



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 3–12
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-3-12

УДК 517.929

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РЕЛЕЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2024 г. Д. Д. БАИН

Аннотация. Для одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с релейной нелинейностью и запаздыванием отыскиваются орбитально устойчивые периодические решения. Для этого вводится оператор последования, который оказывается надстройкой над некоторым одномерным отображением. В результате анализа данного одномерного отображения обнаруживаются области параметров, для которых существует экспоненциально орбитально устойчивые периодические решения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, оператор последования, устойчивость.

PERIODIC SOLUTIONS OF A DIFFERENTIAL EQUATION WITH RELAY NONLINEARITY WITH DELAY

© 2024 D. D. BAIN

ABSTRACT. For one class of second-order differential equations with relay nonlinearity and delay, orbitally stable periodic solutions are found by means of the recurrence operator, which is a suspension over some one-dimensional mapping. The analysis of this one-dimensional mapping shows that there exist domains of parameters for which exponentially orbitally stable periodic solutions exist.

Keywords and phrases: differential equation with delay, recurrence operator, stability.

AMS Subject Classification: 34K13, 34K39

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} + b\dot{u} + cu = d \operatorname{sign} u(t - T), \quad (1)$$

в котором T, b, c, d — постоянные параметры. При этом $T > 0, d \neq 0$.

Похожие системы встречаются в работах [1–3], и само уравнение (1) при различных условиях на параметры встречается в [4] в качестве предельного объекта для нелинейного осциллятора с большим параметром и в [5] в качестве модели движения судна управляемого двухпозиционным авторулевым. Мы же будем рассматривать уравнение (1) при условиях $b^2 - 4c > 0, c \neq 0$.

Определение 1.1. Функцию $u(t)$ мы будем называть *осциллирующей*, если $u(t)$ обращается в нуль для сколь угодно больших t . Если на всяком интервале длины запаздывания осциллирующая функция $u(t)$ обращается в нуль не более одного раза, то такая функция называется *медленно осциллирующей*.

Далее будем отыскивать именно медленно осциллирующие периодические решения уравнения (1), потому что, с одной стороны, при численном счёте быстро осциллирующих решений не

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00209).

обнаруживается, а с другой стороны, рассмотрение только медленно осциллирующих решений позволяет ввести оператор последования, при анализе которого получаются условия существования и орбитальной устойчивости периодических решений.

Обратимая замена

$$u(t) \rightarrow \left(\frac{|d|}{c}\right) \cdot u\left(\frac{t}{T}\right), \quad b \rightarrow \frac{b}{T}, \quad c \rightarrow \frac{c}{T^2}, \quad \text{sign } d \rightarrow s,$$

приводит уравнение (1) к виду

$$\ddot{u} + b\dot{u} + cu = cs \cdot \text{sign}(u(t-1)), \quad (2)$$

где $c \neq 0$, $s = \pm 1$, и $b^2 - 4c > 0$. Таким образом, уравнение (1) сводится к случаю $T = 1$, $d = \pm c$. В этой форме мы и будем исследовать данную систему.

2. Определение начальных условий. Как и в [4, 5], с целью построения решений уравнения (2) определим множество начальных условий $S \subset C[-1, 0] \times (0, \infty)$ следующим образом:

$$S = \left\{ (\varphi, v) \in C[-1, 0] \times (0, \infty) : \varphi(t) < 0 \text{ при } t < 0, \varphi(0) = 0 \right\}. \quad (3)$$

Для произвольной пары $(\varphi, v) \in S$ обозначим через $u_v(t)$ решение уравнения (2) с начальными условиями

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in [-1, 0], \quad \dot{u}(0) = v. \quad (4)$$

Заметим, что при $t \in [0, 1)$ в силу (3) и (4) выполняется неравенство $u_v(t-1) < 0$. Поэтому для $t \in [0, 1)$ решение $u_v(t)$ совпадает с решением $u_v^{(1)}(t)$ задачи Коши

$$\ddot{u} + b\dot{u} + cu = -cs, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = v, \quad (5)$$

которое имеет вид

$$u_v^{(1)}(t) := \frac{v - \lambda_2 s}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{v - \lambda_1 s}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} - s, \quad (6)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (7)$$

Так как $b^2 - 4c > 0$, то числа λ_1, λ_2 вещественны и различны, при этом значения параметров b, c однозначно соответствуют значениям параметров $\lambda_1 > \lambda_2$, поэтому далее мы будем рассматривать именно λ_1, λ_2 и s в качестве параметров уравнения (2), имея в виду $b = -(\lambda_1 + \lambda_2)$, $c = \lambda_1 \lambda_2$.

Заметим, что если в качестве начальных условий брать фиксированный v и различные φ , т.ч. $(\varphi, v) \in S$, то соответствующие им решения будут совпадать. Поэтому, решение $u_v(t)$ определяется параметром v однозначно.

Лемма 2.1. *Решение $u_v(t)$ не обращается в нуль при $t \in (0, 1]$ тогда и только тогда, когда*

$$v > v_0 := s \frac{\lambda_1(1 - e^{\lambda_2}) - \lambda_2(1 - e^{\lambda_1})}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}. \quad (8)$$

При этом знак v_0 совпадает со знаком $cs = \lambda_1 \lambda_2 s$.

