



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 150–164
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-150-164

УДК 517.977.1, 517.928

РОБАСТНЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

© 2023 г. О. Б. ЦЕХАН

Аннотация. Для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с малым параметром при части старших производных исследуется свойство равномерной наблюдаемости, характеризующее возможность однозначного определения состояния системы в любой момент времени t по значениям выходной функции и ее производных до определенного порядка только в точке t , а также свойство аппроксимативной наблюдаемости, состоящее в возможности с помощью δ -последовательностей сколь угодно точно оценить текущее состояние системы без дифференцирования выходной функции.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система, нестационарная система, равномерная наблюдаемость, аппроксимативная наблюдаемость, расщепляющее преобразование, робастные достаточные условия.

ROBUST SUFFICIENT CONDITIONS FOR UNIFORM OBSERVABILITY OF A LINEAR NONSTATIONARY SINGULARLY PERTURBED SYSTEM

© 2023 О. В. TSEKHAN

ABSTRACT. For a linear nonstationary singularly perturbed system with small coefficients of higher derivatives, we examine the property of uniform observability, which characterizes the possibility of uniquely determining the state of the system at any time t by the values of the output function and its derivatives up to a certain order only at the point t , as well as the property of approximative observability, which means the possibility of accurate estimating the current state of the system without differentiating the output function using δ -sequences.

Keywords and phrases: singularly perturbed system, nonstationary system, uniform observability, approximate observability, splitting transformation, robust sufficient conditions.

AMS Subject Classification: 34Kxx

1. Введение. Наблюдаемость наряду с устойчивостью, управляемостью, стабилизируемостью является фундаментальным структурным свойством динамических систем. Суть задачи наблюдаемости заключается в выяснении возможности однозначного восстановления текущих (или начальных) состояний системы по данным наблюдений, что равносильно взаимно однозначному соответствию между выходами и порождающими их состояниями системы. При этом важно понимать, какая информация о выходе используется для восстановления состояния, с помощью каких операций происходит восстановление (алгебраические методы, разрешающие операции, наблюдатели).

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф22-050).

В отличие от стационарных, для нестационарных систем различают целый ряд понятий наблюдаемости (см. [9] и ссылки в этой работе): полная, дифференциальная, равномерная, равномерно полная, аппроксимативная, равномерно точечная, наблюдаемость с помощью разрешающих операций, наблюдаемость в классе систем функций Чебышева, хессенбергова и др. Для стационарных систем условия полной, дифференциальной, равномерной наблюдаемости совпадают, для нестационарных систем это не так. Полная наблюдаемость стационарной системы гарантирует существование для нее асимптотического эстиматора (см. [26]).

Для проверки наблюдаемости используются разные условия, которые могут быть сформулированы с использованием фундаментальной матрицы (неявные условия наблюдаемости; см. [11]), в терминах грамиана наблюдаемости, вронскиана, системы функций Чебышева (см. [5]). Так как получить в явном виде фундаментальную матрицу для нестационарной системы удастся лишь в исключительных случаях, то важной является задача исследования проблемы наблюдаемости без использования явного вида фундаментальной матрицы. Выразить условия наблюдаемости непосредственно через параметры исходной системы наблюдения при определенных условиях удастся с помощью матрицы наблюдаемости $S(t)$ (см. [16, 17, 28]), построенной для достаточно гладких параметров системы наблюдения. Понятие равномерной наблюдаемости впервые было введено в [28] в терминах матрицы наблюдаемости $S(t)$, удовлетворяющей требованию невырожденности при всех t . В [27] невырожденность матрицы наблюдаемости использована как чисто техническое средство, позволяющее строить канонические формы систем управления и систем наблюдения.

В [6] равномерная наблюдаемость определяется в терминах отображения «состояние $x(t) \rightarrow$ вектор $(y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ », где $y(t)$ — выходной сигнал, что отражает возможность в любой момент времени t алгебраическим путем определять текущее состояние системы $x(t)$ по значениям только в этот момент времени t выходного сигнала и его производных. Это важно, так как при конструировании систем регулирования, как правило, регулятор строится в виде функции текущего состояния системы $x(t)$. В [2–4, 6–8, 12, 13] равномерная наблюдаемость исследована систематически исходя из определения в терминах выходных функций.

Впервые матрица наблюдаемости введена в [28] для систем с определенными требованиями на гладкость параметров системы. Вместе с тем эти требования по существу наложены для обеспечения требуемой гладкости только выходной функции, поэтому в общем случае они могут быть ослаблены. Это сделано в [13], где для произвольного целого $k > 0$ введено понятие систем наблюдения класса k . С помощью этого понятия установлены точные, в общем случае более слабые, чем ранее известные (см., например, [17]), требования на гладкость параметров системы, обеспечивающие принадлежность выходной функции $y(t)$ классу C^k , сформулированы необходимые и достаточные условия равномерной наблюдаемости в терминах матрицы наблюдаемости. Установлено, что множество $\mathcal{R}$ равномерно наблюдаемых систем устойчиво относительно группы линейных преобразований с гладкими коэффициентами, дано полное описание множества $\mathcal{R}$.

В [9] показано, что условия равномерной наблюдаемости совпадают с условиями аппроксимативной наблюдаемости, т.е. возможности с помощью δ -последовательностей сколь угодно точно оценить текущее состояние системы без дифференцирования выходной функции.

Сингулярно возмущенные системы являются математическими моделями динамических систем, в которых реализуются одновременно несколько взаимосвязанных подпроцессов с существенно различающимися темпами (см. обзорные работы [10, 14, 22, 24] и ссылки в них). Высокая размерность моделей и наличие разнотемповых переменных обуславливают проблемы вычислительной жесткости, повышения порядка динамических уравнений, что вызывает трудности при численном исследовании таких систем. Заметим, что для сингулярно возмущенных систем исследуют условия наличия структурных свойств при всех достаточно малых значениях параметра.

Для решения проблем большой размерности и жесткости сингулярно возмущенных систем, исследования их структурных свойств и построения способов управления и наблюдения прибегают к процедурам декомпозиции. Известен подход (см. [20, 21]) к исследованию структурных свойств сингулярно возмущенных систем, состоящий в том, что к системе применяется невырожденное расщепляющее преобразование, эквивалентным образом сводящее исходную двухтемповую систему к разделенным по темпам системам меньшей размерности, асимптотически (по малому параметру) близким к подсистемам, не зависящим от малого параметра. Такая декомпозиция позволяет выводить суждения о структурных свойствах сингулярно возмущенных систем при всех достаточно малых значениях параметра по наличию аналогичных свойств у связанных с

ней не зависящих от малого параметра подсистем меньшей размерности. Доказательство такого рода суждений может быть основано на исследовании зависимости от малого параметра свойств объектов (матриц, спектров и т. п.), в терминах которых формулируются условия. Проблема применения декомпозиционного подхода заключается в том, чтобы установить условия на параметры исходной системы, при которых возможна декомпозиция сингулярно возмущенных систем, а также справедливы суждения о связи структурных свойств исходной сингулярно возмущенной системы и асимптотически близких к ней подсистем. Например, для стационарных систем при малых возмущениях параметров системы полнота ранга матриц из условий наличия структурных свойств сохраняется. На этом свойстве основывается утверждение (см. [23, с. 100]) о том, что управляемая стационарная система сохраняет управляемость при малых аддитивных возмущениях матриц системы, что в силу принципа двойственности справедливо и для наблюдаемости стационарных систем. Для нестационарных систем аналогичные утверждения справедливы лишь при выполнении некоторых дополнительных требований. Так, в отличие от стационарных систем, при применении критериев, использующих матрицу наблюдаемости, требуется установление условий принадлежности системы классу $n - 1$ для всех достаточно малых значений параметра, и условий, обеспечивающих асимптотическую близость матриц наблюдаемости исследуемой системы и связанных с ней не зависящих от параметра вырожденной системы и системы погранслоя.

