRACT. In this paper, we propose a method for constructing an asymptotic solution to a singularly perturbed mixed problem on the half-axis for a nonstationary inhomogeneous Schrödinger-type equation in the coordinate representation in the case of violation of the stability conditions for the spectrum of the limit operator. The chosen profile of the potential energy leads to a spectral singularity of the limit operator, which, within the framework of S. A. Lomov's regularization method, is usually called a strong turning point.

Keywords and phrases: singularly perturbed problem, asymptotic solution, turning point, regularization method, semiclassical approximation.

AMS Subject Classification: 34E20

1. Введение. Основные принципы метода регуляризации С. А. Ломова в теории сингулярных возмущений были заложены в конце 1950-х — начале 1960-х годов. Окончательную формулировку предложенный подход при выполнении так называемых условий стабильности спектра предельного оператора получил в монографии [13], где основная проблема метода регуляризации (поиск и описание регуляризирующих функций, которые содержат всю сингулярную зависимость

Результаты А. Г. Елисеева были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

асимптотического решения от малого параметра) успешно решена. Для ознакомления с современным состоянием метода регуляризации отсылаем читателя к монографиям [2, 14], где также приведены подробные библиографии по другим существующим подходам в теории сингулярных возмущений. При нарушенных условиях стабильности спектра предельного оператора описание сингулярной зависимости решения от малого параметра значительно сложнее, чем в задачах со стабильным спектром. Более того, до сих пор нет законченной математической теории с позиций метода регуляризации для сингулярно возмущенных задач с нестабильным спектром, хотя с общематематических позиций их стали изучать порядка 50 лет назад. Особый интерес среди таких задач вызывают те, в которых спектральные особенности выражены в виде точечной нестабильности (см., например, [3, 9, 15]). В работах, посвященных сингулярно возмущенным задачам, в рамках метода регуляризации некоторая часть особенностей такого вида названа точками поворота и проведена их классификация:

- (i) *простая точка поворота* — собственные значения предельного оператора изолированы друг от друга и одно собственное значение в отдельных точках обращается в нуль;
- (ii) *слабая точка поворота* — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения, а базис из собственных векторов сохраняет гладкость;
- (iii) *сильная точка поворота* — хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения, а базис собственных векторов теряет гладкость.

Приведем ссылки на несколько последних исследований в рамках метода регуляризации сингулярно возмущенных задач с особенностями в спектре предельного оператора указанного вида: по простой точке поворота см. [5, 9, 10], по слабой точке поворота — [7, 8, 11], сильной точке поворота посвящены статьи [4, 6].

Типичными физическими примерами сингулярно возмущенных задач являются уравнение Навье—Стокса с малой вязкостью и уравнение Шрёдингера, если постоянную Планка $\hbar$ считать малой величиной¹. Формальный предельный переход $\hbar \rightarrow 0$ в соотношениях квантовой теории осуществляет переход от квантовой к классической механике (см., например, [12, гл. 6]), поэтому в тех случаях, когда целесообразно искать приближенные (по малому $\hbar$) решения уравнения Шрёдингера, говорят о квазиклассическом приближении (см. [12, гл. 7]). Описанный квазиклассический переход в нестационарном уравнении Шрёдингера в координатном представлении на полуоси с гамильтонианом $\hat{H}(p, x) = \hat{p}^2 + \hat{x}$ порождает сингулярно возмущенную задачу, асимптотическому интегрированию которой посвящена настоящая работа. Следует сразу отметить, что рассматриваемая нами задача содержит неоднородное уравнение, что, как станет ясно в основном тексте статьи, существенно усложняет процесс построения регуляризованного асимптотического ряда.

Во многом наши исследования по асимптотическому интегрированию смешанной задачи для нестационарного и неоднородного уравнения Шрёдингера с обозначенным выше гамильтонианом при $\hbar \rightarrow 0$ представляют собой развитие идей работы [6], где рассмотрена задача Коши для неоднородного уравнения Шрёдингера с особенностью в спектре предельного оператора в виде сильной точкой поворота. В дальнейшем всюду будем использовать обозначение ε вместо $\hbar$, что является более естественным в теории сингулярных возмущений.

2. Постановка задачи. Рассмотрим смешанную задачу на полуоси для нестационарного уравнения Шрёдингера ($\varepsilon \equiv \hbar$) с неоднородностью $h(x, t)$:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xu = h(x, t), & 0 < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = \psi(t), \quad \psi(0) = f(0), \end{cases} \quad (1)$$

¹Строго говоря, постоянная Планка $\hbar$ является размерной величиной и имеет вполне конкретное значение, и утверждение о малости $\hbar$ следует понимать в том смысле, что можно выделить безразмерную комбинацию параметров, содержащую $\hbar$ в некоторой степени, малую по сравнению с другими безразмерными параметрами, не содержащими $\hbar$.

причём выполнены следующие условия:

- (i) $h(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$;
- (ii) $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(t) \in C[0, T]$;
- (iii) имеют место равномерные по t неравенства

$$\int_0^\infty x^2 |u_0(x)| dx < \infty, \quad \int_0^\infty x^2 |h(x, t)| dx < \infty$$

(достаточные условия для существования и единственности решения);

- (iv) для всех натуральных k, m, n имеют место равномерные по t неравенства

$$\int_0^\infty x^m |u_0^{(k)}(x)| dx < \infty, \quad \int_0^\infty x^m |h^{(k,n)}(x, t)| dx < \infty$$

(достаточные условия для построения асимптотического ряда);

- (v) ε — малый параметр, т.е. задача изучается при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Существование и единственность классического решения задачи (1) при выполненных условиях (i)–(v) обосновывается стандартными методами математической физики (см., например, [16]), опираясь на фундаментальное решение, полученное в приложении 1.

Для наглядного представления о виде спектральной особенности в поставленной задаче следует перейти к матричной форме записи:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial/\partial t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix};$$

здесь введена замена $\varepsilon \cdot \partial u / \partial x = v$. Тогда матрица предельного оператора имеет вид

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь легко заметить, что матрица $A(x)$ диагонализуема и имеет гладкий базис из собственных векторов при $x \neq 0$, а в точке пересечения собственных значений (т.е. при $x = 0$) соответствующий ей предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову и базис из собственных векторов теряет гладкость по x . Согласно указанной во введении классификации, такая спектральная особенность представляет собой сильную точку поворота.