Доказательство. При $t \in [0, 1]$ решение $u_v(t)$ совпадает с $u_v^{(1)}(t)$ (при $t = 1$ они совпадают по непрерывности). Заметим, что уравнение $\dot{u}_v^{(1)}(t) = 0$ может иметь не более одного решения, и, следовательно, функция $u_v^{(1)}(t)$ имеет не более одного экстремума, а значит, по теореме Ролля она имеет не более двух нулей. Ввиду начальных условий (5) функция $u_v^{(1)}(t)$ имеет нуль в точке $t = 0$ и положительна при малых $t > 0$, поэтому неравенство $u_v^{(1)}(1) > 0$ эквивалентно тому, что решение $u_v^{(1)}(t)$ не обращается в нуль при $t \in (0, 1]$. Прделав преобразования неравенства $u_v^{(1)}(1) > 0$ получаем неравенство (8). Тот факт, что знак v_0 совпадает со знаком $\lambda_1 \lambda_2 s = cs$, также может быть доказан прямыми преобразованиями. $\square$

Пусть $t^*(v) = \inf \{t > 0 : u_v(t) = 0\}$ — наименьший положительный нуль решения $u_v(t)$, если он существует, и $+\infty$ в противном случае. Так как $u_v(t) > 0$ при $t \in (0, t^*(v))$ (в том числе если $t^*(v) = +\infty$), то при $t \in (1, t^*(v) + 1)$ решение $u_v(t)$ совпадает с решением задачи Коши

$$\ddot{u} + b\dot{u} + cu = cs, \quad u(1) = u_v^{(1)}(1), \quad \dot{u}(1) = \dot{u}_v^{(1)}(1), \quad (9)$$

которое имеет вид

$$u_v^{(2)}(t) = \frac{v - k_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{v - k_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + s, \quad (10)$$

где

$$k_1 = \lambda_2 s(1 - 2e^{-\lambda_1}), \quad k_2 = \lambda_1 s(1 - 2e^{-\lambda_2}). \quad (11)$$

Определим множество V , состоящее из таких v , что $u_v(t)$ имеет наименьший положительный нуль на интервале $(1, +\infty)$, формулой

$$V = \left\{v \in (0, +\infty) : t^*(v) \in (1, +\infty)\right\}. \quad (12)$$

Заметим, что условие $v \in V$ является необходимым для медленной осцилляции решения $u_v(t)$, поэтому мы далее будем искать решения именно в предположении $v \in V$. Следующая лемма позволит нам прояснить вид множества V .

Лемма 2.2. *Если $v \in V$, то $(0, +\infty) \cap (v_0, v) \subset V$.*

Доказательство. В выражениях (6) и (10) можно, вынеся за скобку v получить выражения

$$\begin{aligned} u_v^{(1)}(t) &= v \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + \frac{-\lambda_2 s}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{-\lambda_1 s}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + s, \\ u_v^{(2)}(t) &= v \left(\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + \frac{-k_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{-k_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + s. \end{aligned}$$

Заметим, что выражение в скобках положительно при положительных t . Следовательно, при любом фиксированном $t > 0$ значения $u_v^{(1)}(t)$ и $u_v^{(2)}(t)$ строго возрастают по v .

Пусть $w \in (0, +\infty) \cap (v_0, v)$. Если у решения $u_w(t)$ нет положительных нулей, то $u_w(t) > 0$ при $t > 0$, но тогда, так как $v > w$, верны неравенства

$$\begin{aligned} u_v^{(1)}(t) &> u_w^{(1)}(t) > 0 \quad \text{при } t \in (0, 1], \\ u_v^{(2)}(t) &> u_w^{(2)}(t) > 0 \quad \text{при } t \in [1, +\infty), \end{aligned}$$

т.е. и у решения $u_w(t)$ нет положительных нулей, что неверно, ведь $v \in V$. Значит, $u_w(t)$ имеет положительный корень $t^*(w) < +\infty$. При этом $t^*(w) > 1$, так как из неравенства $w > v_0$ согласно лемме 2.1 следует, что $u_w(t) > 0$ при $t \in (0, 1]$. Таким образом, $w \in V$. $\square$

Следствие. *Множество V является связным множеством в $\mathbb{R}$, а значит, если оно не пусто, то является некоторым интервалом.*

Лемма 2.3. *Если $v \in V$, то $t^*(v)$ является кратным нулём $u_v(t)$ в том и только том случае, когда $v = \sup V$.*

Доказательство. Пусть $v = \sup V \in V$. Тогда $u_v^{(2)}(t^*(v)) = 0$ и для любых $w > v$ верно неравенство $u_w^{(2)}(t) > 0$ при $t \in [1, +\infty)$. Следовательно, $t^*(v)$ — это минимум решения $u_v^{(2)}(t)$, т.е. нуль чётной кратности.

