ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 34–46
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-34-46

УДК 517.954, 517.983

О ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. **В. Б. ВАСИЛЬЕВ, А. А. ХОДЫРЕВА**

Аннотация. В работа рассматривается дискретное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в квадранте и связанная с ним дискретная краевая задача Дирихле. Описаны условия разрешимости дискретной краевой задачи в дискретных аналогах пространств Соболева—Слободецкого. Дается сравнение дискретного решения с решением соответствующей континуальной краевой задачи в зависимости от параметра дискретизации.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, периодическая волновая факторизация, аналитичность, разрешимость, дискретная задача Дирихле.

ON THE DISCRETE DIRICHLET PROBLEM IN A QUARTER PLANE

© 2023 **V. B. VASILYEV, A. A. KHODYREVA**

Abstract. In this paper, we consider a discrete elliptic pseudodifferential equation in a quadrant and the related discrete Dirichlet boundary-value problem and discuss conditions for the solvability of a discrete boundary-value problem in discrete analogs of the Sobolev–Slobodetsky spaces. We compare discrete solutions with solutions of the corresponding continual boundary-value problem depending on the discretization parameter.

Keywords and phrases: discrete pseudodifferential operator, periodic wave factorization, analyticity, solvability, discrete Dirichlet problem.

AMS Subject Classification: 35S15, 47B38

1. Введение. Теория псевдодифференциальных операторов и уравнений активно развивалась с середины 60-х прошлого столетия, и основные задачи были связаны с ограниченностью этих операторов в различных функциональных пространствах, описанием свойств фредгольмовости и регулярности решений, вычисление индекса (см. [7, 11, 12]). Однако дискретные аспекты этой теории (в отличие от дифференциальных операторов в частных производных и соответствующих краевых задач; см. [8,9]) исследовались не столь интенсивно, и, как правило, ограничивались рассмотрением превдодифференциальных операторов на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^m$ (см. [13, 14]). Оставалось неясным, могут ли дискретные операторы стать хорошим аппроксимационным инструментом для решения псевдодифференциальных уравнений, хотя априори понятно, что дискретизация является неизменным условием для компьютерных вычислений. В связи с этим первый автор начал разрабатывать дискретную теорию таких уравнений, начав с сингулярных интегралов Кальдерона—Зигмунда (см. [1, 16]) как простейшего представления псевдодифференциальных операторов, постепенно переходя к модельным псевдодифференциальным операторам и уравнениям (пока в канонических областях) в дискретных пространствах $L_2(h\mathbb{Z}^m)$, $L_2(h\mathbb{Z}^m{}_+)$, $h>0$, и сравнение дискретных и континуальных решений. Оказалось, что картина разрешимости дискретных уравнений выглядит подобно континуальному случаю, и в случае $h\to 0$ дискретные условия разрешимости переходят в свой континуальный аналог. Аналогичные исследования были проведены для брлее общих модельных псевдодифференциальных операторов в дискретных аналогах H^s-пространств (см. [17, 18]) со сравнением дискретных и непрерывных решений (см. [3, 15]).

В этой работе мы рассматриваем новую модельную область — квадрант в $\mathbb{R}^2$, описываем условия разрешимости соответствующего модельного уравнения, выделяем дискретную краевую задачу и даем сравнение дискретных и континуальных решений. Для описания разрешимости модельных псевдодифференциальных уравнений и постановки дискретных краевых задач используем периодический аналог волновой факторизации (см. [2]). Некоторые элементы этих построений были анонсированы в [19, 21]. Здесь приведены более общее определение и расширен класс рассматриваемых уравнений.

2. Предварительные сведения. Пусть $\mathbb{Z}^2$ — целочисленная решетка на плоскости. Обозначим через $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ первый квадрант на плоскости, $k_s = h\mathbb{Z}^2 \cap K, h > 0$. Введем пространство функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$, обладающих приведенными далле свойствами.

Пусть $\mathbb{T}^2$ — квадрат $[-\pi, \pi]^2$, $h > 0$, $\hbar = h^{-1}$. Будем рассматривать функции, изначально заданные в квадрате, как периодические функции, определенные на всей плоскости $\mathbb{R}^m$ с основным квадратом периодов $\mathbb{T}^2$. Для таких функций можно определить дискретное преобразование Фурье формулой

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2,$$

в случае сходимости такого ряда, и функция $\tilde{u}_d(\xi)$ будет периодической функций в $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$. Определенное таким образом дискретное преобразование Фурье наследует все свойства интегрального преобразования Фурье, и обратное дискретное преобразование Фурье можно записать в виде

$$(F_d^{-1}\tilde{u}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2.$$

Дискретное преобразование Фурье устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $L_2(h\mathbb{Z}^2)$ и $L_2(\hbar\mathbb{T}^2)$ с нормами

$$\|u_d\|_2 = \left(\sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} |u_d(\tilde{x})|^2 h^2\right)^{1/2}, \quad \|\tilde{u}_d\|_2 = \left(\int\limits_{\xi \in \hbar\mathbb{T}^2} |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Нам понадобятся более общие пространства дискретных функций; и для их введения используем понятие разделенных разностей (см. [9]) и их дискретные преобразования Фурье. С помощью этих конструкций определим дискретные пространства Соболева—Слободецкого для исследования разрешимости широкого класса дискретных уравнений. Сначала введем дискретный аналог пространства Шварца $S(h\mathbb{Z}^2)$ [17] и дискретную обобщенную функцию.

Определение 2.1. Дискретной обобщенной функцией называется любой линейный непрерывный функционал на $S(h\mathbb{Z}^2)$.