В общем случае регуляризирующие функции необходимо строить, опираясь на каноническую форму предельного оператора, к которой можно привести с помощью гладких преобразований (см., например, [1]), и соответствующий базис из собственных векторов, но в предложенной задаче оператор уже имеет каноническую форму и в соответствующих построениях нет необходимости. Более того, необходимо произвести регуляризацию правой части $h(x, t)$ (это связано с тем, что предельный оператор с матрицей $A(x)$ в точке $x = 0$ необратим) и описать пограничный слой обусловленный точкой $x = 0$.

3. Формализм метода регуляризации. Во введении было отмечено, что метод регуляризации С. А. Ломова предлагает описывать сингулярную зависимость решения от малого параметра сразу (до построения асимптотического ряда путем решения итерационных задач) и абсолютно точно с помощью введения регуляризирующих функций и/или регуляризирующих операторов. Если это удалось сделать, то оставшуюся часть асимптотического решения можно искать в виде степенных рядов по малому параметру аналогично тому, как поступают при построении асимптотики в регулярно возмущенных задачах. Поэтому считаем целесообразным повествование в этом разделе начать именно с построения необходимых здесь дополнительных конструкций, содержащих в себе всю неравномерную сингулярную зависимость от ε , а затем перейти к построению асимптотического решения.

3.1. *Регуляризирующая функция и дополнительные регуляризирующие операторы.* Регуляризирующую функцию задачи (1) будем искать в стандартной форме $e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$, для решений линейных однородных уравнений такие сингулярности были выделены ещё Ж. Лиувиллем в [18]. Итак, осуществляя подстановку $u(x,t) = v(x,t) \cdot e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon}$ в соответствующее однородное уравнение задачи (1) и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε , получим:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - x \right) v + i\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot v - 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Анализ последнего выражения позволяет утверждать, что для поиска $v(x,t)$ в виде регулярного ряда по ε нужно в качестве $\varphi(x,t)$ взять решение следующей задачи:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = x, \quad \varphi(x,0) = 0. \quad (3)$$

Выбор начального условия для $\varphi(x,t)$ обусловлен нежеланием того, чтобы в дальнейшем начальное условие для $v(x,t)$ содержало сингулярную зависимость от ε . Кроме того, при таком выборе начальное условие на $v(x,t)$ наследует начальное условие задачи (1).

Задача (3) представляет собой задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, решать которую будем методом характеристик (см. [17, гл. 5, § 4, с. 268–272]). Введя обозначения $p = \partial \varphi / \partial t$ и $q = \partial \varphi / \partial x$, получим следующую характеристическую систему для уравнения задачи (3):

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-2q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{1} = \frac{d\varphi}{p - 2q^2} = dr, \quad (4)$$

Н.У.: $t = 0, \quad x = s, \quad \varphi = 0, \quad q = 0, \quad p = s.$

Начальные условия в последней системе получены параметризацией (s — параметр) начального условия задачи (3).

Интегрируя систему (4), получаем искомую поверхность в параметрическом виде:

$$t = r, \quad x = -r^2 + s, \quad \varphi = sr - \frac{2}{3}r^3.$$

Тогда окончательно для функции $\varphi(x,t)$ в явном виде имеем:

$$\varphi(x,t) = t \cdot \left(x + \frac{t^2}{3} \right). \quad (5)$$

Дополнительный регуляризирующий сингулярный оператор, связанный с точечной необратимостью предельного оператора $A(x)$, строится с помощью фундаментального решения задачи (1) на всей прямой, которое можно получить методом интегрального преобразования Фурье для однородного уравнения с дельта-функцией в начальном условии (см. приложение 1). Выпишем здесь только окончательный результат:

$$\Phi(x, \xi, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon t}} \exp \left(-\frac{it}{\varepsilon} \left(\xi + \frac{t^2}{3} \right) + i \frac{(t^2 - (x - \xi))^2}{4\varepsilon t} \right). \quad (6)$$

Построение указанного регуляризирующего оператора тесно связано с решением исходной задачи (1) при $-\infty < x < \infty$ с правой частью $h(x,t) = i\varepsilon$ и однородным начальным условием. Обозначив это решение $\sigma(x,t)$ и используя фундаментальное решение (6), получим

$$\begin{aligned} \sigma(x,t) &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \Phi(x - \xi, t - \tau) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)x}{\varepsilon} \right) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \exp \left(i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \cdot \left(x - \xi - \frac{(t-\tau)^2}{3} \right) + i \frac{(x - \xi - (t-\tau)^2)^2}{4\varepsilon(t-\tau)} \right). \end{aligned}$$

Для упрощения дальнейших вычислений обозначим внутренний интеграл по ξ через I_0 и положим $t - \tau \equiv \alpha$. После замены $s = x - \xi$ отдельно для I_0 получим

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} ds \cdot \exp \left(\frac{i\alpha}{\varepsilon} \cdot \left(s - \frac{\alpha^2}{3} \right) + i \frac{(s - \alpha^2)^2}{4\varepsilon\alpha} \right) = \exp \left(\frac{-i\alpha^3}{12\varepsilon} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} ds \cdot \exp \left(\frac{i\alpha s}{2\varepsilon} + \frac{is^2}{4\varepsilon\alpha} \right).$$

Теперь выделим в показателе экспоненты подынтегрального выражения полный квадрат:

$$\frac{i\alpha s}{2\varepsilon} + \frac{is^2}{4\varepsilon\alpha} = \frac{i}{4\varepsilon\alpha} (s^2 + 2\alpha^2 s + \alpha^4 - \alpha^4) = \frac{i}{4\varepsilon\alpha} ((s + \alpha)^2 - \alpha^4) = \frac{i(s + \alpha^2)^2}{4\varepsilon\alpha} - \frac{i\alpha^3}{4\varepsilon}.$$

Сделав замену $z = (s + \alpha^2)/(2\sqrt{\varepsilon\alpha})$, выпишем результат для I_0 :

$$I_0 = \exp \left(\frac{-i\alpha^3}{3\varepsilon} \right) \cdot 2\sqrt{\varepsilon\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2}.$$

Получившийся интеграл вычислен в приложении 1; его значение равно $\sqrt{\pi/2}(1+i)$. Возвращаясь к исходным обозначениям, для искомого $\sigma(x, t)$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)x}{\varepsilon} \right) \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)^3}{3\varepsilon} \right) \cdot 2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)} \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i) = \int_0^t d\tau \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right) \right). \end{aligned}$$

Полученный результат позволяет определить тот самый дополнительный регуляризирующий оператор $\hat{\sigma}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$, основная задача которого — вложить правую часть уравнения задачи (1) в образ предельного оператора, в следующем виде:

$$\hat{\sigma}(\cdot) = \int_0^t d\tau(\cdot) \exp \left(-\frac{i\varphi(x, t-\tau)}{\varepsilon} \right),$$