Обратно, пусть $v \in V$ и $t^*(v)$ является кратным нулём $u_v(t)$. Уравнение $\dot{u}_v^{(2)}(t) = 0$ имеет не более одного решения t_{ext} , причём из условия $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (т.е. $b^2 - 4c \neq 0$) следует, что $\ddot{u}_v^{(2)}(t_{\text{ext}}) \neq 0$. Поэтому точка $t^*(v) = t_{\text{ext}}$ является единственным локальным минимумом $u_v^{(2)}(t)$, а значит, она также является и глобальным минимумом функции $u_v^{(2)}(t)$. Следовательно, ввиду монотонности $u_v^{(2)}(t)$ по v , доказанной в лемме 2.2, при любых $w > v$ верно неравенство $u_w^{(2)}(t) > u_v^{(2)}(t) \geq 0$ при $t > 1$, а значит, $w \notin V$, т.е. v является верхней гранью V . Поскольку $v \in V$, то v является наименьшей верхней гранью V . $\square$

Для того чтобы иметь дело только с простыми нулями, будем рассматривать множество

$$V_0 = V \setminus \{\sup V\}, \quad (13)$$

которое, если не пусто, имеет вид

$$V_0 = \begin{cases} (v_0, v_1), & \text{если } v_0 > 0, \\ (0, v_1), & \text{если } v_0 < 0, \end{cases}$$

для некоторого $v_1 \in (0, +\infty]$. Ввиду леммы 2.3 для любых $v \in V_0$ нуль $t^*(v)$ является простым.

Вместе с V_0 будем рассматривать соответствующее множество начальных условий S_0 , заданное соотношением

$$S_0 = \{(\varphi, v) \in S : v \in V_0\}. \quad (14)$$

3. Построение оператора последования. Если $v \in V_0$, то известно решение $u_v(t)$ при $t \in [0, t^*(v) + 1]$. Для построения $u_v(t)$ при $t > t^*(v)$ воспользуемся симметрией уравнения (2), которое не меняется при замене $u \rightarrow -u$. С этой целью введём в рассмотрение одномерное отображение

$$p : V_0 \rightarrow (0, +\infty), \quad p(v) = -\dot{u}_v^{(2)}(t^*(v)). \quad (15)$$

Отметим, что $p(v) \in (0, +\infty)$, так как при условии $v \in V_0$ нуль $t^*(v)$ решения $u_v(t)$ является простым.

Далее, выполним в уравнении (2) замену $u \rightarrow -u$ и сдвиг по времени $t \rightarrow t + t^*(v)$. В результате придём к тому же уравнению (2), но с начальными условиями

$$u(t) = -u_v(t + t^*(v)), \quad t \in [-1, 0], \quad \dot{u}(0) = -\dot{u}_v(0 + t^*(v)) = p(v). \quad (16)$$

Заметим, что $u_v(t^*(v)) = 0$ и $u_v(t) > 0$ при $t \in [-1 + t^*(v), t^*(v))$, так что из проделанных построений вытекает включение

$$(-u_v(t + t^*(v)), p(v)) \in S,$$

где S — множество (3). Значит, на последующих отрезках решение будет строиться аналогично решению с начальным условием $(-u_v(t + t^*(v)), p(v))$, т.е. на множестве S_0 определён оператор последования

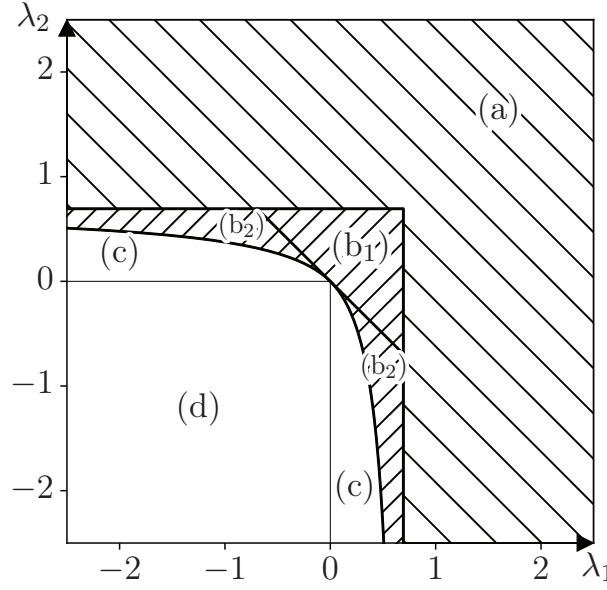
$$\Pi : S_0 \rightarrow S, \quad \Pi(\varphi, v) = (-u_v(t + t^*(v)), p(v)). \quad (17)$$

Заметим, что различные функции φ при фиксированном v переходят в одну и ту же функцию $-u_v(t + t^*(v))$, не зависящую от φ . Таким образом, оператор (17) представляет собой надстройку над одномерным отображением (15), поэтому вопрос о неподвижных точках отображения Π сводится к аналогичному вопросу для отображения p , а именно, всякой экспоненциально устойчивой неподвижной или периодической точке v^* отображения p отвечает экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u_{v^*}(t)$.

Отметим, что не всегда верно, что $\Pi(S_0) \subset S_0$, или, эквивалентно, что $p(V_0) \subset V_0$. Условия, при которых это вложение верно, будут получены позже, но мы не будем пользоваться принципом Шаудера, так как S_0 и V_0 не замкнуты.