Обозначим через $S'(h\mathbb{Z}^2)$ множество таких дискретных обобщенных функций, а через (f_d, u_d) — значение дискретного функционала f_d на основной дискретной функции $u_d \in S(h\mathbb{Z}^2)$. Носителем дискретной функции $u_d \in S(h\mathbb{Z}^2)$ называется подмножество $h\mathbb{Z}^2$, не котором u_d отлична от нуля. Для произвольного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ положим $M_d = M \cap h\mathbb{Z}^2$. Будем говорить, что f_d обращается в нуль в дискретной области M_d, если $(f_d, u_d) = 0$ для всех $u_d \in S(M_d)$, где $S(M_d) \subset S(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных функций с носителями, содержащимися в M_d. Если обозначить через $\widetilde{M}_d$ объединение таких M_d, где $f_d = 0$, носителем дискретной обобщенной функции f_d будет множество $h\mathbb{Z}^2 \setminus \widetilde{M}_d$.

Аналогично [4] можно определить стандартные операции в пространстве $S'(h\mathbb{Z}^2)$, однако роль дифференцирования будет играть разделенная разность первого порядка. Свойства дискретных обобщенных функций подробно описаны в [17]; сходимость понимается как слабая сходимость в пространстве функционалов $S'(h\mathbb{Z}^2)$.

Пример 2.1. Если $f_d(\tilde{x})$ локально суммируема, она порождает дискретную обобщенную функцию по формуле

$$(f_d, u_d) = \sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^2} f_d(\tilde{x})u_d(\tilde{x})h^2 \quad \forall u_d \in S(h\mathbb{Z}^2). \tag{1}$$

Однако возможны и другие варианты, аналогичные дельта-функции Дирака

$$(\delta_d, u_d) = u_d(0),$$

не представимые формулой (1).

Введем обозначение $\zeta^2 = h^{-2}((e^{-ih\cdot\xi_1} - 1)^2 + (e^{-ih\cdot\xi_2} - 1)^2)$.

Определение 2.2. Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных (обобщенных) функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ по норме

$$\|u_d\|_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Следует упомянуть, что многие свойства таких дискретных пространств были исследованы в [10]. Варьируя h в (2), получим различные нормы, которые эквивалентны L_2-норме, однако постоянные эквивалентности будут зависеть от h. В этой связи хотелось бы отметить, что в наших конструкциях (см. ниже) все постоянные от h не зависят.

Определение 2.3. Пространство $H^s(K_d)$ состоит из дискретных обобщенных функций пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$, носители которых содержатся в $\overline{K}_d$. Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$. Пространство $H^s_0(K_d)$ состоит из дискретных обобщенных функций $f_d \in S'(h\mathbb{R}^2)$ с носителями в K_d, и эти дискретные обобщенные функции должны допускать продолжение на все пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$. Норма в пространстве $H^s_0(K_d)$ задается формулой

$$\|f_d\|_s^+ = \inf \|\ell f_d\|_s,$$

где inf берется по всем продолжениям ℓ.

Фурье-образ пространства $H^s(K_d)$ будем обозначать $\widetilde{H}^s(K_d)$.

Если $\widetilde{A}_d(\xi)$ — измеримая периодическая функция в $\mathbb{R}^2$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$, будем называть ее символом.

Определение 2.4. Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $\widetilde{A}_d(\xi)$ в дискретном квадранте K_d называется оператор следующего вида:

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d. \tag{3}$$

Оператор A_d называется эллиптическим, если

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\xi\in\hbar\mathbb{T}^2} |\widetilde{A}_d(\xi)| > 0.$$

Можно определить более общий дискретный псевдодифференциальный оператор с символом $\widetilde{A}_d(\tilde{x}, \xi)$, зависящим от дискретной пространственной переменной $\tilde{x}$:

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} \widetilde{A}_d(\tilde{x}, \xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d,$$

однако в этой работе ограничимся модельным оператором вида (3).

Будем рассматривать класс E_α символов, удовлетворяющих условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \leqslant |\widetilde{A}_d(\xi)| \leqslant c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \tag{4}$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h, и называть число $\alpha \in \mathbb{R}$ порядком псевдодифференциального оператора A_d.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего результата.

Лемма 2.1. *Дискретный псевдодифференциальный оператор A_d с символом $\widetilde{A}_d(\xi)$ — линейный ограниченный оператор $H^s(h\mathbb{Z}^2) \to H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$ с нормой, не зависящей от h.*

3. Периодическая волновая факторизация и разрешимость. Исследуем разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in K_d, \tag{5}$$

в пространстве $H^s(K_d)$, предполагая, что $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$.

Для получения картины разрешимости дискретного уравнения (5) нам понадобятся элементы многомерного комплексного анализа.

Область вида $\mathcal{T}_h(K) = \hbar\mathbb{T}^2 + iK$ двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$ назовем трубчатой областью над квадрантом K. Будем рассматривать аналитические функции $f(x+i\tau)$ в $\mathcal{T}_h(K) = \hbar\mathbb{T}^2 + iK$, считая их вещественно-периодическими, определенными для почти всех значений x.