В настоящей работе для линейной нестационарной двухтемповой сингулярно возмущенной системы исследуются условия равномерной наблюдаемости, аппроксимативной наблюдаемости в терминах принадлежности нестационарной системы наблюдения классу k и полноты ранга матрицы наблюдаемости. Получены не зависящие от малого параметра условия принадлежности линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы классу k , обеспечивающие существование матрицы наблюдаемости системы при любом положительном значении параметра, исследованы свойства зависящей от малого параметра матрицы наблюдаемости системы, установлена связь между матрицами наблюдаемости исходной системы и не зависящих от малого параметра медленной и быстрых подсистем, построенных по исследуемой системе и имеющих размерность меньше исходной.

На основе полной декомпозиции системы по темпам изменения переменных состояния, выполненной с помощью линейной невырожденной замены переменных, доказаны эффективные с конструктивной точки зрения ранговые, не зависящие от параметра и справедливые для всех его достаточно малых значений достаточные условия равномерной и аппроксимативной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы. Условия выражены через матричные коэффициенты медленной и быстрых подсистем в терминах матриц наблюдаемости этих подсистем. Аналогичный результат для свойства равномерно полной наблюдаемости получен в [25, следствие 2].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описана исследуемая система, введены основные понятия, определены цели исследования. В разделе 3 установлены зависящие от параметра критерии равномерной и аппроксимативной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы. В разделе 4 введены связанные с системой не зависящие от параметра вырожденная система и система погранслоя, получены критерии их равномерной наблюдаемости. В разделе 5 исследована структура матрицы наблюдаемости системы и доказана лемма о принадлежности системы классу k независимо от малого параметра. В разделе 6 доказан основной результат: робастные по малому параметру и не зависящие от него достаточные условия равномерной и аппроксимативной наблюдаемости системы. В заключение приведен пример, иллюстрирующий применение результатов, сделаны выводы.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + A_2(t)y(t), & x \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \mu \dot{y}(t) = A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t), & y \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \\ v(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t), & v \in \mathbb{R}, \quad t \in T. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь μ — параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $x(t)$ — медленная переменная, $y(t)$ — быстрая переменная, $v(t)$ — выход системы, $A_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, — непрерывные на T матричные функции соответствующих размеров, $c_j(t)$, $j = 1, 2$, — непрерывные на T вектор-строки функции. Здесь и далее при $i = 0, 1, 2, \dots$ для произвольной матричной функции будем говорить, что она i раз непрерывно дифференцируема, если все ее элементы i раз непрерывно дифференцируемы.

Обозначим $n = n_1 + n_2$, $z' = (x', y')$, $z'_0 = (x'_0, y'_0)$, $'$ — символ транспонирования. Определим по параметрам системы вектор-функцию $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, а также зависящую от параметра $\mu > 0$ матричную функцию

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t)/\mu & A_4(t)/\mu \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Тогда систему (1) можно представить в пространстве состояний в эквивалентном виде

$$(A(\mu), c) : \begin{cases} \dot{z}(t) = A(t, \mu)z(t), & z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \\ v(t) = c(t)z(t), & v \in \mathbb{R}, \quad t \in T, \\ z(t_0) = z_0. \end{cases} \quad (3)$$

Для удобства изложения отождествим систему (1) с парой $(A(\mu), c)$, состоящей из функций $A(t, \mu)$ и $c(t)$, а совокупность всех таких пар с непрерывными на T компонентами обозначим Σ .

Следуя [12, с. 166–168], при фиксированном $\mu > 0$ определим оператор $L : \Sigma \rightarrow \Sigma$, действующий по правилу

$$L(A(\mu), c) = (A(\mu), cA(\mu) + \dot{c}). \quad (4)$$

Область его определения $\mathcal{D}$ состоит из таких пар $(A(\mu), c)$, у которых функция $c(t)$ непрерывно дифференцируема. Если элементы n -вектор-функции

$$s(t, \mu) = c(t)A(t, \mu) + \dot{c}(t)$$

принадлежат множеству $C^1(T, \mathbb{R})$, то на паре $(A(\mu), c)$ определен оператор L^2 , для которого

$$L^2(A(\mu), c) = L(L(A(\mu), c)) = L(A(\mu), s), \quad s(t, \mu) = c(t)A(t, \mu) + \dot{c}(t).$$

По индукции можно найти любую степень L^k оператора L , область определения которой обозначим через $\mathcal{D}_k$. Для $k = 0$ полагаем

$$L^0(A(\mu), c) = (A(\mu), c), \quad \mathcal{D}_0 = \Sigma.$$

Каждая система $(A(\mu), c) \in \mathcal{D}_k$ называется системой класса k (см. [6]).

Замечание 1 (см. [6]). Если элементы матрицы $A(t, \mu)$ и строки $c(t)$ принадлежат пространствам $C^{k-1}(T, \mathbb{R})$ и $C^k(T, \mathbb{R})$ соответственно, то $(A(\mu), c) \in \mathcal{D}_k$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть в линейной нестационарной сингулярно возмущенной системе реализовалось некоторое фиксированное $\mu \in (0, \mu^0]$ и для $(A(\mu), c) \in \mathcal{D}_{n-1}$ реализовалось некоторое начальное состояние $z_0 = z(t_0) \in \mathbb{R}^n$, что породило процесс $z(t, \mu) = z(t, z_0, \mu)$, $t \in T$, и выходную функцию $v(t, \mu) = v(t, z_0, \mu)$, $t \in T$.

Определим n -вектор-столбец

$$V(t, \mu) = (v(t, \mu), v^{(1)}(t, \mu), \dots, v^{(n-1)}(t, \mu))'.$$

Определение 1 (ср. [6]). При любом фиксированном $\mu > 0$ система (1) класса $n - 1$ называется *равномерно наблюдаемой на отрезке T* , если при любом $z_0 \in \mathbb{R}^n$ отображение $z(t, \mu) \rightarrow V(t, \mu)$ инъективно для каждого $t \in T$.

Если при некотором $\mu^* \in (0, \mu^0]$ система (1) равномерно наблюдаема на T для всех $\mu \in (0, \mu^*]$, будем говорить, что она *равномерно наблюдаема на отрезке T робастно относительно μ* .

Пусть известна выходная функция $v(t, \mu) = v(t, \mu, z_0)$ системы (1), реализовавшаяся при некотором неизвестном z_0 и известном фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$.

Пусть задана некоторая δ -последовательность (см. [1]) $\{\delta_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$. Определим величины

$$v_m^{(j)}(t, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t - \tau, \mu) \delta_m^{(j)}(\tau) d\tau, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1,$$

и составим вектор-столбец $V_m(t, \mu)$ с компонентами $v_m(t, \mu)$, $v_m^{(1)}(t, \mu)$, $\dots$, $v_m^{(n-1)}(t, \mu)$. Каждая последовательность $\{v_m^{(j)}(t, \mu)\}_{m=1}^\infty$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, почти равномерно на T сходится к j -й производной $v^{(j)}(t, \mu)$.