4. Анализ одномерного отображения. Рассмотрим $u_v^{(2)}(t)$ как функцию двух переменных $u^{(2)}(t, v) = u_v^{(2)}(t)$. Ввиду формулы (10) эта функция непрерывно дифференцируема по совокупности переменных на открытом множестве $(1, +\infty) \times V_0$. Для любого $v \in V_0$ функция $u(t, v)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(t^*(v), v)$, при этом $u(t^*(v), v) = 0$, и, так как $t^*(v)$ является простым нулём, то $\dot{u}(t^*(v), v) \neq 0$. Тогда, по теореме о неявной функции, функция $t^*(v)$ непрерывно дифференцируема и её производная находится следующим образом:

$$\frac{dt^*(v)}{dv} = -\frac{\partial u^{(2)}(t^*(v), v)/\partial v}{\dot{u}^{(2)}(t^*(v), v)} = \frac{\left(\frac{e^{\lambda_1 t^*(v)} - e^{\lambda_2 t^*(v)}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)}{p(v)}.$$


 Рис. 1. Области пространства параметров в случае $\lambda_1 \lambda_2 s < 0$.

Далее, отображение $p(v)$ можно записать в виде $p(v) = -\dot{u}^{(2)}(t^*(v), v)$, а значит, оно непрерывно дифференцируемо, и его производная равна

$$\frac{dp(v)}{dv} = -\ddot{u}^{(2)}(t^*(v), v) \frac{dt^*(v)}{dv} - \frac{\partial \dot{u}^{(2)}(t^*(v), v)}{\partial v},$$

что приводится к виду

$$\frac{dp(v)}{dv} = \frac{v - \tilde{v}}{p(v)} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t^*(v)}, \quad \text{где} \quad \tilde{v} = 2\lambda_1 \lambda_2 s \frac{e^{-\lambda_2} - e^{-\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (18)$$

Так как $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t^*(v)} > 0$ и $p(v) > 0$, то знак $dp(v)/dv$ совпадает со знаком $v - \tilde{v}$. В свою очередь, знак $\tilde{v}$ совпадает со знаком $\lambda_1 \lambda_2 s$.

Отображение $p(v)$ возрастает при $v > \tilde{v}$ и убывает при $v < \tilde{v}$, так что для случая $\lambda_1 \lambda_2 s < 0$ отображение $p(v)$ строго возрастает на всём множестве V_0 .

Определение 4.1. Областью сходимости неподвижной точки v^* отображения $p(v)$ будем называть множество таких w_0 , что последовательность $w_n = p(w_{n-1})$ сходится к точке v^* .

Теорема 4.1. Пусть λ_1, λ_2 определены равенствами (7) и выполнено неравенство $\lambda_1 \lambda_2 s < 0$. Тогда отображение $p(v)$ не имеет периодических точек и, в зависимости от значений λ_1, λ_2 , реализуются случаи (a)–(d), перечисленные ниже и изображённые на рис. 1.

(a) Если $\lambda_1 > \ln 2$, то $V_0 = \emptyset$, т.е. отображение $p(v)$ не определено.

(b) Если $0 < \lambda_1 < \ln 2$ и $\lambda_2 > \frac{\lambda_1}{1 - 2e^{-\lambda_1}}$, то отображение $p(v)$ не имеет неподвижных точек.

(c) Если $0 < \lambda_1 < \ln 2$ и $\lambda_2 < \frac{\lambda_1}{1 - 2e^{-\lambda_1}}$, то отображение $p(v)$ имеет единственную неподвижную точку, которая экспоненциально устойчива и имеет область сходимости $V_0 = (0, k_1)$.

(d) Если $\lambda_1 < 0$, то отображение $p(v)$ имеет единственную неподвижную точку, которая экспоненциально устойчива и имеет область сходимости $V_0 = (0, +\infty)$.

Отметим, что из (7) следует, что $\lambda_1 > \lambda_2$, так что случаи в теореме выписаны именно в предположении $\lambda_1 > \lambda_2$, однако в уравнении (2) параметры $b = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ и $c = \lambda_1 \lambda_2$ симметричны относительно замены λ_1 и λ_2 друг на друга, поэтому на рис. 1 изображены аналогичные случаи для $\lambda_2 > \lambda_1$.

Доказательство теоремы. Напомним, что если $\lambda_1 \lambda_2 s < 0$, то $v_0 < 0$, и $\tilde{v} < 0$. Так как $v_0 < 0$, то, согласно лемме (2.1), для любых $v > 0 > v_0$ верно неравенство $u_v(t) > 0$ при $t \in (0, 1]$. Так как $\tilde{v} < 0$, то, ввиду формулы (18), отображение $p(v)$ является возрастающим для любых $v > 0 > \tilde{v}$. При этом, так как отображение $p(v)$ монотонно возрастает, то оно не имеет периодических точек. Действительно, пусть $w_1 = p(w_0) < w_0$; тогда $w_2 = p(w_1) < p(w_0) = w_1$ и т. д., и для знака неравенства в обратную сторону аналогично.