Введем периодическое ядро Бохнера по аналогии с [4]:

$$B_h(z) = \sum_{\tilde{x} \in K_d} e^{i\tilde{x}\cdot(\xi+i\tau)} h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2, \quad \tau \in K,$$

и соответствующий интегральный оператор

$$(B_h \tilde{u}_d)(\xi) = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ \tau\in K}} \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} B_h(\xi + i\tau - \eta)\tilde{u}_d(\eta)d\eta.$$

Лемма 3.1. *Для квадранта K оператор B_h имеет следующий вид*:

$$\begin{aligned}(B_h\tilde{u}_d)(\xi) = \frac{h^2}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta +\\ + \lim_{\tau\to 0+}\frac{ih}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1-\eta_1+i\tau_1)}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta + \lim_{\tau\to 0+}\frac{ih}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_2-\eta_2+i\tau_2)}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta -\\ - \lim_{\tau\to 0+}\frac{h^2}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1-\eta_1+i\tau_1)}{2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_2-\eta_2+i\tau_2)}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta.\end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство. В [16] приведены вычисления для дискретной положительной полуоси (одномерный конус). Воспользуемся этими вычислениями применительно к нашему случаю. Одномерный вариант формулы имеет вид

$$\sum_{\tilde{x}_k \in h\mathbb{Z}_+} e^{-i\tilde{x}_k z_k} h = \frac{h}{2} - \frac{ih}{2}\operatorname{ctg}\frac{hz_k}{2}, \quad z_k = \xi_k + i\tau_k, \quad k = 1, 2.$$

Перемножая два компонента и используя свойство преобразования Фурье о свертке и произведении, получаем искомое представление. □

Замечание 3.1. Используя известные результаты [10], нетрудно убедиться, что оператор B_h является линейны ограниченным оператором $H^s(\hbar\mathbb{T}^2) \to H^s(\hbar\mathbb{T}^2)$, где $|s| < 1/2$, и, кроме этого, B_h — проектор $\widetilde{H}^s(h\mathbb{Z}^2) \to \widetilde{H}^s(K_d)$.

Поскольку формула (6) слишком громоздка, сделаем следующие допущения. Будем рассматривать подпространство $S(h\mathbb{Z}^2)$, в котором функции обнуляются на координатных осях, и пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ будем определять как замыкание этого подпространства в H^s-норме. В этом случае первые три слагаемых в формуле (6) окажутся нулевыми.

Определение 3.1. Периодической волновой факторизацией эллиптического символа $\widetilde{A}_d(\xi) \in E_\alpha$ называется его представление в виде

$$\widetilde{A}_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi) A_{d,=}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\neq}(\xi)$, $A_{d,=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в трубчатые области $\mathcal{T}_h(K)$, $\mathcal{T}_h(-K)$ соответственно и удовлетворяют оценкам

$$c_1(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\varkappa/2} \leqslant |A_{d,\neq}(\xi+i\tau)| \leqslant c_1'(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\varkappa/2},$$
$$c_2(1+|\hat{\zeta}^2|)^{(\alpha-\varkappa)/2} \leqslant |A_{d,=}(\xi-i\tau)| \leqslant c_2'(1+|\hat{\zeta}^2|)^{(\alpha-\varkappa)/2},$$

с постоянными c_1, c_1', c_2, c_2', не зависящими от h, где

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left((e^{-ih(\xi_1+i\tau_1)}-1)^2 + (e^{-ih(\xi_2+i\tau_2)}-1)^2 \right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \hbar\mathbb{T}^2, \quad \tau - (\tau_1, \tau_2) \in K.$$

Число $\varkappa \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической волновой факторизации.

Замечание 3.2. К сожалению, алгоритм построения периодической волновой факторизации отсутствует. Достаточные условия для существования такой факторизации приведены в [20].

Всюду ниже предполагаем наличие периодической волновой факторизации для символа $\widetilde{A}_d(\xi)$ с индексом $\varkappa$.

Наиболее простой случай, когда решение уравнения (5) существует и единственно, содержится в следующем утверждении.

Теорема 3.1. *Пусть* $|\varkappa - s| < 1/2$. *Тогда уравнение* (5) *для любой правой части* $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$ *имеет единственное решение, которое дается формулой*

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi) B_h(A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)),$$

где ℓv_d *— произвольное продолжение* v_d *из* $H_0^{s-\alpha}(K_d)$ *в* $H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$.

Доказательство. Пусть ℓv_d — произвольное продолжение v_d из $H_0^{s-\alpha}(K_d)$ в $H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$. Введем функцию

$$w_d(\tilde{x}) = (\ell v_d)(\tilde{x}) - (A_d u_d)(\tilde{x}),$$

так что $w(\tilde{x}) = 0$, если $\tilde{x} \notin K_d$. Перепишем уравнение в виде

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) + w_d(\tilde{x}) = (\ell v_d)(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2,$$

и после применения дискретного преобразования Фурье и учета периодической волновой факторизации, в виде

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) + A_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) = A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi), \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2, \tag{7}$$

Согласно лемме 2.1 имеем следующие включения:

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) \in \widetilde{H}^{s-\varkappa}(K_d), \quad A_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) \in \widetilde{H}^{s-\varkappa}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d), \quad A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi) \in \widetilde{H}^{s-\varkappa}(h\mathbb{Z}^2),$$

и тогда по лемме 3.1 правая часть последнего равенства допускает однозначное представление в виде прямой суммы

$$A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi) = f_d^+(\xi) + f_d^-(\xi),$$

где

$$f_d^+(\xi) = B_h(A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)), \quad f_d^-(\xi) = (I - B_h)(A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)).$$

Перепишем равенство (7) в виде

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) - f_d^+(\xi) = f_d^-(\xi) - A_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi)$$

и в силу однозначности представления в виде прямой суммы $\widetilde{H}^{s-\varkappa}(K_d) \oplus \widetilde{H}^{s-\varkappa}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d)$ и в силу той же леммы левая и правая части равенства должны быть нулями. Следовательно,

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi) B_h(A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)),$$

и теорема доказана. □

4. Дискретная краевая задача Дирихле. В этом разделе рассмотрим более содержательный случай, когда уравнение (5) может иметь много решений.

Используем здесь результат, подробное доказательство которого содержится в работе [17], который позволяет определить типы граничных условий, обеспечивающих однозначную разрешимость краевых задач.