Определение 2. При любом фиксированном $\mu > 0$ система (1) класса $n-1$ называется *аппроксимативно наблюдаемой в классе δ -последовательностей*, если при любом $z_0 \in R^n$ функция $v(t, \mu)$ принадлежит классу C^{n-1} и существует такая непрерывная, не зависящая от z_0 , обратимая при любом $v \in T$ матрица $M(t, \mu)$ размера $(n \times n)$, что для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $m_0 = m(z_0, t, \delta)$, обладающий свойством

$$\|z(t, \mu, z_0) - M(t, \mu)v_m(t, \mu)\| < \epsilon \quad (5)$$

при $m \geq m_0$, где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$.

Если неравенство (5) выполняется при всех достаточно малых $\mu > 0$, то систему назовем *аппроксимативно наблюдаемой в классе δ -последовательностей робастно относительно μ* .

Замечание 2. В отличие от равномерной наблюдаемости, обеспечивающей возможность точного восстановления текущего состояния системы, аппроксимативная наблюдаемость гарантирует лишь возможность оценить текущее состояние с любой заданной точностью.

Обозначим символом $O(\mu)$ вектор-функцию $f(t, \mu)$ (размерность следует из контекста) на интервале $[t_1, t_2]$, элементы $f_i(t, \mu)$ которой таковы, что существуют такие постоянные $\mu^* > 0$, $c > 0$, что евклидова норма $|f(t, \mu)|$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t, \mu)| \leq c\mu \quad \forall \mu \in (0, \mu^*], \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Задача. Найти условия на матричные параметры системы (1), при которых система (1) равномерно аппроксимативно наблюдаема для всех достаточно малых значений $\mu > 0$, т.е. робастно относительно μ .

3. Наблюдаемость линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем. При фиксированном $\mu > 0$ для $(A(\mu), c) \in \mathcal{D}_{n-1}$ по параметрам $A(t, \mu)$, $c(t)$ системы (3) определим n -вектор-строки $s_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, по формулам

$$s_0(t, \mu) = c(t), \quad s_j(t, \mu) = s_{j-1}(t, \mu)A(t, \mu) + \dot{s}_{j-1}(t, \mu), \quad (6)$$

и составим из них $(n \times n)$ -матрицу

$$S_{A(\mu), c}(t, \mu) = (s_j(t, \mu))_{j=\overline{0, n-1}}, \quad t \in T. \quad (7)$$

Матрица $S_{A(\mu), c}(t, \mu)$ называется *матрицей наблюдаемости* пары $(A(\mu), c)$.

Из результатов [6], определений системы класса k , степени L^j оператора L (см. (4)), строк $s_j(t)$ (см. (6)) и матрицы наблюдаемости (7) вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. При любом фиксированном $\mu > 0$ следующие утверждения эквивалентны:

- (i) система $(A(\mu), c)$ имеет класс $n-1$;
- (ii) для любого $j = \overline{0, n-1}$ определены степени L^j оператора L (см. (4)) с областью определения $\mathcal{D}_j$;
- (iii) $(A(\mu), c) \in \mathcal{D}_{n-1}$;
- (iv) всякая выходная функция $v(t, \mu) = v(t, \mu, x_0)$ принадлежит множеству $C^{n-1}(T, \mathbb{R}^n)$;
- (v) матрица наблюдаемости $S_{A(\mu), c}(t, \mu)$ (см. (7)) системы $(A(\mu), c)$ определена для любого $t \in T$ и её элементы являются непрерывными на T функциями.

Следствие 1. Любая система класса n является также системой класса k , $k \leq n$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Применяя к системе (3) при фиксированном $\mu > 0$ теоремы из [6], убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. Пара $(A(\mu), c) \in \Sigma$ равномерно наблюдаема на T при фиксированном $\mu > 0$ тогда и только тогда, когда при этом значении μ она имеет класс $n-1$ и $\text{rank } S_{A(\mu), c}(t, \mu) = n$ для любого $t \in T$.

Теорема 2. При фиксированном $\mu > 0$ система (1) аппроксимативно наблюдаема на T тогда и только тогда, когда она равномерно наблюдаема на T при этом фиксированном $\mu > 0$.

4. Подсистемы линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем и их наблюдаемость.

Пусть $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$.

С системой (1) связаны не зависящие от параметра μ вырожденная система и система пограничного слоя, которые получаются из сингулярно возмущенной системы, если рассмотреть ее отдельно в «быстрой» и «медленной» временных шкалах при $\mu = 0$ (см. [20]). Так, вырожденная система (медленная подсистема) формально получается из системы (1), если в ней положить $\mu = 0$, при условии $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$, выразить из уравнения быстрой переменной

$$y_s(t) = -A_4^{-1}(t)A_3(t)x_s(t)$$

и исключить переменную y_s из уравнения для медленной переменной x . Вырожденная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A_s(t)\bar{x}(t), \\ \bar{x}(0) = x_0, \\ v_s(t) = c_s(t)\bar{x}(t), \end{cases} \quad (8)$$

где

$$A_s(t) \triangleq A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad c_s(t) \triangleq c_1(t) - c_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t),$$

и является нестационарной n_1 -мерной системой. Отождествим ее с парой $(A_s, c_s) \triangleq (A_s(t), c_s(t))$.

Соответствующая система пограничного слоя (быстрая подсистема) формально выводится из (1) следующим образом:

- (i) заменить независимую переменную («растянуть» шкалу времени: $\tau = (t - t_0)/\mu$, $t = t_0 + \mu\tau$);
- (ii) подставить $\mu = 0$ в правой части первого уравнения для $x(\tau)$;
- (iii) «заморозить» медленную переменную x в уравнении для быстрой переменной y ;
- (iv) ввести новые переменные состояния $\tilde{y}$ и выходную функцию (на «растянутой» шкале времени):

$$\tilde{y}(\tau) := y(\mu\tau + t_0), \quad \tilde{v}(\tau) := v(\mu\tau + t_0);$$

- (v) члены, содержащие переменную медленного состояния x , удалить из второго уравнения (1).

В результате система пограничного слоя примет вид линейной стационарной n_2 -мерной системы

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = A_4(t_0)\tilde{y}(\tau), & \tau = \frac{t - t_0}{\mu} \in T_\mu \triangleq \left[0, \frac{t_1 - t_0}{\mu}\right], \\ v_f(\tau) = c_2(t_0)\tilde{y}(\tau), \\ \tilde{y}(\tau) = y(t) - y_s(t), \\ \tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0 \triangleq y_0 - \bar{y}(t_0) = y_0 + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0. \end{cases} \quad (9)$$

Отождествим ее с парой $(A_4, c_2) \triangleq (A_4(t_0), c_2(t_0))$.

Для вырожденной системы (8) и системы пограничного слоя (9) понятия равномерной наблюдаемости вводятся, как в [6].