Из равенств $u_v^{(2)}(t^*(v)) = 0$ и $\dot{u}_v^{(2)}(t^*(v)) = -p(v)$ можно получить соотношение

$$p(v) = -\dot{u}_v^{(2)}(t^*(v)) = \lambda_1 s - (v - k_2)e^{\lambda_2 t^*(v)}, \quad (19)$$

из которого, в частности, следует, что $p(0^-) > 0$, так как в случае $p(0^-) = 0$ можно показать, что $t^*(0^-) = 0$, что невозможно, поскольку $t^*(v) > 1$.

(а) Пусть $\lambda_1 > \ln 2$; тогда можно показать, что для любых $v > 0$ верно неравенство $\dot{u}_v^{(2)}(t) > 0$ при $t \geq 1$. Поскольку $u_v^{(2)}(1) > 0$, получаем, что $u_v^{(2)}(t) > 0$ при $t \geq 1$, а значит, $v \notin V$. Следовательно, $V = \emptyset$.

(b₁). Пусть $0 < \lambda_1 < \ln 2$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$. Пусть v^* — наименьшая неподвижная точка отображения $p(v)$, либо, что то же самое, наименьший нуль функции $g(v) = p(v) - v$. Согласно равенству (18) и ввиду неравенств $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ и $\tilde{v} < 0$ имеем

$$\frac{dp(v^*)}{dv} = \frac{v^* - \tilde{v}}{v^*} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t^*(v^*)} \geq \frac{v^* - \tilde{v}}{v^*} > 1$$

и, следовательно,

$$\frac{dg(v^*)}{dv} = \frac{dp(v^*)}{dv} - 1 > 0. \quad (20)$$

С одной стороны, $g(v) > 0$ при $v \in (0, v^*)$, так как $g(0^+) = p(0^+) > 0$ и v^* — это наименьший нуль $g(v)$. С другой стороны, ввиду неравенства (20), в некоторой левой окрестности точки v^* функция $g(v)$ принимает отрицательные значения, что является противоречием. Следовательно, $p(v)$ не имеет неподвижных точек.

(b₂), (с). Пусть теперь $0 < \lambda_1 < \ln 2$ и $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$; тогда $\lambda_2 < 0$ и $s = 1$. Пусть v^* — неподвижная точка отображения $p(v)$. Выразив $t^*(v^*)$ из равенства (19) и используя неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, можно показать, что $0 < dp(v^*)/dv < 1$. Следовательно, всякая неподвижная точка отображения $p(v)$ является экспоненциально устойчивой, а значит, если таковая существует, то она единственна.

Пусть k_1, k_2 определены равенством (11); тогда кусочное решение $u_{k_1}^{(2)}(t)$ имеет вид

$$u_{k_1}^{(2)}(t) = \frac{k_1 - k_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} + 1$$

и монотонно стремится к значению 1, а значит нуль не пересекает; следовательно, $k_1 \notin V$.

Пусть $v < k_1$; тогда решение $u_v^{(2)}(t)$ имеет вид (10), причём коэффициент $(v - k_1)/(\lambda_1 - \lambda_2)$ при экспоненте с положительным показателем $e^{\lambda_1 t}$ отрицателен, а значит, при достаточно больших $t > 1$ кусочное решение $u_v^{(2)}(t)$ пересекает нуль. Следовательно, для любых $v < k_1$ верно, что $v \in V$, а значит $V_0 = (0, k_1)$.

Если $t^{**} = \lim_{v \rightarrow k_1^-} t^*(v) < +\infty$, то по непрерывности $u^{(2)}(t^{**}, k_1) = \lim_{v \rightarrow k_1^-} u^{(2)}(t^*(v), v) = 0$, но тогда $k_1 \in V$; противоречие. Следовательно, $t^*(v) \xrightarrow{v \rightarrow k_1} \infty$ и

$$p(k_1^-) = \lim_{v \rightarrow k_1^-} \left(\lambda_1 s - (v - k_2)e^{\lambda_2 t^*(v)} \right) = s\lambda_1 = \lambda_1.$$

Далее, неподвижные точки отображения $p(v)$ однозначно соответствуют нулям отображения $g(v) = p(v) - v$. Заметим, что $g(0^+) = p(0^+) > 0$ и $g(k_1^-) = p(k_1^-) - k_1 = \lambda_1 - k_1$.

Пусть $\lambda_1 - k_1 < 0$. Тогда $g(k_1^-) < 0$ и, по теореме о промежуточном значении, $p(v)$ имеет неподвижную точку, причём она единственна и экспоненциально устойчива.

Пусть теперь $\lambda_1 - k_1 > 0$. Тогда $g(k_1^-) > 0$, и если v^* — наибольший корень функции $g(v)$, то с одной стороны, $g(v) > 0$ при $v \in (v^*, k_1)$, а с другой стороны, $g'(v^*) = p'(v^*) - 1 < 1 - 1 = 0$; значит, в некоторой правой окрестности v^* верно неравенство $g(v) < 0$, что является противоречием. Значит, при $\lambda_1 - k_1 > 0$ неподвижных точек нет.