Теорема 4.1. *Пусть* $\varkappa - s = n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$. *Тогда общее решение уравнения* (5) *имеет вид*

$$\tilde{u}_d(\xi) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi) Q_n(\xi) B_h\big(Q_n^{-1}(\xi) A^{-1}_{d,=}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)\big) + A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_k(\xi_1)\hat{\zeta}_2^k + \tilde{d}_k(\xi_2)\hat{\zeta}_1^k\right),$$

где $Q_n(\xi)$ — *произвольный многочлен степени* n *переменных* $\hat{\zeta}_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1), k = 1, 2,$ *удовлетворяющий условию* (4) *с* $\alpha = n$, $\tilde{c}_k(\xi_1)$, $\tilde{d}_k(\xi_2)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1,$ — *произвольные функции из* $H^{s_k}(h\mathbb{T}), s_k = s - \varkappa + k - 1/2$. *Имеет место априорная оценка*

$$\|u_d\|_s \leqslant \mathrm{const}\left(\|f\|^+_{s-\alpha} + \sum_{k=0}^{n-1}([c_k]_{s_k} + [d_k]_{s_k})\right),$$

где $[\cdot]_{s_k}$ *обозначает норму в* $H^{s_k}(h\mathbb{T})$, *и* const *не зависит от* h.

В этой работе рассмотрим только одну дискретную краевую задачу с условием Дирихле на границе, ограничившись случаем $\varkappa - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$, $v_d \equiv 0$.

Как следует из теоремы 4.1, имеем следующую формулу для общего решения уравнения (5):

$$\tilde{u}_d(\xi) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\big(\tilde{c}_0(\xi_1) + \tilde{d}_0(\xi_2)\big), \tag{8}$$

где $c_0, d_0 \in H^{s-\varkappa-1/2}(\hbar\mathbb{Z})$ — произвольные функции. Для их однозначной идентификации добавим к уравнению дискретные условия Дирихле на сторонах угла

$$u_{d|_{\tilde{x}_1=0}} = f_d(\tilde{x}_2), \quad u_{d|_{\tilde{x}_2=0}} = g_d(\tilde{x}_1). \tag{9}$$

Применение дискретного преобразования Фурье к дискретным условиям Дирихле (9) придает им следующий вид:

$$\int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 = \tilde{f}_d(\xi_2), \quad \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 = \tilde{g}_d(\xi_1). \tag{10}$$

Учет (10) в (8) приводит к следующим соотношениям:

$$\int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi_1 = \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\tilde{c}_0(\xi_1) d\xi_1 + \tilde{d}_0(\xi_2)\int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A^{-1}_{d,\neq}(\xi) d\xi_1,$$

$$\int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi_2 = \tilde{c}_0(\xi_1)\int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A^{-1}_{d,\neq}(\xi) d\xi_2 + \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\tilde{d}_0(\xi_2) d\xi_2.$$

Теперь введем обозначения

$$\int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A^{-1}_{d,\neq}(\xi) d\xi_1 \equiv \tilde{a}_0(\xi_2), \quad \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A^{-1}_{d,\neq}(\xi) d\xi_2 \equiv \tilde{b}_0(\xi_1)$$

и предположим, что выполнены условия

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\xi_2 \in \hbar\mathbb{T}} |\tilde{a}_0(\xi_2)| > 0, \quad \operatorname*{ess\,inf}_{\xi_1 \in \hbar\mathbb{T}} |\tilde{b}_0(\xi_1)| > 0. \tag{11}$$

Таким образом, получена следующая система двух линейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tilde{c}_0(\xi_1)$, $\tilde{d}_0(\xi_2)$:

$$\int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} k_1(\xi)\tilde{c}_0(\xi_1)d\xi_1 + \tilde{d}_0(\xi_2) = \tilde{F}_d(\xi_2), \quad \tilde{c}_0(\xi_1) + \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} k_2(\xi)\tilde{d}_0(\xi_2)d\xi_2 = \tilde{G}_d(\xi_1), \tag{12}$$

где

$$\tilde{F}_d(\xi_2) = \tilde{f}_d(\xi_2)\tilde{a}_0^{-1}(\xi_2), \quad \tilde{G}_d(\xi_1) = \tilde{g}_d(\xi_1)\tilde{b}_0^{-1}(\xi_1),$$
$$k_1(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi)\tilde{b}_0^{-1}(\xi_1), \quad k_2(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi)\tilde{a}_0^{-1}(\xi_2).$$

Условия однозначной разрешимости системы (12) эквивалентны условиям однозначной разрешимости дискретной задачи Дирихле (5), (9). Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть* $f_d, g_d \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}_+), s > 1/2, v_d \equiv 0$ *и выполнено условие* (11). *Тогда дискретная задача Дирихле* (5), (9) *сводится к эквивалентной системе линейных интегральных уравнений* (12).

5. Сравнение дискретных и непрерывных решений. Опишем континуальный аналог дискретной задачи Дирихле (5),(9) и проведем сравнение дискретных и непрерывных решений.

5.1. Континуальный аналог. Пусть $\widetilde{A}(\xi)$ — символ псевдодифференциального оператора A, удовлетворяющий условию

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \leqslant |\widetilde{A}(\xi)| \leqslant c_2(1+|\xi|)^\alpha,$$

который допускает волновую факторизацию относительно K

$$\widetilde{A}(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

с таким индексом $\varkappa$, что $\varkappa - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$.