где функция $\varphi(x, t)$ определена в (5). При этом действие этого оператора на функцию $f(t)$ запишется как свертка:

$$\hat{\sigma}(f(t)) = \int_0^t d\tau \cdot f(\tau) \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right) \right) \equiv f(t) * \exp \left(-\frac{it}{\varepsilon} \cdot \left(x + \frac{t^2}{3} \right) \right).$$

Основным свойством, которое устанавливается непосредственной подстановкой, является следующее:

$$L_\varepsilon \hat{\sigma}(f(t)) = i\varepsilon f(t), \quad \text{где} \quad L_\varepsilon \equiv i\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x. \quad (7)$$

Очевидно также, что это свойство является прямым следствием того, из каких соображений была найдена функция $\sigma(x, t)$, порождающая дополнительный регуляризирующий оператор $\hat{\sigma}(\cdot)$, т.е. того факта, что $L_\varepsilon \sigma(x, t) = i\varepsilon$.

Осталось выделить сингулярную зависимость от ε , описывающую пограничный слой при $x = 0$. В основе построения соответствующего сингулярного оператора лежит решение исходной задачи для однородного уравнения с однородным начальным условием, где в качестве граничного условия выбрана функция «единичного скачка» (функция Хевисайда) $\theta(t)$. Указанное решение $\chi(x, t)$ может быть получено с помощью преобразования Лапласа или интегрального преобразования Фурье (последняя возможность реализована в приложение 2) и имеет вид:

$$\chi(x, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t d\tau \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon} \left(t-\tau - \frac{x}{t-\tau} \right)^2 \right). \quad (8)$$

Последнее соотношение позволяет ввести по аналогии с оператором $\hat{\sigma}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ регуляризующий оператор $\hat{\chi}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ в следующем виде:

$$\hat{\chi}(\cdot) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t d\tau(\cdot) \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon} \left(t-\tau - \frac{x}{t-\tau} \right)^2 \right);$$

тогда его действие на функцию $f(t)$ запишется как свертка:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(f(t)) &= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t d\tau \cdot f(\tau) \cdot \left(\sqrt{t-\tau} + \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} + \frac{i(t-\tau)}{4\varepsilon} \left(t-\tau - \frac{x}{t-\tau} \right)^2 \right) \equiv \\ &\quad \equiv f(t) * \left(\frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \left(\sqrt{t} + \frac{x}{t^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{it^3}{3\varepsilon} + \frac{it}{4\varepsilon} \left(t - \frac{x}{t} \right)^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Последний результат приведём к более простому виду, сделав замену

$$z = \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon(t-\tau)}}, \quad \tau = t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}, \quad d\tau = \frac{x^2}{2\varepsilon z^3} dz.$$

Получим

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(f(t)) &= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot \frac{x^2}{2\varepsilon z^3} \cdot f \left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}z} + \frac{8\varepsilon^{3/2}z^3}{x^2} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{ix^6}{192\varepsilon^4 z^6} + \frac{ix^2}{16\varepsilon^2 z^2} \left(\frac{x^2}{4\varepsilon z^2} - \frac{4\varepsilon z^2}{x} \right)^2 \right) = \\ &= (1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f \left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \cdot \exp(\dots). \end{aligned}$$

В последнем соотношении показатель экспоненты обозначен многоточием, преобразуем его отдельно с помощью несложных операций:

$$\begin{aligned} -\frac{ix^6}{192\varepsilon^4 z^6} + \frac{ix^2}{16\varepsilon^2 z^2} \left(\frac{x^4}{16\varepsilon^2 z^4} - 2x + \frac{16\varepsilon^2 z^4}{x^2} \right) &= \\ = -\frac{ix^6}{192\varepsilon^4 z^6} + \frac{ix^6}{256\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2 &= -\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получим:

$$\hat{\chi}(f(t)) = (1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f \left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \cdot \exp \left(-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2 \right). \quad (9)$$

В таком виде нетрудно явным вычислением установить основные свойства введенного дополнительного сингулярного оператора:

$$L_\varepsilon \hat{\chi}(f(t)) = 0, \quad \hat{\chi}(f(t)) \Big|_{x=0} = f(t). \quad (10)$$

Эти свойства становятся очевидными, если принять во внимание, из каких соображений был построен оператор $\hat{\chi}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$.

3.2. *Построение регуляризованного асимптотического ряда.* Построенные в предыдущем разделе регуляризирующая функция $e^{-i\varphi/\varepsilon}$ и дополнительные регуляризирующие операторы $\hat{\sigma}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$, $\hat{\chi}(x, t, \varepsilon)(\cdot)$ позволяют рассчитывать, что оставшуюся часть решения исходной задачи (1) можно искать в виде степенных рядов по ε :

$$u(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^{\infty} \left[\hat{\sigma}(z_k(t)) + \hat{\chi}(y_k(t)) \right] \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x, t) \cdot \varepsilon^k; \quad (11)$$

здесь начало суммирования с $k = -1$ во втором ряде обусловлено свойством (7) и необходимостью регуляризации правой части $h(x, t)$ задачи (1) на нулевом шаге по ε .

Учитывая соотношения (2) и свойства построенных операторов (7), (10), подставим (11) в задачу (1). При этом получим:

$$\left\{ \begin{aligned} & e^{-i\varphi/\varepsilon} \left(i \sum_{k=0}^{\infty} \dot{v}_k \varepsilon^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} v_k'' \varepsilon^{k+2} - 2it \sum_{k=0}^{\infty} v_k' \varepsilon^{k+1} \right) + i \sum_{k=0}^{\infty} z_{k-1} \cdot \varepsilon^k + \\ & \quad + i \sum_{k=0}^{\infty} \dot{\omega}_k \cdot \varepsilon^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k'' \cdot \varepsilon^{k+2} - x \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \cdot \varepsilon^k = h(x, t), \\ & \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, 0) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x, 0) \cdot \varepsilon^k = f(x), \\ & e^{-it^3/(3\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(0, t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\int_0^t d\tau \cdot z_k(\tau) \cdot e^{-i(t-\tau)^3/(3\varepsilon)} \right) \cdot \varepsilon^k + \\ & \quad + \sum_{k=-1}^{\infty} y_k(t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(0, t) \cdot \varepsilon^k = \psi(t); \end{aligned} \right. \quad (12)$$

здесь $v_k = v_k(x, t)$, $\omega_k = \omega_k(x, t)$, а $z_k = z_k(t)$, $y_k = y_k(t)$, точкой обозначена частная производная по времени, штрихом — частная производная по координате.