Наконец, условие $\lambda_1 - k_1 < 0$ может быть записано в виде

$$\lambda_2 < \frac{\lambda_1}{1 - 2e^{-\lambda_1}};$$

при этом, как можно проверить, из него следует условие $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, так что утверждение (с) доказано.

С другой стороны, условие $\lambda_1 - k_1 > 0$ может быть записано в виде

$$\lambda_2 > \frac{\lambda_1}{1 - 2e^{-\lambda_1}},$$

и можно проверить, что оно влечёт условие $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$ при $\lambda_1 < \ln 2$. Таким образом, утверждение (b) доказано.

(d) Пусть $\lambda_1 < 0$, тогда $\lambda_2 < 0$ и $s = -1$. Заметим, что при любых $v > 0$ экспоненты в формуле (10) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, а значит, $u_v^{(2)}(t)$ стремится к $s = -1$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, при некотором t кусочное решение $u_v^{(2)}(t)$ обращается в нуль, и $p(v)$ определено. Поскольку это верно для любых $v > 0$, то $V_0 = (0, +\infty)$.

Отображение $p(v)$ возрастает, и, как видно из равенства (19), оно ограничено сверху положительным числом $\lambda_1 s = -\lambda_1 = |\lambda_1|$. Далее, неподвижные точки отображения $p(v)$ однозначно соответствуют нулям отображения $g(v) = p(v) - v$. Заметим, что $g(0^+) = p(0^+) > 0$, и $g(v) \leq |\lambda_1| - v < 0$ при $v > |\lambda_1|$, так что по теореме о промежуточном значении $p(v)$ имеет неподвижную точку.

Так как $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, то, аналогично случаю (с), для любой неподвижной точки v^* верно неравенство $0 < dp(v^*)/dv < 1$, а значит, эта неподвижная точка единственна, экспоненциально устойчива, причём её областью сходимости является всё множество $V_0 = (0, +\infty)$. $\square$

На рис. 2 изображены графики отображения $p(v)$ при различных значениях параметров, удовлетворяющих неравенству $\lambda_1 \lambda_2 s < 0$. Эти графики иллюстрируют наличие экспоненциально устойчивых неподвижных точек в случаях (с) и (d), а также характер появления неподвижной точки при переходе от случая (b) к случаю (с).

На рис. 3, 4 изображены графики и траектории в фазовой плоскости некоторых решений уравнения (2) с начальными условиями из S_0 . Как видно, решения стремятся к некоторым предельным циклам, причём пересечения решениями оси ординат на изображениях фазового портрета соответствуют итерациям отображения $p(v)$. Точки излома на фазовых портретах соответствуют переключениям запаздывающего члена: в этих точках вторая производная решения имеет скачок.

Теорема 4.2. *Если выполнено неравенство $\lambda_1 \lambda_2 s > 0$, то отображение $p(v)$ не имеет неподвижных точек. Точнее, в зависимости от значений λ_1, λ_2 , реализуются случаи (е)–(g), перечисленные ниже и изображённые на рис. 6.*

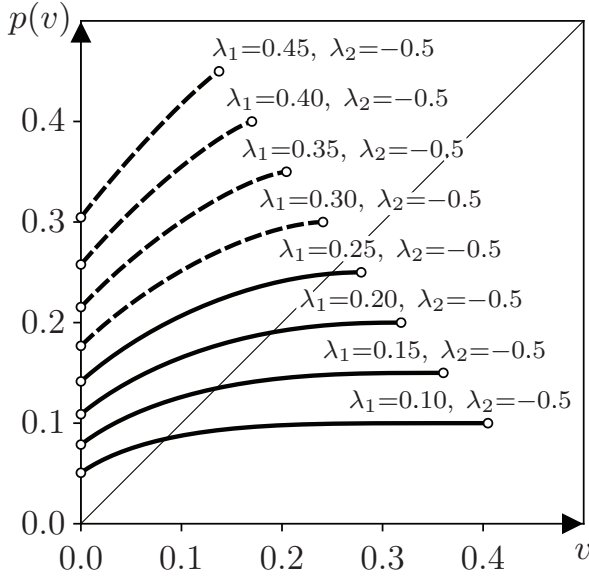
(е) *Если $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, то у отображения $p(v)$ нет неподвижных точек. Верно неравенство $p(v_0^+) < v_0$ и $p(v)$ монотонно убывает к нулю.*

(f) *Если $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ и $\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2} - \lambda_2 e^{-\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} < \frac{1}{2}$, то у отображения $p(v)$ есть лишь неустойчивая неподвижная точка. Верно неравенство $p(v_0^+) > v_0$ и $p(v)$ монотонно убывает к нулю.*