Определение 3. Вырожденная система (8) называется *равномерно наблюдаемой на отрезке* T , если при любом $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ функция $v_s(t) = v_s(t, x_0)$ является $(n_1 - 1)$ раз непрерывно дифференцируемой на T (т.е. $(A_s, c_s) \in \mathcal{D}_{n_1-1}$) и отображение

$$x_s(t) \rightarrow (v_s(t), v_s^{(1)}(t), \dots, v_s^{(n_1-1)}(t)), \quad v_s(t) = v_s(t, x_0)$$

инъективно для каждого $t \in T$.

Определение 4. Система пограничного слоя (9) называется *равномерно наблюдаемой на T_μ* , если при любом $\tilde{y}_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ отображение

$$\tilde{y}(\tau) \rightarrow (v_f(\tau), v_f^{(1)}(\tau), \dots, v_f^{(n_2-1)}(\tau)), \quad v_f(\tau) = v_f(\tau, \tilde{y}_0)$$

инъективно для каждого $\tau \in T_\mu$.

Наряду со стационарной системой пограничного слоя (9) введем семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ вида (9) с $A_4(t)$ и $c_2(t)$ вместо $A_4(t_0)$ и $c_2(t_0)$, где $t \in T$ — фиксированное значение, рассматриваемое как параметр семейства. Система пограничного слоя (9) выделяется из семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ при $t = t_0$.

Определение 5. Семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ называется *равномерно наблюдаемым на T_μ* , если любая подсистема из семейства ($t \in T$) равномерно наблюдаема.

Пусть $(A_s, c_s) \in \mathcal{D}_{n_1-1}$. Определим следующие матрицы: $(n_1 \times n_1)$ -матрицу наблюдаемости вырожденной системы (A_s, c_s) :

$$S_s(t) = \begin{pmatrix} s_{s0}(t) \\ s_{s1}(t) \\ \dots \\ s_{s,n_1-1}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad (10)$$

где n_1 -вектор-строки $s_{sj}(t)$, $j = 1, 2, \dots$, определяются по формулам

$$s_{sj}(t) = s_{s,j-1}(t)A_s(t) + \dot{s}_{s,j-1}(t), \quad s_{s0}(t) = c_s(t), \quad (11)$$

и $(n_2 \times n_2)$ -матрицу наблюдаемости семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$, $t \in T$:

$$S_f(t) = \begin{pmatrix} s_{f0}(t) \\ s_{f1}(t) \\ \dots \\ s_{f,n_2-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где n_2 -вектор-строки $s_{f0}(t)$, $s_{f1}(t)$, $\dots$ определяются по формулам

$$s_{fj}(t) = s_{f,j-1}(t)A_4(t), \quad s_{f0}(t) = c_2(t). \quad (13)$$

Заметим, что $S_f(t_0)$ совпадает с матрицей наблюдаемости стационарной системы пограничного слоя (9).

Применяя к вырожденной системе (8) и системе пограничного слоя (9) условия из [5, стр.89], получаем следующее утверждение.

Теорема 3 (условия равномерной наблюдаемости). *Вырожденная система равномерно наблюдаема тогда и только тогда, когда она имеет класс $(n_1 - 1)$ и $\text{rank } S_s(t) = n_1$ для любого $t \in T$. Система пограничного слоя (9) равномерно наблюдаема тогда и только тогда, когда $\text{rank } S_f(t_0) = n_2$.*

Теорема 4 (условия равномерной наблюдаемости семейства быстрых подсистем). *Семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ равномерно наблюдаемо тогда и только тогда, когда $\text{rank } S_f(t) = n_2$ для всех $t \in T$.*

5. Линейные нестационарные сингулярно возмущенные системы класса k . При исследовании сингулярно возмущенных систем важно иметь не зависящие от малого параметра условия, при которых система обладает некоторым свойством при *всех достаточно малых значениях параметра*. Прежде всего получим такие условия для свойства принадлежности системы классу k . Для этого представим матрицу $A(t, \mu)$ (см. (2)) в виде

$$A(t, \mu) = A^1(t) + \frac{1}{\mu}A^2(t), \quad A^1(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Согласно (14) поставим в соответствие n -мерной системе $(A(\mu), c)$ (см. (1)) тройку $(A^1(t), A^2(t), \{c(t), 0_{1 \times (n-1)}\})$. Определим n -вектор-функции $s_0^0(t) = c(t)$, $s_0^m(t) = 0_{1 \times n}$, $m = 1, 2, \dots, n-1$, и положим

$$\Gamma^0(t) = \{s_0^m(t), m = 0, 1, \dots, n-1\} \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Множество всех троек $(A^1(t), A^2(t), \Gamma(t))$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n^2}$, с непрерывными на T компонентами обозначим $\Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma)}$. На тройке $(A^1(t), A^2(t), \Gamma^0(t)) \in \Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma)}$ определим оператор

$$\Lambda : \Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma(t))} \rightarrow \Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma)}, \quad \Lambda(A^1, A^2, \Gamma^0) = (A^1, A^2, \Gamma^1),$$

где $\Gamma^1(t) = \{s_1^0(t), s_1^1(t), \dots, s_1^{n-1}(t)\} \in \mathbb{R}^{n^2}$, компоненты $s_1^m(t)$, $m = 0, 1$, вычислены по формулам

$$s_1^0(t) = s_0^0(t)A^1(t) + \dot{s}_0^0(t), \quad s_1^1(t) = s_0^0(t)A^2(t), \quad s_1^m(t) = 0_{1 \times n}, \quad m = 2, 3, \dots, n-1.$$

Область определения D оператора Λ состоит из таких троек $(A^1, A^2, \Gamma^0) = (A^1, A^2, \{c, 0_{1 \times (n-1)n}\}) \in \Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma)}$, у которых функция $c(t)$ непрерывно дифференцируема.

При условии достаточной гладкости матриц системы для $j = 0, 1, 2, \dots$ определим n -вектор-функции $s_j^m(t)$ рекуррентными соотношениями

$$s_j^m(t) = \begin{cases} s_0^0(t) = c(t), \\ s_j^m(t) = 0, \\ s_{j-1}^m(t)A^1(t) + s_{j-1}^{m-1}(t)A^2(t) + \dot{s}_{j-1}^m(t), \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{если } m > j \text{ или } m < 0, \\ \text{если } m = \overline{1, j-1}. \end{array} \quad (15)$$

Если компоненты элементов множества $\Gamma^1(t)$ принадлежат множеству $C^1(T, \mathbb{R})$, то на тройке $(A^1, A^2, \Gamma^1) \in \Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma)}$ определен оператор Λ^2 , для которого

$$\Lambda^2(A^1, A^2, \Gamma^0) = \Lambda(\Lambda(A^1, A^2, \Gamma^0)) = \Lambda(A^1, A^2, \Gamma^1) = (A^1, A^2, \Gamma^2),$$

где $\Gamma^2(t) = \{s_2^m(t), m = \overline{0, n-1}\} \in \mathbb{R}^{n^2}$, а $s_2^m(t)$, $m = \overline{0, n-1}$, вычислены по формулам (15).

Область определения D_2 оператора Λ^2 состоит из троек $(A^1, A^2, \{c, 0_{1 \times (n-1)n}\})$, для которых компоненты элементов множества $\Gamma^1(t)$ принадлежат множеству $C^1(T, \mathbb{R})$.