Введем в рассмотрение следующую краевую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} (Au)(x) = 0, \quad x \in K, \\ u\big|_{x_2>0, x_1=0} = f(x_2), \quad u\big|_{x_1>0, x_2=0} = g(x_1), \end{cases} \tag{13}$$

$f, g \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}_+)$ — заданные функции. Система интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tilde{C}_0(\xi_1)$, $\tilde{D}_0(\xi_2)$, эквивалентная задаче Дирихле (13), была получена ранее (см. [2]) и выглядит следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi)\tilde{C}_0(\xi_1)d\xi_1 + \tilde{D}_0(\xi_2) = \tilde{F}(\xi_2), \quad \tilde{C}_0(\xi_1) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\xi)\tilde{D}_0(\xi_2)d\xi_2 = \tilde{G}(\xi_1), \tag{14}$$

где

$$\tilde{F}(\xi_2) = \tilde{f}(\xi_2)\tilde{A}_0^{-1}(\xi_2), \quad \tilde{G}(\xi_1) = \tilde{g}(\xi_1)\tilde{B}_0^{-1}(\xi_1),$$
$$K_1(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{B}_0^{-1}(\xi_1), \quad K_2(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{A}_0^{-1}(\xi_2),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} A_{\neq}^{-1}(\xi)d\xi_1 \equiv \tilde{A}_0(\xi_2), \quad \int_{-\infty}^{\infty} A_{\neq}^{-1}(\xi)d\xi_2 \equiv \tilde{B}_0(\xi_1)$$

в предположении, что выполнены условия

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\xi_2 \in \mathbb{R}} |\tilde{A}_0(\xi_2)| > 0, \quad \operatorname*{ess\,inf}_{\xi_1 \in \mathbb{R}} |\tilde{B}_0(\xi_1)| > 0. \tag{15}$$

Зная решение $\tilde{C}_0(\xi_1)$, $\tilde{D}_0(\xi_2)$ системы (14), можем найти решение задачи Дирихле (13) по формуле

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)(\tilde{C}_0(\xi_1) + \tilde{D}_0(\xi_2)), \tag{16}$$

Следующий шаг — сравнение решений (8) и (16).

5.2. Операторная формулировка. Перепишем системы (12) и (14) в векторной форме, введя операторные матрицы и вектор-функции

$$M = \begin{pmatrix} K_1 & I \\ I & K_2 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} k_1 & I \\ I & k_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_0 \\ \tilde{D}_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{d}_0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{G} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_d = \begin{pmatrix} \tilde{F}_d \\ \tilde{G}_0 \end{pmatrix},$$

и эти системы примут вид

$$M\tilde{\boldsymbol{C}} = \tilde{\boldsymbol{F}}, \quad m\tilde{\boldsymbol{c}} = \tilde{\boldsymbol{F}}_d.$$

Операторы M и m ограниченно действуют в пространствах $\boldsymbol{H}^{s_0}(\mathbb{R})$ и $\boldsymbol{H}^{s_0}(\hbar\mathbb{T})$ соответственно. Это пространства вектор-функций, состоящих из двух компонент, каждая из которых принадлежит соответствующему H^s-пространству; норма определяется как сумма норм компонент. Будем предполагать, что для операторов M и m существует ограниченный обратный и что нормы этих обратных операторов ограничены сверху постоянной, не зависящей от h. Следовательно,

$$\tilde{\boldsymbol{C}} = M^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}, \quad \tilde{\boldsymbol{c}} = m^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}_d$$

Исходя из формул (8) и (16), можно сделать вывод, что для оценки разности дискретных и непрерывных решений необходима оценка для $\tilde{\boldsymbol{C}} - \tilde{\boldsymbol{c}}$. Этому вопросу посвящен следующий раздел.

5.3. Сравнение. Для сравнения элементы дискретной краевой задачи Дирихле (5), (9) выберем следующим образом. По заданной периодической волновой факторизации символа континуальной задачи

$$\widetilde{A}(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

построим элементы $A_{d,\neq}$ и $A_{d,=}(\xi)$, взяв сужения $A_{\neq}(\xi)$ и $A_{=}(\xi)$ на $\hbar\mathbb{T}^2$ и периодически продолжив их на все $\mathbb{R}^2$; после этого введем периодический символ

$$\widetilde{A}_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi) \cdot A_{d,=}(\xi).$$

Дискретные граничные функции f_d и g_d строятся по аналогичной схеме: берутся преобразования Фурье функций f и g, затем их сужения на $\hbar\mathbb{T}$ и периодическое продолжение на $\mathbb{R}$. После этого применяется обратное дискретное преобразование Фурье F_d^{-1} и полученные так дискретные функции обозначаются f_d и g_d.

Обозначим $\boldsymbol{P}_h$ проектор на подпространство $\tilde{\boldsymbol{H}}(\hbar\mathbb{T})$, так что

$$\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{C}}(\xi_1) = \tilde{\boldsymbol{C}}(\xi_1), \quad \xi_1 \in \hbar\mathbb{T}, \quad \tilde{\boldsymbol{C}}(\xi_1) = 0, \quad \xi_1 \notin \hbar\mathbb{T},$$

и сравним $\tilde{\boldsymbol{C}}$ и $\tilde{\boldsymbol{c}}$ на $\hbar\mathbb{T}$:

$$\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{C}}(\xi_1) - \tilde{\boldsymbol{c}}(\xi_1) = \boldsymbol{P}_h M^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}(\xi_1) - m^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}_d(\xi_1).$$