Выделив в (12) группы слагаемых при регуляризирующей функции и без нее, приходим к серии итерационных задач:

$$\left\{ \begin{aligned} & iz_{k-1}(t) + i\dot{\omega}_{k-1}(x, t) + \omega_{k-2}''(x, t) - x \cdot \omega_k(x, t) = \delta_0^k \cdot h(x, t), \\ & i\dot{v}_k(x, t) + v_{k-1}''(x, t) - 2itv_k'(x, t) = 0, \\ & v_k(x, 0) + \omega_k(x, 0) = \delta_0^k \cdot f(x), \\ & e^{-it^3/(3\varepsilon)} v_{k-1}(0, t) + \int_0^t d\tau \cdot z_{k-1}(\tau) \cdot e^{-i(t-\tau)^3/(3\varepsilon)} + \\ & \quad + y_{k-1}(t) + \omega_{k-1}(0, t) = \delta_1^k \cdot \psi(t), \quad k = \overline{0, \infty}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Отметим, что при отрицательных индексах у функций $v_k(x, t)$ и $\omega_k(x, t)$ их необходимо считать равными нулю (этих слагаемых просто нет в ряде (11)).

Для начала рассмотрим итерационную задачу на нулевом шаге (т.е. при $k = 0$ в (13)):

$$\left\{ \begin{aligned} & iz_{-1}(t) - x \cdot \omega_0(x, t) = h(x, t), \\ & i\dot{v}_0(x, t) - 2itv_0'(x, t) = 0, \\ & v_0(x, 0) + \omega_0(x, 0) = f(x), \\ & \int_0^t d\tau \cdot z_{-1}(\tau) \cdot e^{-i(t-\tau)^3/(3\varepsilon)} + y_{-1}(t) = 0. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Для разрешимости первого уравнения из системы (14) достаточно положить

$$z_{-1}(t) \equiv -ih(0, t). \quad (15)$$

Тогда для $\omega_0(x, t)$ получим гладкое решение

$$\omega_0(x, t) = \frac{h(x, t) - h(0, t)}{-x}, \quad (16)$$

что в свою очередь приводит к задаче Коши для определения функции $v_0(x, t)$:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} - 2t \cdot \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0, \quad v_0(x, 0) = \frac{h(x, 0) - h(0, 0)}{x} + f(x).$$

Последняя задача легко решается обычными методами интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$v_0(x, t) = f(x + t^2) + \frac{h(x + t^2, 0) - h(0, 0)}{x + t^2}. \quad (17)$$

Выражение для $z_{-1}(t)$ в (15) и граничное условие в системе (14) позволяют выписать соотношение для $y_{-1}(t)$:

$$y_{-1}(t) = i \int_0^t d\tau \cdot \exp\left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}\right) \cdot h(0, \tau). \quad (18)$$

Отметим, что функция $z_0(t)$ и $y_0(t)$ на нулевом шаге не определяются, выражения для них будут получены на следующем итерационном шаге. Этот факт не позволяет нам пока выписать главный член асимптотики.

Переходим теперь к задаче с $k = 1$ в (13):

$$\begin{cases} iz_0(t) + i\dot{\omega}_0(x, t) - x \cdot \omega_1(x, t) = 0, \\ i\dot{v}_1(x, t) + v_0''(x, t) - 2itv_1'(x, t) = 0, \\ v_1(x, 0) + \omega_1(x, 0) = 0, \\ e^{-it^3/3\varepsilon} \cdot v_0(0, t) + \int_0^t d\tau \cdot z_0(\tau) \cdot \exp\left(-i\frac{(t-\tau)^3}{3\varepsilon}\right) + y_0(t) + \omega_0(0, t) = \psi(t). \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя $\omega_0(x, t)$ из (16) в первое уравнение этой системы, убеждаемся, что для его разрешимости нужно положить

$$z_0(t) \equiv -ih_1(0, t), \quad \text{где} \quad h_1(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \right). \quad (20)$$

Тогда аналогично предыдущему итерационному шагу для $\omega_1(x, t)$ получим гладкое решение

$$\omega_1(x, t) = \frac{h_1(x, t) - h_1(0, t)}{-x},$$

а для $v_1(x, t)$ из (20) — задачу Коши для квазилинейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - 2t \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} = f_1(x + t^2), \quad v_1(x, 0) = \frac{h_1(x, 0) - h_1(0, 0)}{x};$$

здесь введено обозначение

$$f_1(x + t^2) \equiv i \cdot v_0''(x, t) = i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f(x + t^2) + \frac{h(x + t^2, 0) - h(0, 0)}{x + t^2} \right).$$

Выпишем здесь только окончательное решение последней задачи, опуская подробности:

$$v_1(x, t) = t \cdot f_1(x + t^2) + \frac{h_1(x + t^2, 0) - h_1(0, 0)}{x + t^2}.$$

Осталось подставить $\omega_0(x, t)$ из (16), $v_0(x, t)$ из (17) и $z_0(t)$ из (20) в граничное условие системы (19), что приводит к возможности определить $y_0(t)$. Будем иметь

$$y_0(t) = \psi(t) - e^{-it^3/(3\varepsilon)} \cdot \left(f(t^2) + \frac{h(t^2, 0) - h(0, 0)}{t^2} \right) + \\ + \left(\frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \right) \Big|_{x=0} + i \int_0^t d\tau \cdot \exp \left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} \right) \cdot h_1(0, \tau). \quad (21)$$

Ещё раз необходимо обратить внимание на то, что полностью определить все слагаемые перед ε^1 в ряде (11) удастся только на следующем итерационном шаге: осталось найти $z_1(t)$ и $y_1(t)$. Последнее можно сделать, рассмотрев условия разрешимости первого уравнения и граничное условие в системе (13) при $k = 2$. В результате будем иметь

$$z_1(t) \equiv -ih_2(0, t),$$

где

$$h_2(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h_1(x, t) - h_1(0, t)}{x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \right), \\ y_1(t) = -e^{-it^3/(3\varepsilon)} \cdot \left(t \cdot f_1(t^2) + \frac{h_1(t^2, 0) - h_1(0, 0)}{t^2} \right) + \left(\frac{h_1(x, t) - h_1(0, t)}{x} \right) \Big|_{x=0} + \\ + i \int_0^t d\tau \cdot \exp \left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon} \right) \cdot h_2(0, \tau),$$

а функция $h_1(x, t)$ определена в (20).