По индукции можно найти любую степень Λ^k оператора Λ , область определения которой обозначим через D_k . Для $k = 0$ полагаем

$$\Lambda^0(A^1, A^2, \Gamma^0) = (A^1, A^2, \Gamma^0), \quad D_0 = \Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma^0)}.$$

Лемма 1 (о структуре матрицы наблюдаемости). *Если $(A^1, A^2, \Gamma^0) \in D_{n-1}$, то строки $s_j(t, \mu)$ (см. (6)) матрицы наблюдаемости (7) представимы в виде*

$$s_j(t, \mu) = \sum_{m=0}^j \frac{1}{\mu^m} s_j^m(t), \quad (16)$$

где $s_j^m(t)$ определяются по формуле (15).

Доказательство. Используем метод математической индукции. Для $j = 0$ справедливость (16) следует непосредственно из (6), (15). Пусть (16) верно для $j = \overline{0, k-1}$. Согласно (6) и (14) имеем:

$$\begin{aligned} s_k(t, \mu) &= s_{k-1}(t, \mu) \left(A^1(t) + \frac{1}{\mu} A^2(t) \right) + \dot{s}_{k-1}(t, \mu) \stackrel{(16)}{=} \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{\mu} (s_{k-1}^m(t)A^1 + \dot{s}_{k-1}^m(t)) + \sum_{m=1}^k \frac{1}{\mu} s_{k-1}^{m-1}(t)A^2 \stackrel{(15)}{=} \sum_{m=0}^k \frac{1}{\mu^m} s_k^m(t). \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 2 (о принадлежности системы классу $n-1$). *Пусть $n \geq 2$. Если для любого $j = \overline{0, n-2}$, $m = \overline{0, j}$, матричные функции (15) дифференцируемы, $s_j^m(t) \in C^1(T, \mathbb{R}^n)$, то для любого $\mu > 0$ система $(A(\mu), c)$ является системой класса $n-1$.*

Доказательство. Если верны предположения леммы, то $(A^1, A^2, \Gamma^0) \in D_{n-1}$ и определены вектор-строки $s_j^m(t)$, $j = \overline{0, n-2}$, $m = \overline{0, j}$ (см. (15)), а значит, и $s_j(t, \mu)$ (см. (16)) для всех $\mu > 0$. Следовательно, определена матрица наблюдаемости (7), что согласно предложению 1 (п. (i), (v)) доказывает лемму. $\square$

6. Основной результат. Пусть $\lambda(A(t))$ — собственные значения матрицы $A(t)$.

Теорема 5 (условия равномерной наблюдаемости). Пусть выполнены следующие условия:

- (i) $\Re \lambda(A_4(t)) \leq -\alpha < 0$ для всех $t \in T$;
- (ii) матричные функции $A_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, непрерывно дифференцируемы на T ;
- (iii) если $n \geq 2$, то матричные функции $s_j^m(t)$, $j = \overline{0, n-2}$, $m = \overline{0, j}$ (см. (15)) непрерывно дифференцируемы на T ;
- (iv) матричные функции $A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $A_2(t)A_4^{-1}(t)$ непрерывно дифференцируемы на T ;
- (v) векторные функции $s_{sj}(t)$, $j = \overline{0, n-1}$ (см. (11)) ограничены на T ;
- (vi) вырожденная система (A_s, c_s) (см. (8)) равномерно наблюдаема на T , семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ равномерно наблюдаемо на T .

Тогда найдется такое $\mu^* \in (0, \mu^0]$, что система (1) равномерно наблюдаема на T при любом фиксированном $\mu \in (0, \mu^*]$, т.е. робастно относительно μ .

Доказательство. Заметим прежде всего, что из предположения (i) следует, что $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$. Далее, при условиях (i), (ii) существует невырожденное линейное нестационарное преобразование $K(t, \mu)$ (см. [18])

$$K(t, \mu) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu H(t, \mu) \\ -L(t, \mu) & E_{n_2} - \mu L(t, \mu)H(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad \det K(t, \mu) \neq 0 \quad \forall \mu > 0, \quad t \in T, \quad (17)$$

где $L(t, \mu)$, $H(t, \mu)$ — ограниченные на T непрерывно дифференцируемые матричные функции с ограниченными на T производными. При этом справедливо представление

$$\begin{aligned} L(t, \mu) &= L_0(t) + \mu R_L(t, \mu), & L_0(t) &= A_4^{-1}(t)A_3(t), \\ H(t, \mu) &= H_0(t) + \mu R_H(t, \mu), & H_0(t) &= A_2(t)A_4^{-1}(t), \end{aligned} \quad (18)$$

где при выполнении условия (iv) матричные функции $R_L(t, \mu)$, $R_H(t, \mu)$ являются ограниченными на T (см. [20, с. 211]). Поэтому при выполнении условий (i), (ii) справедливы аппроксимации

$$L(t, \mu) = L_0(t) + O(\mu), \quad H(t, \mu) = H_0(t) + O(\mu). \quad (19)$$

В результате замены переменных

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = K^{-1}(t, \mu) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

линейная нестационарная сингулярно возмущенная система (1) преобразуется в эквивалентную систему с разделенными движениями:

$$(A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}) : \begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_{\xi}(t, \mu)\xi(t), & \xi \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \mu\dot{\eta}(t) = A_{\eta}(t, \mu)\eta(t), & \eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in T, \\ v(t) = c_{\xi\eta}(\mu, t)(\xi(t), \eta(t))', & t \in T, \end{cases} \quad (20)$$

где, с учетом (8), (17), (18), (19),

$$\begin{aligned} A_{\xi}(t, \mu) &\triangleq A_1(t) - A_2(t)L(t, \mu) = A_s(t) + \mu A_2 R_L(t, \mu) = A_s(t) + O(\mu), \\ A_{\eta}(t, \mu) &\triangleq A_4(t) + \mu L(t, \mu)A_2(t) = A_4(t) + O(\mu), \\ c_{\xi\eta}(\mu, t) &= (c_{\xi}(\mu, t) \quad c_{\eta}(\mu, t)), \\ c_{\xi}(\mu) &\triangleq c_1(t) - c_2(t)L(\mu, t) = c_s(t) - \mu c_2 R_L(t, \mu) = c_s(t) + O(\mu), \\ c_{\eta}(\mu, t) &\triangleq c_2(t) + \mu c_1(t)H(\mu, t) - \mu c_2(t)L(\mu, t)H(\mu, t) = c_2(t) + O(\mu). \end{aligned} \quad (21)$$

Известно (см. [2, лемма 1]), что свойство равномерной наблюдаемости системы (1) инвариантно относительно действия группы обратимых линейных нестационарных преобразований на пространстве R^n с гладкими коэффициентами. Значит, исходная (1) и расщепленная (20) системы одновременно являются равномерно наблюдаемыми или нет.

Из предположения (iii) согласно лемме 2 следует, что $(A(\mu), c)$ является системой класса $n - 1$ для любого $\mu > 0$. Так как для любого $k > 0$ множество $\mathcal{D}_k$ систем класса k инвариантно относительно действия невырожденных преобразований (см. [5, теорема 1.1.1, с. 17]), то расщепленная система (20)

$$(A_{\xi\eta}(t, \mu), c), \quad A_{\xi\eta}(t, \mu) = \text{diag} \left\{ A_{\xi}(t, \mu), \frac{A_{\eta}(t, \mu)}{\mu} \right\},$$

также является системой класса $n - 1$. Из предложения 1 (пп. (i) и (v)) следует, что для нее определена матрица наблюдаемости

$$S_{A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}}(t, \mu) = \begin{pmatrix} S_{\xi\eta 0}(t, \mu) \\ S_{\xi\eta 1}(t, \mu) \\ \dots \\ S_{\xi\eta, n-1}(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad (22)$$

составленная из n -вектор-строк $s_{\xi\eta j}(t, \mu)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, определенных по формулам

$$s_{\xi\eta j}(t, \mu) = s_{\xi\eta, j-1}(t, \mu)A_{\xi\eta}(t, \mu) + \dot{s}_{\xi\eta, j-1}(t, \mu), \quad s_{\xi\eta 0}(t, \mu) = c_{\xi\eta}(t, \mu), \quad (23)$$

и к ней применим критерий равномерной наблюдаемости из Теоремы 1: $\text{rank } S_{A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}}(t, \mu) = n$.