Лемма 5.1. *Пусть $s > 1$. Имеет место оценка*

$$\|\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{C}} - \tilde{\boldsymbol{c}}\|_{s_0} \leqslant \mathrm{const}\left(\|\tilde{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{F}}\|_{s_0} + h^{\varkappa-1}(\|f\|_{s_0} + \|g\|_{s_0})\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{P}_h M^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}})(t) - (m^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}_d)(t) = \\
&= (P_h M^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}})(t) - (P_h M^{-1}\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{F}})(t) + (P_h M^{-1}\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{F}})(t) - (\boldsymbol{P}_h M^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}_d)(t) + (\boldsymbol{P}_h M^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}_d)(t) - (m^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}_d)(t) = \\
&= \big(P_h M^{-1}(\tilde{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{F}})\big)(t) + \big((\boldsymbol{P}_h M^{-1})(\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{F}} - \tilde{\boldsymbol{F}}_d)\big)(t) + \big((\boldsymbol{P}_h M^{-1} - m^{-1})\tilde{\boldsymbol{F}}_d\big)(t),
\end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{C}} - \tilde{\boldsymbol{c}}\|_{s_0} = \|\boldsymbol{P}_h M^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}} - m^{-1}\tilde{\boldsymbol{F}}_d\|_{s_0} \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{const}\left(\|\tilde{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{F}}\|_{s_0} + \|\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{F}} - \tilde{\boldsymbol{F}}_d\|_{s_0} + \|(\boldsymbol{P}_h M^{-1} - m^{-1})\tilde{\boldsymbol{F}}_d\|_{s_0}\right), \quad (17)
\end{aligned}$$

в силу ограниченности операторов P_h, M^{-1}, m^{-1}, и нам нужно оценить три слагаемых. (Обозначение $\|\cdot\|_s$ используется ниже как для нормы пространства $H^s(\mathbb{R})$, так и для нормы пространства $H^s(\hbar\mathbb{T})$; смысл обозначения ясен из контекста.)

Начнем с третьего слагаемого. Введем обозначение $m^{-1}\boldsymbol{F}_d \equiv \boldsymbol{v}$. Нетрудно убедиться в справедливости представления

$$\boldsymbol{P}_h M^{-1} - m^{-1} = \boldsymbol{P}_h M^{-1}(m-M)m^{-1}, \tag{18}$$

так как $\boldsymbol{P}_h m^{-1} = m^{-1}$ в силу задания оператора m на функциях, определенных на $\hbar\mathbb{T}$.

Учитывая представление (18), оценим

$$((m-M)\boldsymbol{v})(t) = \begin{pmatrix} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (k_1(t,\eta) - K_1(t,\eta))v_1(\eta)d\eta \\ \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (k_2(t,\eta) - K_2(t,\eta))v_2(\eta)d\eta \end{pmatrix}.$$

Оценим одну из разностей; вторая оценивается аналогично. Имеем

$$k_1(\eta,t) - K_1(\eta,t) = A^{-1}_{d,\neq}(\eta,t)b_0^{-1}(t) - A^{-1}_{\neq}(\eta,t)B_0^{-1}(t),$$

где

$$B_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^{-1}_{\neq}(t,\eta)d\eta, \quad b_0(t) = \int\limits_{-\hbar\pi}^{+\hbar\pi} A^{-1}_{d,\neq}(t,\eta)d\eta.$$

Поскольку $A_{d,\neq}(t,\eta)$ выбрано как сужение $A_{\neq}(t,\eta)$ на $\hbar\mathbb{T}^2$, имеет место следующая оценка:

$$|B_0(t) - b_0(t)| \leqslant \text{const} \int\limits_{\hbar\pi}^{+\infty} \frac{d\eta}{(1+|t|+\eta)^{\varkappa}} \leqslant \text{const}\, \frac{h^{\varkappa-1}}{(1+|t|)^{\varkappa-1}},$$

откуда, между прочим, следует, что при $\varkappa > 1$ и достаточно малых h условия (11) выполняются при справедливости условий (15). Продолжив оценку, получаем

$$|k_1(\eta,t) - K_1(\eta,t)| \leqslant \frac{\text{const}\cdot h^{\varkappa-1}}{(1+|t|+|\eta|)^{\varkappa}(1+|t|)^{\varkappa-1}}.$$

Теперь переходим к оценке нормы. Имеем

$$\left| \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (k_1(t,\eta) - K_1(t,\eta))v_1(\eta)d\eta \right| \leqslant \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} |k_1(t,\eta) - K_1(t,\eta)|\cdot|v_1(\eta)|d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}\cdot h^{\varkappa-1}}{(1+|t|)^{\varkappa-1}} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \frac{|v_1(\eta)|d\eta}{(1+|t|+|\eta|)^{\varkappa}} = \frac{\text{const}\cdot h^{\varkappa-1}}{(1+|t|)^{\varkappa-1}} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \frac{(1+|\eta|)^{s_0}|v_1(\eta)|d\eta}{(1+|\eta|)^{s_0}(1+|t|+|\eta|)^{\varkappa}}.$$

Напомним, что $s_0 = s - \varkappa - 1/2$, и применим к последнему интегралу неравенство Коши—Буняковского, учитывая, что

$$(1+|t|+|\eta|)^{\varkappa} > (1+|\eta|)^{\varkappa}, \quad \varkappa + s_0 = s - \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \frac{(1+|\eta|)^{s_0}|v(\eta)|d\eta}{(1+|\eta|)^{s_0}(1+|t|+|\eta|)^{\varkappa}} \leqslant \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \frac{(1+|\eta|)^{s_0}|v(\eta)|d\eta}{(1+|\eta|)^{s-1/2}} \leqslant \text{const}\cdot\|v\|_{s_0} \left(\int\limits_{0}^{\hbar\pi} \frac{d\eta}{(1+\eta)^{2s-1}} \right)^{1/2}.$$

Легко убедиться, что последний интеграл ограничен постоянной. Действительно, при $s > 1$ интеграл не превосходит 1, поскольку $2s - 1 > 1$. Таким образом, получено неравенство

$$\left| \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (k_1(t,\eta) - K_1(t,\eta))v_1(\eta)d\eta \right| \leqslant \frac{\mathrm{const} \cdot h^{\varkappa-1}}{(1+|t|)^{\varkappa-1}} \|v_1\|_{s_0}. \tag{19}$$