Продолжая по аналогии описанный процесс для $k = 2, 3, \dots$ в (13), можно найти все члены ряда (11). В конце данного раздела, опираясь на (15), (16), (17), (18), (20) и (21), выпишем главный член асимптотики:

$$u_{\text{гл.}}(x, t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\hat{\sigma}(z_{-1}(t)) + \hat{\chi}(y_{-1}(t)) \right) + \hat{\sigma}(z_0(t)) + \hat{\chi}(y_0(t)) + e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \cdot v_0(x, t) + \omega_0(x, t) = \\ = \frac{1}{\varepsilon} \left[-i \int_0^t d\tau \cdot h(0, \tau) \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right) \right) + \right. \\ + (1+i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \int_0^{t-x^2/(4\varepsilon z^2)} d\tau \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2 - \frac{i(t-x^2/(4\varepsilon z^2) - \tau)^3}{3\varepsilon} \right) \cdot h(0, \tau) \Big] + \\ + \int_0^t d\tau \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \cdot \exp \left(-i \frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3} \right) \right) + \\ + (1-i) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} \right) \cdot \exp \left(-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2 \right) \times \\ \times \left[\psi \left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right) - \exp \left(-\frac{i(t-x^2/(4\varepsilon z^2))^3}{3\varepsilon} \right) \cdot \left(f \left(\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \right)^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h((t-x^2/(4\varepsilon z^2))^2, 0) - h(0, 0)}{(t-x^2/(4\varepsilon z^2))^2} \right) + \frac{h(x, t-x^2/(4\varepsilon z^2)) - h(0, t-x^2/(4\varepsilon z^2))}{x} \right] \Big|_{x=0} -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{t-x^2/(4\varepsilon z^2)} d\tau \cdot \exp\left(-\frac{-i(t-x^2/(4\varepsilon z^2)-\tau)^3}{3\varepsilon}\right) \cdot \frac{\dot{h}(x,\tau) - \dot{h}(0,\tau)}{x} \Big|_{x=0} \Big] + \\
& + \exp\left(-\frac{it(x+t^2/3)}{\varepsilon}\right) \cdot \left(f(x+t^2) + \frac{h(x+t^2,0) - h(0,0)}{x+t^2}\right) - \frac{h(x,t) - h(0,t)}{x}.
\end{aligned}$$

Для практического использования можно учесть полученную в лемме 7 оценку (см. приложение 3). Тогда формула главного члена упрощается:

$$\begin{aligned}
u_{\text{гл.}}(x, t, \varepsilon) = & \frac{i}{\varepsilon} \int_0^t d\tau \cdot h(0, \tau) \cdot \exp\left(-\frac{i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}\right) \left[\text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) - \exp\left(-\frac{i(t-\tau)x}{\varepsilon}\right) \right] + \\
& + \int_0^t d\tau \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \cdot \exp\left(-i\frac{(t-\tau)}{\varepsilon} \left(x + \frac{(t-\tau)^2}{3}\right)\right) + \\
& + \left[\psi(t) - e^{-it^3/(3\varepsilon)} \cdot \left(f(t^2) + \frac{h(t^2, 0) - h(0, 0)}{t^2}\right) + \frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} \Big|_{x=0} - \right. \\
& \left. - \int_0^t d\tau \cdot \exp\left(-\frac{-i(t-\tau)^3}{3\varepsilon}\right) \cdot \frac{\dot{h}(x, \tau) - \dot{h}(0, \tau)}{x} \Big|_{x=0} \right] \cdot \text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) + \\
& + \exp\left(-\frac{it(x+t^2/3)}{\varepsilon}\right) \cdot \left(f(x+t^2) + \frac{h(x+t^2, 0) - h(0, 0)}{x+t^2}\right) - \frac{h(x, t) - h(0, t)}{x} + O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).
\end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2}.$$

4. Оценка остаточного члена. Пусть члены ряда (11) определены в результате решения итерационных задач (13) для $0 \leq k \leq n+1$. Запишем соотношение для остатка:

$$\begin{aligned}
u(x, t, \varepsilon) = & e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^n v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k + \sum_{k=-1}^n \left(\hat{\sigma}(z_k(t)) + \hat{\chi}(y_k(t)) \right) \cdot \varepsilon^k + \\
& + \sum_{k=0}^n \omega_k(x, t) \cdot \varepsilon^k + \varepsilon^{n+1} \cdot R_n(x, t, \varepsilon). \quad (22)
\end{aligned}$$

Подставим (22) в задачу (1). Учитывая решения итерационных задач и сокращая на ε^{n+1} , для остаточного члена получим задачу:

$$\begin{cases} i\varepsilon \frac{\partial R_n}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_n}{\partial x^2} - x \cdot R_n = -H(x, t, \varepsilon), \\ R_n(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad R_n(0, t, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$H(x, t, \varepsilon) = e^{-i\varphi(x,t)/\varepsilon} \cdot v_n''(x, t) \cdot \varepsilon + x \cdot \omega_{n+1}(x, t) + \varepsilon \cdot \omega_n''(x, t), \quad x > 0, \quad 0 < t \leq T.$$

Доопределим эту функцию тождественным нулём при $x \leq 0$. Тогда, используя фундаментальное решение (6), для $R_n(x, t, \varepsilon)$ в (23) получим:

$$R_n = -\frac{1-i}{2i\varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \exp\left(-\frac{i(t-\tau)}{\varepsilon} \left(\xi + \frac{(t-\tau)^2}{3}\right) + i\frac{(x-\xi-(t-\tau)^2)^2}{4\varepsilon(t-\tau)}\right) \cdot H(\xi, \tau, \varepsilon).$$

Выделив во внутреннем интеграле полный квадрат в показателе экспоненты, сделаем замену переменной интегрирования ξ на переменную

$$y = \frac{\xi - x + (t - \tau)}{2\sqrt{\varepsilon(t - \tau)}} - i\sqrt{\frac{(t - \tau)^3}{\varepsilon}}.$$

Тогда последнее выражение для остаточного члена перепишется в виде:

$$R_n = \frac{i+1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^t d\tau \cdot \exp\left(-i\frac{(t-\tau)}{\varepsilon}(x - (t-\tau))\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot e^{iy^2} \cdot H(y, \tau, \varepsilon).$$