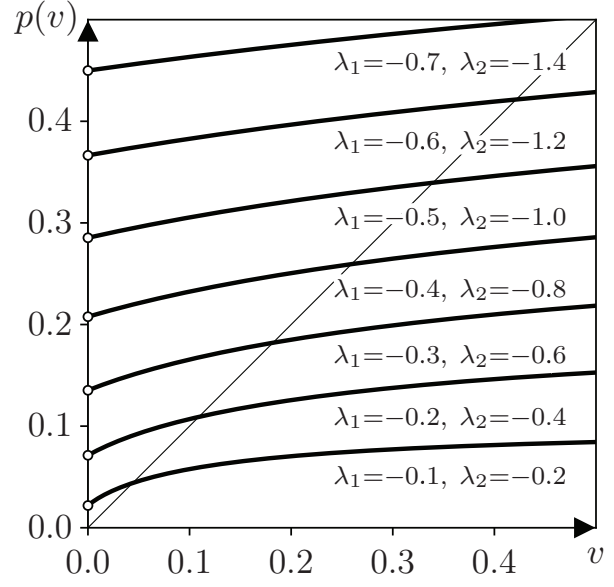
(g) *Если $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ и $\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2} - \lambda_2 e^{-\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} > \frac{1}{2}$, то у отображения $p(v)$ нет неподвижных точек.*

При $v > \tilde{v}$ отображение $p(v)$ возрастает и стремится к бесконечности при $v \rightarrow k_1$.

Данный случай отличается отсутствием устойчивых неподвижных и периодических точек. Поскольку интереса неустойчивые решения не представляют, доказательство этой теоремы мы не приводим.



Графики отображения $p(v)$ при различных значениях параметров в случаях (b) (пунктир) и (c) (сплошная линия).



Графики отображения $p(v)$ при различных значениях параметров в случае (d).

Рис. 2. Графики отображения $p(v)$ в случае $\lambda_1 \lambda_2 s < 0$. Неподвижным точкам отображения $p(v)$ соответствуют пересечения графиков $p(v)$ с главной диагональю.

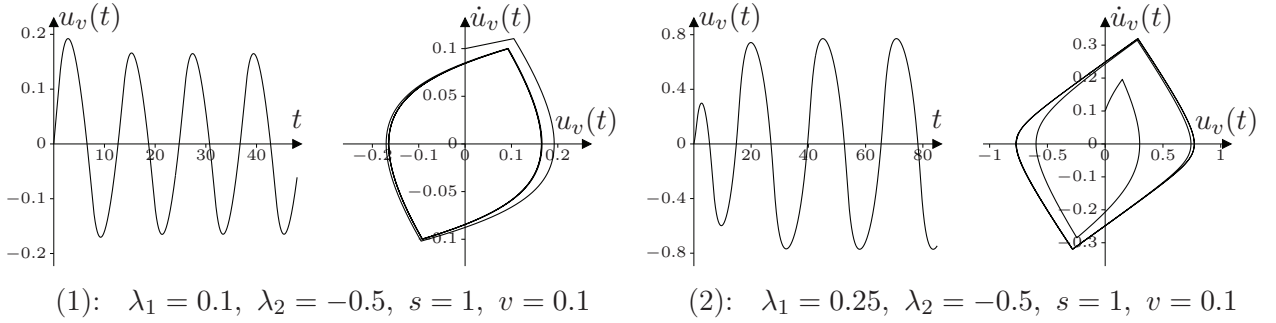


Рис. 3. Графики решений в случае (c).

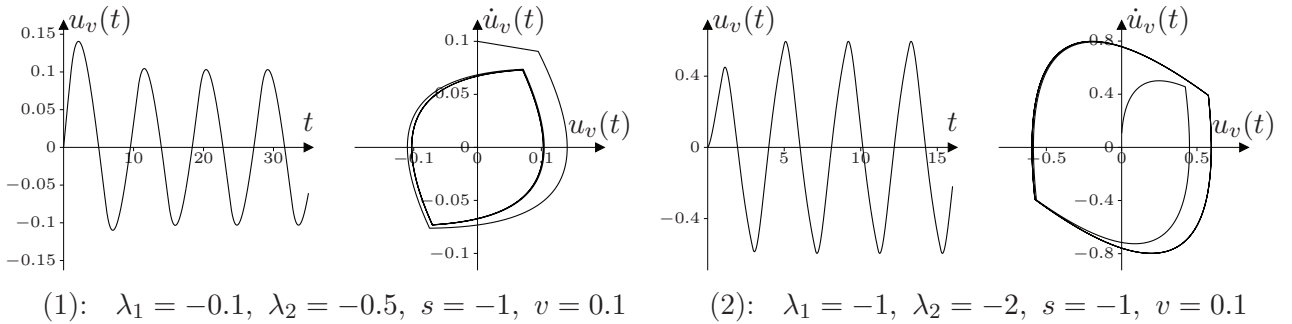
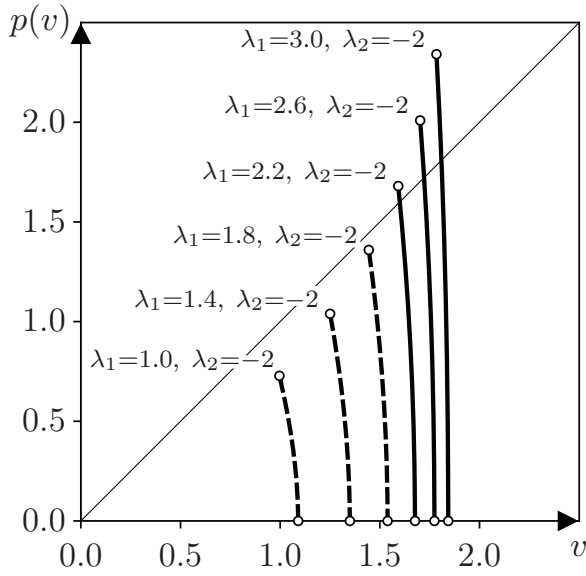
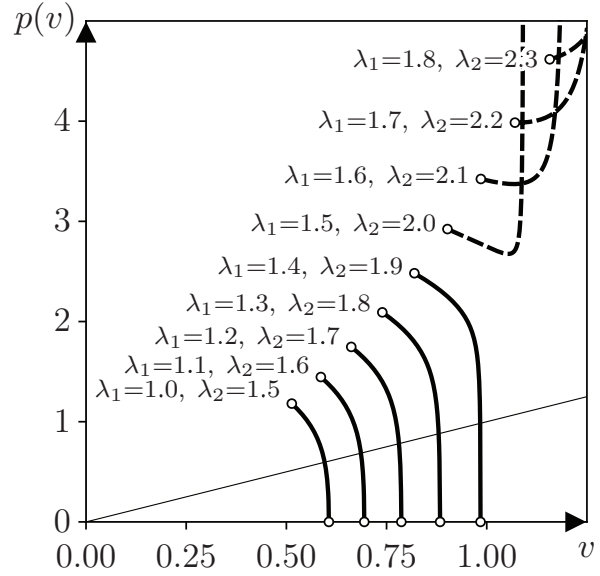