Возводя в квадрат обе части неравенства (19), умножая на $(1+|t|)^{2s_0}$ и интегрируя по отрезку $[-\hbar\pi, \hbar\pi]$, получим

$$\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (1+|t|)^{2s_0} \left| \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (k_1(t,\eta) - K_1(t,\eta))v_1(\eta)d\eta \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \cdot h^{2(\varkappa-1)} \|v_1\|^2_{s_0} \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \frac{(1+|t|)^{2s_0}dt}{(1+|t|)^{2(\varkappa-1)}} \leqslant \mathrm{const} \cdot h^{2(\varkappa-1)} \|v_1\|^2_{s_0} \int\limits_{0}^{\hbar\pi} \frac{dt}{(1+|t|)^{2(\varkappa-1-s_0)}}.$$

Нетрудно убедиться, что последний интеграл ограничен единицей, поскольку $\varkappa - 1 - s_0 > 1/2$. Проверим это:

$$\varkappa - 1 - s_0 = \varkappa - 1 - \left(s - \varkappa - \frac{1}{2}\right) = (\varkappa - s) + \varkappa - \frac{1}{2} = 1 + \delta + \varkappa - \frac{1}{2} = \varkappa + \delta + \frac{1}{2} > \frac{1}{2},$$

поскольку $\varkappa > 1$, $|\delta| < 1/2$. Аналогичная оценка имеет место для $|k_2(\eta,t) - K_2(\eta,t)|$. Тогда

$$\|m - M)\boldsymbol{v}\|_{s_0} \leqslant \mathrm{const} \cdot h^{\varkappa-1} \|\boldsymbol{v}\|_{s_0};$$

следовательно,

$$\|(\boldsymbol{P}_h M^{-1} - m^{-1})\tilde{\boldsymbol{F}}_d\|_{s_0} \leqslant \mathrm{const} \cdot h^{\varkappa-1} \|\boldsymbol{F}_d\|_{s_0} \leqslant \mathrm{const} \cdot h^{\varkappa-1} (\|f\|_{s_0} + \|g\|_{s_0})$$

в силу условий (11) и выбора элементов $\tilde{f}_d$, $\tilde{g}_d$.

Теперь оценим $\|\boldsymbol{P}_h \tilde{\boldsymbol{F}} - \tilde{\boldsymbol{F}}_d\|_{s_0}$, вспомнив выражения для $\tilde{\boldsymbol{F}}, \tilde{\boldsymbol{F}}_d$. Для первой компоненты вектора $\boldsymbol{P}_h \tilde{\boldsymbol{F}} - \tilde{\boldsymbol{F}}_d$ имеем

$$\left|\tilde{f}(\xi_2)\tilde{A}_0^{-1}(\xi_2) - \tilde{f}_d(\xi_2)\tilde{a}_0^{-1}(\xi_2)\right| \leqslant \mathrm{const} \cdot |\tilde{f}_d| \cdot \left|\tilde{A}_0(\xi_2) - \tilde{a}_0(\xi_2)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \cdot |\tilde{f}(\xi_2)| \cdot \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_{\neq}^{-1}(\xi)d\xi_1 - \int\limits_{-\hbar\pi}^{+\hbar\pi} \tilde{A}_{\neq}^{-1}(\xi)d\xi_1 \right|$$

в силу выбора элементов аппроксимации. Продолжив оценку, получим

$$\left|\tilde{f}(\xi_2)\tilde{A}_0^{-1}(\xi_2) - \tilde{f}_d(\xi_2)\tilde{a}_0^{-1}(\xi_2)\right| \leqslant \mathrm{const} \cdot |\tilde{f}(\xi_2)| \int\limits_{\hbar\pi}^{+\infty} \frac{d\xi_1}{(1+|\xi_1|+|\xi_2|)^{\varkappa}} \leqslant \mathrm{const} \cdot \frac{h^{\varkappa-1}|\tilde{f}(\xi_2)|}{(1+|\xi_2|)^{\varkappa-1}}.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат, умножая на $(1+|\xi_1|)^{2s_0}$ и интегрируя по $\hbar\mathbb{T}$, получим

$$\|\boldsymbol{P}_h \tilde{\boldsymbol{F}} - \tilde{\boldsymbol{F}}_d\|^2_{s_0} \leqslant \mathrm{const} \cdot h^{2(\varkappa-1)} \|\boldsymbol{P}_h \tilde{\boldsymbol{F}} - \tilde{\boldsymbol{F}}\|^2_{s_0},$$

поскольку $(1+|\xi_2|)^{2(\varkappa-1)} > 1$, и аналогичная оценка справедлива для второго компонента. Следовательно,

$$\|\boldsymbol{P}_h \tilde{\boldsymbol{F}} - \tilde{\boldsymbol{F}}_d\|_{s_0} \leqslant \mathrm{const} \cdot h^{\varkappa-1} \|\boldsymbol{P}_h \tilde{\boldsymbol{F}} - \tilde{\boldsymbol{F}}\|_{s_0},$$

и этим завершается доказательство леммы. □

Замечание 5.1. Скорость убывания по h величины $\|\boldsymbol{P}_h \tilde{\boldsymbol{F}} - \tilde{\boldsymbol{F}}\|_{s_0}$ зависит от порядка роста (убывания) функции на бесконечности. Так, например, если $f, g \in S(\mathbb{R})$, то порядок убывания может быть быстрее любой степени h:

$$\|\boldsymbol{P}_h \tilde{\boldsymbol{F}} - \tilde{\boldsymbol{F}}\|_{s_0} \leqslant C_{f,g} h^{\gamma} \quad \forall \gamma > 0,$$

где постоянная $C_{f,g}$ зависит только от функций f, g.