В силу диагональной структуры матрицы $A_{\xi\eta}(t, \mu)$ матрица наблюдаемости (22) расщепленной системы (20) имеет блочную структуру:

$$S_{\xi\eta}(t, \mu) = (S_{\xi}(t, \mu) \mid S_{\eta}(t, \mu)),$$

где

$$\begin{aligned} S_{\xi}(t, \mu) &= \begin{pmatrix} s_{\xi 0}(t, \mu) \\ s_{\xi 1}(t, \mu) \\ \dots \\ s_{\xi, n-1}(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad S_{\eta}(t, \mu) = \begin{pmatrix} s_{\eta 0}(t, \mu) \\ s_{\eta 1}(t, \mu) \\ \dots \\ s_{\eta, n-1}(t, \mu) \end{pmatrix}, \\ s_{\xi j}(t, \mu) &= s_{\xi, j-1}(t, \mu)A_{\xi}(t, \mu) + \dot{s}_{\xi, j-1}(t, \mu), \quad s_{\xi 0}(t, \mu) = c_{\xi}(t, \mu), \\ s_{\eta j}(t, \mu) &= s_{\eta, j-1}(t, \mu)\frac{A_{\eta}(t, \mu)}{\mu} + \dot{s}_{\eta, j-1}(t, \mu), \quad s_{\eta 0}(t, \mu) = c_{\eta}(t, \mu). \end{aligned} \quad (24)$$

Докажем, что для матрицы наблюдаемости (22) расщепленной системы (20) справедливо представление

$$S_{A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}}(t, \mu) = \begin{pmatrix} s_{s0}(t) + O(\mu) & s_{f0}(t) + O(\mu) \\ s_{s1}(t) + O(\mu) & \frac{1}{\mu}(s_{f1}(t) + O(\mu)) \\ \dots & \dots \\ s_{s, n-1}(t) + O(\mu) & \frac{1}{\mu^{n-1}}(s_{f, n-1}(t) + O(\mu)) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $S_{sj}(t)$, $S_{fj}(t)$, $j = \overline{0, n-1}$, вычисляются по формулам (11), (13).

Для этого методом математической индукции докажем представления

$$s_{\xi j}(t, \mu) = \sum_{m=0}^{j+1} \mu^m f_j^m(t, \mu), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (26)$$

где ограниченные на T функции $f_j^m(t, \mu)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} f_j^m(t, \mu) &= f_{j-1}^m(t, \mu)A_s(t) + f_{j-1}^{m-1}(t, \mu)A_2(t)R_L(t, \mu) + \dot{f}_{j-1}^m(t, \mu), \\ f_0^0(t, \mu) &= c_s(t), \quad f_0^1(t, \mu) = -c_2(t)R_L(t, \mu), \\ f_j^m(t, \mu) &= 0, \quad m < 0 \text{ или } m > j + 1, \end{aligned} \quad (27)$$

а также представления

$$s_{\eta j}(t, \mu) = \frac{1}{\mu^j} \left(\sum_{m=0}^{j+1} \mu^m g_j^m(t, \mu) \right), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (28)$$

где ограниченные на T функции $g_j^m(t, \mu)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} g_j^m(t, \mu) &= g_{j-1}^m(t, \mu)A_4(t) + g_{j-1}^{m-1}(t, \mu)L(t, \mu)A_2(t) + \dot{g}_{j-1}^{m-1}(t, \mu), \quad j = 1, 2, \dots, \\ g_0^0(t, \mu) &= c_2(t), \quad g_0^1(t, \mu) = c_1(t)H(t, \mu) + c_2L(t, \mu)H(t, \mu), \\ g_j^m(t, \mu) &= 0, \quad m < 0 \text{ или } m > j + 1. \end{aligned} \quad (29)$$

Справедливость (26) для $j = 0$ следует сразу из (24), (21), (27).

Пусть (26) верно для $j \leq k-1$. Докажем (26) для $j = k$. Действительно, из (24) имеем:

$$\begin{aligned} s_{\xi k}(t, \mu) &= s_{\xi, k-1}(t, \mu)A_{\xi}(t, \mu) + \dot{s}_{\xi, k-1}(t, \mu) \stackrel{(26), (21)}{=} \\ &= \sum_{m=0}^k \mu^m f_{k-1}^m(t, \mu) \left(A_s(t) + \mu A_2 R_L(t, \mu) \right) + \sum_{m=0}^k \mu^m \dot{f}_{k-1}^m(t, \mu) = \\ &= \sum_{m=0}^k \mu^m f_{k-1}^m(t, \mu) A_s(t) + \sum_{m=1}^{k+1} \mu^m f_{k-1}^{m-1}(t, \mu) A_2 R_L(t, \mu) + \sum_{m=0}^k \mu^m \dot{f}_{j-1}^m(t, \mu) \stackrel{(27)}{=} \sum_{m=0}^k \mu^m f_k^m(t, \mu). \end{aligned}$$

Аналогично докажем (28). Справедливость (28) для $j = 0$ следует сразу из (24), (21), (29).

Пусть (28) верно для $j \leq k-1$. Докажем (28) для $j = k$. Действительно, из (24) имеем:

$$\begin{aligned} s_{\eta k}(t, \mu) &= s_{\eta, k-1}(t, \mu) \frac{1}{\mu} A_{\eta}(t, \mu) + \dot{s}_{\eta, k-1}(t, \mu) = \\ &= \frac{1}{\mu^k} \sum_{m=0}^k \mu^m g_{j-1}^m(t, \mu) \left(A_4(t) + \frac{1}{\mu^{k-1}} L(t, \mu) A_2(t) \right) + \sum_{m=0}^k \mu^m \dot{g}_{k-1}^m(t, \mu) \stackrel{(28), (21)}{=} \\ &= \frac{1}{\mu^k} \left(\sum_{m=0}^k \mu^m g_{k-1}^m(t, \mu) A_4(t) + \sum_{m=1}^{k+1} \mu^m g_{k-1}^{m-1}(t, \mu) L(t, \mu) A_2(t) + \sum_{m=0}^k \mu^m \dot{g}_{k-1}^m(t, \mu) \right) = \\ &= \frac{1}{\mu^k} \sum_{m=0}^k \mu^m g_k^m(t, \mu). \end{aligned}$$

Таким образом, равенства (26), (28) доказаны. Из (26), (28) с учетом (27), (29) легко получить

$$s_{\xi j}(t, \mu) = s_{sj}(t) + \mu \sum_{m=0}^j \mu^m f_j^{m+1}(t, \mu), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (30)$$

$$s_{\eta j}(t, \mu) = \frac{1}{\mu^j} \left(c_2(t) A_4^j(t) + \mu \sum_{m=0}^j \mu^m g_j^{m+1}(t, \mu) \right), \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (31)$$