Рис. 4. Графики решений в случае (d).



Графики отображения $p(v)$ при различных значениях параметров в случаях (е) (пунктир) и (f) (сплошная линия).



Графики отображения $p(v)$ при различных значениях параметров в случаях (f) (сплошная линия) и (g) (пунктир).

Рис. 5. Графики отображения $p(v)$ в случае $\lambda_1 \lambda_2 s > 0$. Неподвижным точкам отображения $p(v)$ соответствуют пересечения графиков $p(v)$ с главной диагональю.

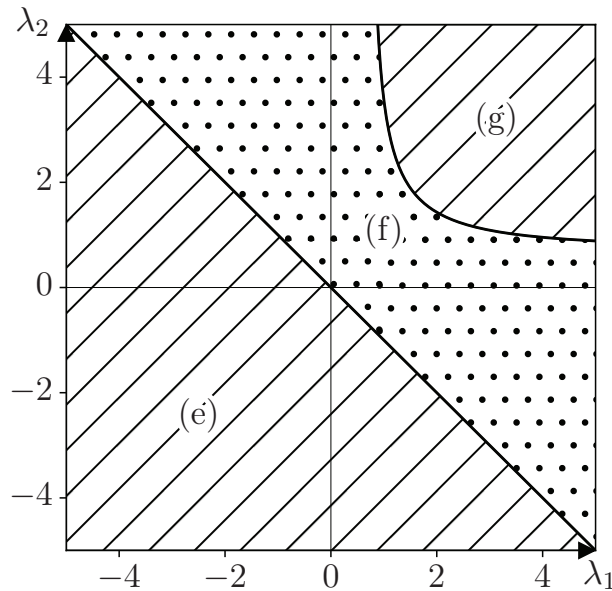


Рис. 6. Области пространства параметров в случае $\lambda_1 \lambda_2 s > 0$.

На рис. 5 изображены графики отображения $p(v)$ при различных значениях параметров, удовлетворяющих неравенству $\lambda_1 \lambda_2 s > 0$. Эти графики иллюстрируют наличие неустойчивой неподвижной точки в случае (f), а также характер появления неподвижной точки при переходе от случая (е) к случаю (f) и при переходе от случая (g) к случаю (f).

Численные эксперименты, в том числе с быстро осциллирующими начальными условиями, указывают на то, что описанные в этой работе случаи исчерпывающе описывают динамику уравнения (1). Точнее, наблюдается, что при любых начальных функциях решение либо стремится к бесконечности, либо стремится к неподвижной точке, либо происходит наматывание на цикл. При этом периодических решений, кроме тех, что мы рассмотрели не наблюдается.

На обосновании этих утверждений мы не останавливаемся, так как численному исследованию уравнения (1) при произвольных параметрах будет посвящена отдельная статья.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кащенко С. А.* Сравнительный асимптотический анализ динамики автогенераторов с различными нелинейными запаздывающими связями// Фундам. прикл. мат. — 1999. — 5, № 4. — С. 1027–1060.
2. *Дмитриев А. С., Кащенко С. А.* Асимптотика нерегулярных колебаний в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью// Докл. РАН. — 1993. — 328, № 2. — С. 174–177.
3. *Кащенко С. А.* Асимптотика релаксационных колебаний в системах дифференциально-разностных уравнений с финитной нелинейностью. I// Диффер. уравн. — 1995. — 31, № 8. — С. 1330–1339.
4. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Явление буферности в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 2014. — 78, № 4. — С. 73–108.
5. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1997. — 216. — С. 126–153.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00209).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баин Данила Денисович

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: danila.bain@yandex.com