Теперь, учитывая условия (i) и (ii) в постановке задачи (1) и тот факт, что итерационные задачи решены вплоть до шага $k = n + 1$, легко построить оценку по модулю для остатка:

$$|R_n| = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdot |H(y, \tau, \varepsilon)| \leq \frac{T \cdot M}{\varepsilon \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{C}{\varepsilon}, \quad (x, t) \in (\mathbb{R} \times [0, T]).$$

Осталось представить остаточный член в виде

$$R_n = u_{n+1} + \varepsilon \cdot R_{n+1}.$$

Окончательно получим

$$|R_n| \leq |u_{n+1}| + \varepsilon \cdot \frac{C}{\varepsilon} \leq C.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема (об оценке остатка (асимптотическая сходимость)). Пусть дана смешанная задача на полуси (1) и выполнены условия (i)–(ii). Тогда существует единственное решение этой задачи $u(x, t, \varepsilon)$ и справедлива оценка

$$\left\| u(x, t, \varepsilon) - e^{-i\varphi(x, t)/\varepsilon} \sum_{k=0}^n v_k(x, t) \cdot \varepsilon^k - \sum_{k=-1}^n \left(\hat{\sigma}(z_k(t)) + \hat{\chi}(y_k(t)) \right) \cdot \varepsilon^k - \sum_{k=0}^n \omega_k(x, t) \cdot \varepsilon^k \right\|_{C(\mathbb{R}^{(+)} \times [0, T])} \leq C \cdot \varepsilon^{n+1},$$

где $C \geq 0$ — константа, не зависящая от ε , а $v_k(x, t)$, $z_k(t)$, $y_k(t)$, $\omega_k(x, t)$ получены из решения итерационных задач при $0 \leq k \leq n + 1$.

5. Приложение 1. Поставим задачу для поиска фундаментального решения задачи (1):

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \cdot u = 0, \quad u(x, 0) = \delta(x - x_0). \quad (24)$$

Для решения этой задачи применим метод интегрального преобразования Фурье с ядром $e^{-i\lambda x}$. Обозначим через $\tilde{U}(\lambda, t)$ образ Фурье искомого решения $u(x, t)$:

$$\tilde{U}(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t) \cdot e^{-i\lambda \xi} d\xi.$$

Будем предполагать, что выполняются условия существования интеграла Фурье и что функция $u(x, t)$ со своими частными производными достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Также предположим, что интеграл для $\tilde{U}(\lambda, t)$ можно дифференцировать по переменным t и λ под знаком интеграла.

Умножим уравнение и начальное условие задачи (24) на $e^{-i\lambda x}$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$. При этом для второго интеграла в левой части уравнения после двукратного интегрирования по частям, учитывая обращения в ноль подстановок на $\pm\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \cdot e^{-i\lambda x} dx = -\lambda^2 \cdot \tilde{U}(\lambda, t),$$

а для третьего интеграла, учитывая возможность дифференцировать по λ под знаком интеграла, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot u(x, t) \cdot e^{-i\lambda x} dx = i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda}(\lambda, t).$$

Тогда в пространстве образов получим следующую задачу Коши:

$$i\varepsilon \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - i \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda} = \varepsilon^2 \cdot \lambda^2 \cdot \tilde{U}, \quad \tilde{U}(\lambda, 0) = e^{-i\lambda x_0}. \quad (25)$$

Задача (25) — задача для квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, интегрирование которой проводится обычными методами. Выпишем сперва соответствующую характеристическую систему

$$\frac{dt}{i\varepsilon} = \frac{d\lambda}{-i} = \frac{d\tilde{U}}{\varepsilon^2 \lambda^2 \tilde{U}}, \quad (26)$$

и начальное условие в параметрическом виде

$$t = 0, \quad \lambda = s, \quad \tilde{U} = e^{-isx_0}, \quad s — параметр. \quad (27)$$

Находим первые интегралы для (26):

$$\begin{aligned} dt &= -\varepsilon d\lambda, \quad t + \varepsilon\lambda = C_1, \\ i\varepsilon^2 \lambda^2 d\lambda &= \frac{d\tilde{U}}{\tilde{U}}, \quad \tilde{U} \cdot \exp\left(-i\varepsilon^2 \frac{\lambda^3}{3}\right) = C_2, \end{aligned}$$

и, учитывая начальное условие (27), связь между ними:

$$\begin{cases} \varepsilon s = C_1, \\ e^{-isx_0} \cdot e^{-i\varepsilon^2 s^3/3} = C_2, \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon} \left(C_1 x_0 + \frac{C_1^3}{3}\right)\right) = C_2.$$

Подставляя в последнее соотношение найденные выше первые интегралы, получим интегральную поверхность для задачи (25) в неявном виде:

$$\exp\left(-\frac{i}{\varepsilon} \left(x_0(t + \varepsilon\lambda) + \frac{1}{3}(t + \varepsilon\lambda)^3\right)\right) = \tilde{U} \cdot \exp\left(-\frac{i}{3}\varepsilon^2 \lambda^3\right),$$

или, выражая $\tilde{U}$ и приводя подобные слагаемые в показателе экспоненты, решение искомой задачи в пространстве образов явно:

$$\tilde{U}(\lambda, t) = \exp\left(-i\varepsilon t \lambda^2 - i(x_0 + t^2)\lambda - \frac{ix_0 t}{\varepsilon} - \frac{it^3}{3\varepsilon}\right).$$

Теперь, используя формулу обратного преобразования Фурье, для оригинала будем иметь:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot \tilde{U}(\lambda, t) \cdot e^{i\lambda x} = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-i\frac{t(x_0 + t^2/3)}{\varepsilon}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot \exp\left(i\lambda(x - x_0 - t^2) - i\varepsilon t \lambda^2\right).$$

Для вычисления получившегося интеграла выделим полный квадрат в показателе экспоненты

$$\begin{aligned}
& -i\varepsilon t \left(\lambda^2 + 2 \frac{t^2 - (x - x_0)}{2\varepsilon t} \cdot \lambda + \frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\varepsilon^2 t^2} - \frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\varepsilon^2 t^2} \right) = \\
& = -i\varepsilon t \left(\lambda + \frac{t^2 - (x - x_0)}{2\varepsilon t} \right)^2 + i \frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\varepsilon t}
\end{aligned}$$

и сделаем замену:

$$z = \sqrt{\varepsilon t} \left(\lambda + \frac{t^2 - (x - x_0)}{2\varepsilon t} \right).$$

В результате получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon t}} \exp \left(-i \frac{t(x_0 + t^2/3)}{\varepsilon} + i \frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\varepsilon t} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot e^{-iz^2}. \quad (28)$$