При выполнении условий (iii) для любого $j = \overline{0, n-1}$ верно $s_{\xi \eta, j} \in C(T, \mathbb{R}^n)$; это следует из $\Sigma_{\xi \eta} \in \mathcal{D}_{n-1}$ и предложения 1(i), (v). При выполнении условий (v) функции $s_{\xi j}(t) - s_{sj}(t)$, $j = \overline{0, n-1}$, $\mu^j s_{\eta j}(t) - c_2(t) A_4^j(t)$ ограничены на T , поэтому из (30), (31) следует

$$\begin{aligned} s_{\xi j}(t, \mu) &= s_{sj}(t) + O(\mu), \quad j = \overline{0, n-1}, \\ s_{\eta j}(t, \mu) &= \frac{1}{\mu^j} \left(c_2(t) A_4^j(t) + O(\mu) \right), \quad j = \overline{0, n-1}, \end{aligned}$$

т.е. справедливо (25). Умножим $S_{A_{\xi \eta}(\mu), c_{\xi \eta}}(t, \mu)$ (см. (25)) слева на невырожденную матрицу $\text{diag} \{E_{n_1}, \mu^{n_1}, \dots, \mu^{n_1+n_2-1}\}$. В результате получим блочную матрицу вида

$$\bar{S}_{\xi \eta}(t, \mu) = \left(\begin{array}{c|c} S_s(t) + O(\mu) & * \\ \hline O(\mu)* & S_f(t) A_4^{n_1} + O(\mu)* \end{array} \right), \quad (32)$$

где $S_s(t)$, $S_f(t)$ определены в (10), (12), а $*$, $O(\mu)*$ — некоторые матрицы подходящих размеров, при этом элементы матриц $O(\mu)*$ являются бесконечно малыми величинами порядка малости μ

при любом $t \in T$. Ранг матрицы $\bar{S}_{\xi\eta}(t, \mu)$ (см. (32)) равен рангу матрицы $S_{A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}}(t, \mu)$ (см. (25)) для всех $t \in T$.

Рассмотрим матрицу

$$S_{sf}(t) = \left(\begin{array}{c|c} S_s(t) & * \\ \hline 0 & S_f(t) \end{array} \right), \quad (33)$$

которая получается из матрицы $\bar{S}_{\xi\eta}(t)$ (см. (32)) умножением её справа на невырожденную (в силу $\det A_4(t) \neq 0$) матрицу $\text{diag} \{E_{n_1}, (A_4^{n_1})^{-1}\}$ и отбрасыванием членов $O(\mu)$.

При выполнении условий (vi) с учетом теоремы 3 верхний левый блок $S_s(t)$ этой матрицы имеет полный ранг по столбцам для всех $t \in T$: $\text{rank } S_s(t) = n_1$, и нижний правый блок этой матрицы тоже имеет полный ранг по столбцам при всех $t \in T$: $\text{rank } S_f(t) = n_2$. Поскольку оба диагональных блока $S_s(t)$ и $S_f(t)$ матрицы $S_{sf}(t)$ (см. (33)) имеют полный ранг по столбцам, то матрица $S_{sf}(t)$ также имеет полный ранг по столбцам при всех $t \in T$. Действительно, если это не так, то существует такой $n_1 + n_2$ -вектор-столбец $(g'_1, g'_2)'$, $g_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $g_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\|g_1\| + \|g_2\| \neq 0$, что $S_{sf}(t)(g'_1, g'_2)' = 0$; это равносильно

$$S_s(t)g_1 + *g_2 = 0, \quad S_f(t)g_2 = 0.$$

Из последнего равенства в силу полноты ранга матрицы $S_f(t)$ следует $g_2 = 0$; тогда из первого равенства имеем $S_s(t)g_1 = 0$, $g_1 \neq 0$, что противоречит полноте ранга $S_s(t)$. Таким образом, $\text{rank } S_{sf}(t) = n$ для всех $t \in T$.

С учетом сохранения полноты ранга при малых аддитивных возмущениях матрицы, при достаточно малых $\mu > 0$ справедливо равенство

$$\text{rank } \bar{S}_{\xi\eta}(t, \mu) = \text{rank } S_{A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}}(t, \mu) = n \quad \text{для любого } t \in T,$$

откуда с учетом связи между матрицами наблюдаемости исходной системы (1) и расщепленной системы (20):

$$S_{A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}}(t, \mu) = S_{A(\mu), c}(t, \mu)K(t, \mu),$$

следует, что

$$\text{rank } S_{A(\mu), c}(t, \mu) = n \quad \text{для любого } t \in T$$

для всех достаточно малых $\mu > 0$, что согласно теореме 1 завершает доказательство равномерной наблюдаемости системы (1) робастно относительно μ . $\square$

Из теорем 5 и 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6 (условия аппроксимативной наблюдаемости). *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда найдется такое $\mu^* \in (0, \mu^0]$, что система (1) аппроксимативно наблюдаема на отрезке T при любом фиксированном $\mu \in (0, \mu^*]$, т.е. робастно относительно μ .*

7. Пример. Рассмотрим на $T = [0, 5; 2]$ систему (1):

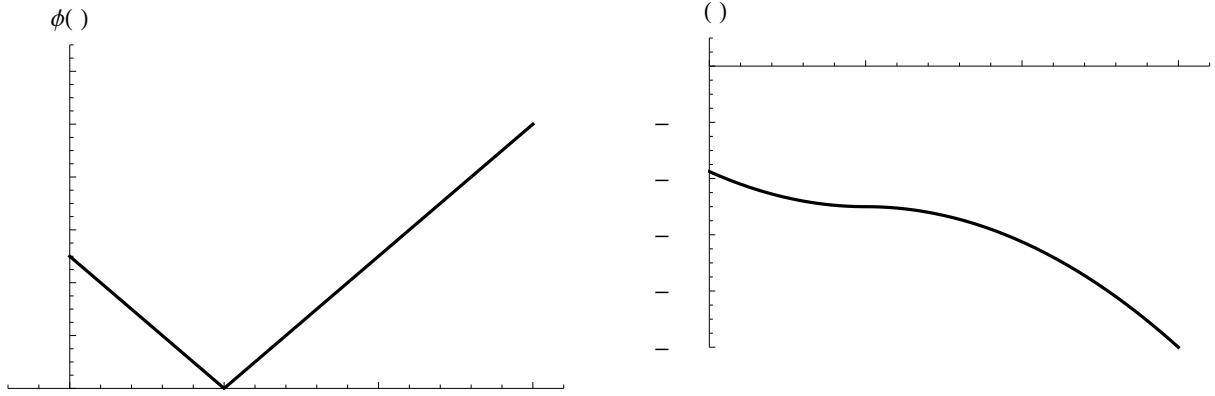
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \phi(t)x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + \phi(t)x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) + \phi(t)x_3(t), \\ \mu \dot{y}(t) = x_3(t) + g(t)x_3(t), \\ v(t) = y(t), \end{cases} \quad (34)$$

где функция $\phi(t)$ не является дифференцируемой на T , но ограничена и интегрируема на T от t_0 до t , $g(t)$ — такая первообразная для $\phi(t)$, что $g(t) \neq 0$, $t \in T$ (например, $\phi(t) = |t - 1|$,

$$g(t) = - \int_0^t \phi(\tau) d\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(t - 1)|t - 1|;$$

см. рис. 1) с параметрами $n_1 = 3$, $n_2 = m = 1$, $t_0 = 0,5$, $t_1 = 2$ и матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = (g(t)), \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = (1).$$

Рис. 1. Графики функций $\phi(t)$ и $g(t)$ на $T = [0.5, 2]$

Несложно убедиться, что для системы (34) выполнены условия (i)–(iv) теоремы 5.