Оставшийся интеграл может быть вычислен различными способами. Кратко остановимся на одном из них. Обозначив этот интеграл через I , воспользуемся чётностью подынтегральной функции и перейдём к переменной интегрирования $\xi = z^2$. В результате получим:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot e^{-iz^2} = 2 \cdot \int_0^{\infty} dz \cdot e^{-iz^2} = \int_0^{\infty} d\xi \cdot \frac{e^{-i\xi}}{\sqrt{\xi}}.$$

Теперь воспользуемся «интегральным представлением» функции $1/\sqrt{\xi}$, в данном случае в роли такого представления будет выступать интеграл Гаусса:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \cdot e^{-\xi x^2} \implies I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} dx \cdot e^{-\xi(x^2+i)}.$$

Изменим порядок интегрирования в получившемся повторном интеграле и берём интеграл по ξ :

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} d\xi \cdot e^{-\xi(x^2+i)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + i}.$$

Теперь можно воспользоваться теорией вычетов для вычисления интеграла по x :

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + i} = \frac{2\pi i}{\sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{res} \left[\frac{1}{z^2 + i}, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i) \right] = \frac{2\pi i}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2z} \Big|_{z=(-1+i)/\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (1 - i).$$

Подставим полученный результат в (28). Окончательно для фундаментального решения задачи (1) получаем:

$$u(x, t) = \frac{1 - i}{2\sqrt{2\pi\varepsilon t}} \exp \left(-i \frac{t}{\varepsilon} \left(x_0 + \frac{t^2}{3} \right) + i \frac{(t^2 - (x - x_0))^2}{4\varepsilon t} \right),$$

что с точностью до обозначений совпадает с (6).

6. Приложение 2. Поставим задачу для поиска решения $\chi(x, t)$, позволяющего выписывать интегральное соотношение для решения однородного уравнения задачи (1) с произвольным граничным условием $\psi(t)$. Имеем:

$$i\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \cdot u = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = \theta(t);$$

здесь в граничном условии стоит функция Хевисайда и при $t > 0$ $\theta(t) = 1$. Доопределим неизвестную функцию $u(x, t)$ при $x < 0$ тождественным нулём и при аналогичных приложениях 1 предположениях перейдём к задаче Коши в пространстве образов Фурье:

$$i\varepsilon \frac{\partial F}{\partial t} - i \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varepsilon^2 \cdot \lambda^2 \cdot F + i\varepsilon^2 \lambda, \quad F(\lambda, 0) = 0, \quad (29)$$

где введено обозначение

$$F(\lambda, t) = \int_0^\infty dx \cdot e^{-i\lambda x} u(x, t).$$

Запишем характеристическую систему для квазилинейного уравнения в задаче (29):

$$\frac{dt}{i\varepsilon} = \frac{d\lambda}{-i} = \frac{dF}{\varepsilon^2 \cdot \lambda^2 \cdot F + i\varepsilon^2 \lambda}.$$

Система первых интегралов для нее имеет вид:

$$\lambda + \frac{t}{\varepsilon} = C_1, \quad F \cdot e^{-i\varepsilon^2 \lambda^3/3} - \varepsilon^2 \int_\lambda^\infty dq \cdot q \cdot e^{-i\varepsilon^2 q^3/3} = C_2.$$

Теперь уже несложно, учитывая начальное условие в (29), получить решение исходной задачи в пространстве образов:

$$F(\lambda, t) = \varepsilon^2 \int_\lambda^{\lambda+t/\varepsilon} dq \cdot q \cdot e^{\varepsilon^2(\lambda^3 - q^3)/3}.$$

Замена переменной $\lambda - q = (s - t)/\varepsilon$ в последнем интеграле приведёт к более удобному в дальнейшем соотношению:

$$F(\lambda, t) = \varepsilon \int_0^t ds \cdot \left(\lambda + \frac{t-s}{\varepsilon} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - i\varepsilon(t-s) \left(\lambda^2 + \lambda \frac{t-s}{\varepsilon} \right) \right).$$

Осталось осуществить обратное преобразование Фурье, что в итоге позволит получить решение интересующей нас задачи. Будем иметь:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \cdot F(\lambda, t) \cdot e^{i\lambda x} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \int_0^t ds \cdot \left(\lambda + \frac{t-s}{\varepsilon} \right) \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - i\varepsilon(t-s) \left(\lambda^2 + \lambda \frac{t-s}{\varepsilon} \right) + i\lambda x \right). \end{aligned}$$

Поменяем порядок интегрирования в получившемся повторном интеграле и выделим во внутреннем интеграле по λ полный квадрат, после чего произведем замену

$$\mu = \lambda + \frac{1}{2\varepsilon} \left(t - s - \frac{x}{t-s} \right).$$

После описанных преобразований получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^t ds \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - \frac{i(t-s)}{4\varepsilon} \left(t - s - \frac{x}{t-s} \right)^2 \right) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty d\mu \cdot \left(\mu + \frac{1}{2\varepsilon} \left(t - s + \frac{x}{t-s} \right) \right) \cdot \exp(-i\varepsilon(t-s)\mu^2). \quad (30) \end{aligned}$$

Обозначим внутренний интеграл $I_0(x, t-s)$ и вычислим его отдельно:

$$I_0(x, t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot e^{-i\varepsilon(t-s)\mu^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \left(t-s + \frac{x}{t-s} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot e^{-i\varepsilon(t-s)\mu^2}.$$

В силу того, что в обратном преобразовании Фурье интеграл понимается в смысле главного значения, первое слагаемое в последнем соотношении равно нулю из-за нечетности подынтегральной функции. Второе слагаемое легко свести к интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (1-i),$$

о вычислении которого было сказано в приложении 1. В результате для I_0 получим:

$$I_0(x, t-s) = \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1-i}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\sqrt{t-s} + \frac{x}{(t-s)^{3/2}} \right).$$

Подставляя полученное выражение в (30), будем иметь:

$$u(x, t) = \frac{1-i}{4\sqrt{2\varepsilon\pi}} \int_0^t ds \left(\sqrt{t-s} + \frac{x}{(t-s)^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - \frac{i(t-s)}{4\varepsilon} \left(t-s - \frac{x}{t-s} \right)^2 \right).$$

Осталось учесть известное свойство интегралов Фурье о сходимости в точке разрыва к полусумме левого и правого пределов разлагаемой в этот интеграл функции. Учитывая этот факт, последнее соотношение в точке $x=0, t=0$ будет давать $(\theta(0-0) + \theta(0+0))/2 = 1/2$, а для получения с помощью $u(x, t)$ решение поставленной задачи с произвольным краевым условием требуется 1. Поэтому последнее соотношение необходимо умножить на два. Окончательно получаем $(\chi(x, t) \equiv 2 \cdot u(x, t))$:

$$\chi(x, t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\varepsilon\pi}} \int_0^t ds \left(\sqrt{t-s} + \frac{x}{(t-s)^{3/2}} \right) \cdot \exp \left(-\frac{i(t-s)^3}{3\varepsilon} - \frac{i(t-s)}{4\varepsilon} \left(t-s - \frac{x}{t-s} \right)^2 \right),$$

что с точностью до обозначения переменной интегрирования совпадает с (8).

7. Приложение 3.

Лемма. Для соотношения (9), описывающего действие оператора $\hat{\chi}(\cdot)$ на функцию $f(t)$, справедлива оценка ($\delta > 0, t \in [0, T]$):

$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2} + O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right) \quad \text{при } x \in [\delta, +\infty).$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) \cdot \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) + O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).$$

Доказательство. Отметим, что

$$\begin{aligned} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) \exp\left(-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2} + iz^2\right) = \\ = f(t) \cdot \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot e^{iz^2} + \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot \left[f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) - f(t) \right] e^{iz^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left[\left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) - 1 \right] e^{iz^2} + \\
& + \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) \left[\exp\left(-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2}\right) - 1 \right] e^{iz^2}.
\end{aligned}$$

Оценим три последних слагаемых, учитывая неравенство $0 \leq \frac{x^2}{4\varepsilon z^2} \leq t \leq T$. Будем иметь при $x \in [\delta, +\infty)$, $\delta > 0$:

$$\int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot \left[f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) - f(t) \right] \cdot e^{iz^2} = \frac{(f(t) - f(0)) \sqrt{\varepsilon t}}{ix} e^{i\frac{x^2}{4\varepsilon t}} + O\left(\frac{\varepsilon t}{x^2}\right) = O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right);$$

$$\begin{aligned}
\int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left[\left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) - 1 \right] e^{iz^2} &= \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4} e^{iz^2} = \\
&= \frac{x^3}{16\varepsilon^2} \int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \frac{1}{z^4} e^{iz^2} = O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x/(2\sqrt{\varepsilon t})}^{\infty} dz \cdot f\left(t - \frac{x^2}{4\varepsilon z^2}\right) \left(1 + \frac{x^3}{16\varepsilon^2 z^4}\right) \left[\exp\left(-\frac{ix^6}{768\varepsilon^4 z^6} - \frac{ix^3}{8\varepsilon^2 z^2}\right) - 1 \right] e^{iz^2} &= \\
&= f(0) \left(1 + \frac{t}{16x}\right) \left[\exp\left(-i\left(\frac{t^3}{12\varepsilon} + \frac{xt}{2\varepsilon}\right)\right) - 1 \right] \frac{\sqrt{\varepsilon t}}{ix} e^{ix^2/(4\varepsilon t)} + O\left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right) = O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).
\end{aligned}$$

Складывая все три оценки, получим

$$\hat{\chi}(f(t)) = f(t) \cdot \text{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) + O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).$$

Лемма доказана. $\square$

8. Заключение. Как отмечено во введении, основной проблемой метода регуляризации С. А. Ломова является поиск регуляризирующих функций. В случае спектральных особенностей у предельного оператора выделение сингулярной зависимости решения от малого параметра достаточно трудная задача. В предложенной работе для смешанной задачи на полуоси для неоднородного уравнения Шрёдингера со спектральной особенностью в виде сильной точки поворота регуляризация, как выяснилось, состоит из трёх частей:

- (а) описание пограничного слоя, обусловленного точкой $t = 0$;
- (б) выделение сингулярностей, связанных с точечной необратимостью предельного оператора;
- (в) описание пограничного слоя обусловленного точкой $x = 0$.

В статье описанные проблемы успешно разрешены путем введения регуляризирующей функции и двух дополнительных сингулярных операторов. Тем самым основные трудности метода регуляризации для поставленной задачи успешно преодолены, что подтверждается результатами наших исследований. Продолжением этих исследований является обобщение предложенного в статье подхода для построения асимптотического ряда на другие задачи математической физики с подобного рода спектральными особенностями у предельного оператора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров// Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 2 (158). — С. 101–114.
2. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные уравнения и метод регуляризации. — М.: МЭИ, 2012.
3. Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Регуляризованная асимптотика решений интегродифференциальных уравнений с частными производными с быстро изменяющимися ядрами// Уфим. мат. ж. — 2018. — 10, № 2. — С. 3–12.
4. Елисеев А. Г. Пример решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения при наличии «сильной» точки поворота// Диффер. уравн. процессы управл. — 2022. — № 3. — С. 46–58.
5. Елисеев А. Г. Регуляризованное решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии иррациональной «простой» точки поворота// Диффер. уравн. процессы управл. — 2020. — № 2. — С. 15–32.
6. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Регуляризованное асимптотическое решение задачи Коши для неоднородного уравнения Шрёдингера в квазиклассическом приближении в присутствии «сильной» точки поворота у предельного оператора// Диффер. уравн. процессы управл. — 2023. — № 1. — С. 110–124.
7. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии «слабой» точки поворота у предельного оператора// Сиб. электрон. мат. изв. — 2020. — 17. — С. 51–60.
8. Елисеев А. Г., Кириченко П. В. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии «слабой» точки поворота первого порядка у предельного оператора с кратным спектром// Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 6. — С. 733–746.
9. Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора// Мат. сб. — 1986. — 131, № 173. — С. 544–557.
10. Елисеев А. Г., Ратникова Т. А. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота// Диффер. уравн. процессы управл. — 2019. — № 3. — С. 63–73.
11. Кириченко П. В. 2020// Мат. заметки СВФУ. — № 3. — С. 3–15.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Наука, 2008.
13. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
14. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. — М.: МГУ, 2011.
15. Ломов С. А., Сафонов В. Ф. Регуляризации и асимптотические решения для сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора// Укр. мат. ж. — 1984. — 36, № 2. — С. 172–180.
16. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
17. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.
18. Liouville J. Second mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis á satisfaire á une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable// J. Math. Pures Appl. — 1837. — P. 16–35.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Результаты А. Г. Елисеева были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Елисеев Александр Георгиевич

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

E-mail: yeliseevag@mpei.ru

Кириченко Павел Владимирович

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

E-mail: kirichenkov@mpei.ru