Вырожденная система (8) для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы (34) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = -\frac{\phi(t)}{g(t)}\bar{x}_3(t), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{x}_1(t) - \frac{\phi(t)}{g(t)}\bar{x}_3(t), \\ \dot{\bar{x}}_3(t) = \bar{x}_2(t) - \frac{\phi(t)}{g(t)}\bar{x}_3(t), \\ \bar{v}_s(t) = -\frac{1}{g(t)}x_{s3}(t), \quad t \in T, \end{cases} \quad (35)$$

то есть

$$A_s(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\phi(t)}{g(t)} \\ 1 & 0 & -\frac{\phi(t)}{g(t)} \\ 0 & 1 & -\frac{\phi(t)}{g(t)} \end{pmatrix}, \quad C_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{g(t)} \end{pmatrix}$$

, а семейство быстрых подсистем для системы (34) имеет вид

$$\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = g(t)\tilde{y}(\tau), \quad \tilde{v}_f(\tau) = \tilde{y}(\tau), \quad t \in T. \quad (36)$$

Для вырожденной системы (35) матричная функция $A_s(t)$ не является непрерывно дифференцируемой, но для системы (35) выполнены условия (v) и определена матрица наблюдаемости:

$$S_s(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{g(t)} \\ 0 & -\frac{1}{g(t)} & 0 \\ -\frac{1}{g(t)} & -\frac{\phi}{g^2(t)} & \frac{\phi}{g^2(t)} \end{pmatrix},$$

поэтому вырожденная система (35) является системой класса $n_1 - 1 = 2$ и теорема 3 применима к ней.

Так как $\text{rank } S_s(t) = 3 = n_1$ и $\text{rank } S_f(t) = \text{rank}(g(t)) = 1 = n_2$ для всех $t \in T$, то согласно теоремам 3, 4 вырожденная система (35) и семейство быстрых подсистем (36) для (34) равномерно наблюдаемы. Значит, выполнены и условия (vi) теоремы 5, поэтому в соответствии с теоремами 5, 6 существует такое $\mu^* > 0$, что система (34) равномерно и аппроксимативно наблюдаема для всех $\mu \in (0, \mu^*]$, т.е. робастно относительно $\mu > 0$.

8. Заключение. На основе декомпозиции, выполненной с помощью линейной невырожденной замены переменных, доказаны эффективные с конструктивной точки зрения ранговые, не зависящие от малого параметра и справедливые для всех его достаточно малых значений достаточные условия равномерной и аппроксимативной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы. Условия выражены через матричные коэффициенты медленной и быстрых подсистем системы в терминах их матриц наблюдаемости.

Результаты работы применимы для нахождения преобразований, приводящих систему к каноническим формам, получения робастных условий полной, равномерной и тотальной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с помощью конечно-параметрических разрешающих операций, с помощью многочленов системы функций Чебышева, решения задач наблюдаемости нестационарных СВС с помощью динамического фильтра (см. [3]), построения композитных управлений типа обратной связи, экспоненциальных оценщиков состояния системы (см. [29]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. — М.: Мир, 1976.
2. Астровский А. И. Равномерно точечная наблюдаемость линейных нестационарных систем // Докл. НАН Беларуси. — 1999. — 43, № 3. — С. 9–12.
3. Астровский А. И. Обобщенная матрица Грама и ее применение к проблеме наблюдаемости линейных нестационарных систем // Мат. заметки. — 2001. — 69, № 2. — С. 163–170.
4. Астровский А. И. Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения и хессенбергова наблюдаемость // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 4. — С. 439–442.
5. Астровский А. И. Наблюдаемость линейных нестационарных систем. — Минск: МИУ, 2007.
6. Астровский А. И., Гайшун И. В. Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем // Автомат. телемех. — 1998. — № 7. — С. 3–13.
7. Астровский А. И., Гайшун И. В. Квазидифференцируемость и наблюдаемость линейных нестационарных систем // Диффер. уравн. — 2009. — 45, № 11. — С. 1567–1576.
8. Астровский А. И., Гайшун И. В. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. — Минск: Беларус. навука, 2013.
9. Астровский А. И., Гайшун И. В. Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения // Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 3. — С. 370–379.
10. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки техн. Сер. Мат. анализ. — 1982. — 20. — С. 3–77.
11. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1971.
12. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. — Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 1999.
13. Гайшун И. В., Астровский А. И. Описание множества равномерно наблюдаемых линейных нестационарных систем // Докл. АН Беларуси. — 1996. — 40, № 5. — С. 5–8.
14. Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автомат. телемех. — 2006. — № 1. — С. 3–51.
15. Копейкина Т. Б., Цехан О. Б. Наблюдаемость линейных стационарных сингулярно возмущенных систем в пространстве состояний // Прикл. мат. мех. — 1993. — 57, № 6. — С. 22–32.
16. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
17. Chang A. An algebraic characterization of controllability // IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — 10, № 5. — P. 112–113.
18. Chang K. Singular perturbations of a general boundary value problem // SIAM J. Math. Anal. — 1972. — 3, № 3. — P. 520–526.
19. Glizer V. V. Observability of singularly perturbed linear time-dependent systems with small delay // J. Dynam. Control Syst. — 2004. — 10, № 3. — P. 329–363.
20. Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design. — New York: Academic Press, 1999.

21. *Kopeikina T. B.* Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems// Syst. Sci. — 1995. — 21, № 1. — P. 17–36.
22. *Kurina G. A., Dmitriev M. G., Naidu Desineni S.* Discrete singularly perturbed control problems: A survey// Dynam. Contin. Discr. Impuls. Syst. Ser. B. Appl. Algorithms. — 2017. — 24. — P. 335–370.
23. *Lee E. B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory. — New York: Wiley, 1967.
24. *Naidu D. S.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: an overview// Dynam. Contin. Discr. Impuls. Syst. Ser. B. Appl. Algorithms. — 2002. — № 9. — P. 233–278.
25. *O'Reilly J.* Full-order observers for a class of singularly perturbed linear time-varying systems// Int. J. Control. — 1979. — 30, № 5. — P. 745–756.
26. *O'Reilly J.* Observers for Linear Systems. — London: Academic Press, 1983.
27. *Silverman L. M.* Transformation of time-variable systems to canonical (phase-variable) form// IEEE Trans. Automat. Control. — 1966. — AC-11, № 2. — P. 300–303.
28. *Silverman L. M., Meadows H. E.* Controllability and observability in time-variable linear systems// SIAM J. Control. — 1967. — 5, № 1. — P. 64–73.
29. *Wolovich W. A.* On state estimation of observable systems// Preprint NASA Electron. Res. Center. Cambridge. — 1968. — № 6. — P. 210–220.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф22-050).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Цехан Ольга Борисовна

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

E-mail: tsekhan@grsu.by