Теорема 5.1. *Пусть $s>2$. Тогда имеет место оценка*

$$|u(\tilde{x})-u_d(\tilde{x})|\leqslant \mathrm{const}\cdot\Big(h^{s-1}(\|f\|_{s_0}+\|g\|_{s_0})+\|\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{F}}-\tilde{\boldsymbol{F}}\|_{s_0}\Big).$$

Доказательство. Запишем

$$(2\pi)^2\big(u(\tilde{x})-u_d(\tilde{x})\big)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}(\xi)d\xi-\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}_d(\xi)d\xi=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\hbar\mathbb{T}^2}e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}(\xi)d\xi+\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}e^{i\tilde{x}\cdot\xi}A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\Big((\tilde{C}_0(\xi_1)-\tilde{c}_0(\xi_1))+(\tilde{D}_0(\xi_2)-\tilde{d}_0(\xi_2))\Big)d\xi$$

в силу выбора элемента $A_{d,\neq}(\xi_1,\xi_2)$. Оценим первый интеграл:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\hbar\mathbb{T}^2}e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}(\xi)d\xi\right|\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\hbar\mathbb{T}^2}\frac{(1+|\xi|)^s}{(1+|\xi|)^s}|\tilde{u}(\xi)|d\xi\leqslant\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\hbar\mathbb{T}^2}(1+|\xi|)^{-2s}d\xi\right)^{1/2}\|u\|_s$$

согласно неравенству Коши—Буняковского. Последний интеграл легко оценивается:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\hbar\mathbb{T}^2}(1+|\xi|)^{-2s}d\xi\leqslant\mathrm{const}\cdot h^{2(s-1)},$$

поскольку $s>1$. Таким образом,

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\hbar\mathbb{T}^2}e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}(\xi)d\xi\right|\leqslant\mathrm{const}\cdot h^{s-1}\|u\|_s\leqslant\mathrm{const}\cdot h^{s-1}\big(\|f\|_{s_0}+\|g\|_{s_0}\big).$$

Далее,

$$\left|\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}e^{i\tilde{x}\cdot\xi}A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\Big(\big(\tilde{C}_0(\xi_1)-\tilde{c}_0(\xi_1)\big)+\big(\tilde{D}_0(\xi_2)-\tilde{d}_0(\xi_2)\big)\Big)d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}\big|A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\big|\cdot\big|\tilde{C}_0(\xi_1)-\tilde{c}_0(\xi_1)\big|d\xi+\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}\big|A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\big|\cdot\big|\tilde{D}_0(\xi_2)-\tilde{d}_0(\xi_2)\big|d\xi.$$

Оценим один из последних интегралов:

$$\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}\big|A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\big|\cdot\big|\tilde{C}_0(\xi_1)-\tilde{c}_0(\xi_1)\big|d\xi=\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\left(\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}(1+|\xi_1|+|\xi_2|)^{-\varkappa}d\xi_2\right)\big|\tilde{C}_0(\xi_1)-\tilde{c}_0(\xi_1)\big|d\xi_1\leqslant$$
$$\leqslant\mathrm{const}\cdot\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}(1+|\xi_1|)^{-\varkappa+1}\big|\tilde{C}_0(\xi_1)-\tilde{c}_0(\xi_1)\big|d\xi_1=\mathrm{const}\cdot\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\frac{(1+|\xi_1|)^{s_0}}{(1+|\xi_1|)^{\varkappa-1+s_0}}\big|\tilde{C}_0(\xi_1)-\tilde{c}_0(\xi_1)\big|d\xi_1\leqslant$$
$$\leqslant\mathrm{const}\cdot\|\tilde{C}_0-\tilde{c}_0\|_{s_0}\left(\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\frac{d\xi_1}{(1+|\xi_1|)^{2(\varkappa-1+s_0)}}\right)^{1/2}.$$

Последний интеграл, как легко убедиться, ограничен постоянной:

$$\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\frac{d\xi_1}{(1+|\xi_1|)^{2(\varkappa-1+s_0)}}\leqslant 2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{d\xi_1}{(1+\xi_1)^{2(\varkappa-1+s_0)}},$$

при условии, что $s>2$. Очевидно, для второго интеграла оценка будет такой:

$$\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} \left|A_{\neq}^{-1}(\xi_1,\xi_2)\right| \cdot \left|\tilde{D}_0(\xi_2)-\tilde{d}_0(\xi_2)\right| d\xi \leqslant \mathrm{const}\cdot\|\tilde{D}_0-\tilde{d}_0\|_{s_0}.$$

Таким образом, приходим к следующей оценке:

$$|u(\tilde{x})-u_d(\tilde{x})| \leqslant \mathrm{const}\cdot\left(h^{s-1}\big(\|f\|_{s_0}+\|g\|_{s_0}\big)+\|\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{C}}-\tilde{\boldsymbol{c}}\|_{s_0}\right).$$

Теперь, применяя лемму 5.1, окончательно получаем оценку

$$|u(\tilde{x})-u_d(\tilde{x})| \leqslant \mathrm{const}\cdot\left(h^{s-1}\big(\|f\|_{s_0}+\|g\|_{s_0}\big)+\|\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{F}}-\tilde{\boldsymbol{F}}\|_{s_0}\right),$$

поскольку $\varkappa>s$. □

Чтобы придать теореме 5.1 более конкретный вид, содержащий оценку для $\|\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{F}}-\tilde{\boldsymbol{F}}\|_{s_0}$, приведем одно из следствий этой теоремы.

Следствие 5.1. *Если функции $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ ограничены, $s>2$, то оценка теоремы* 5.1 *приобретает вид*

$$|u(\tilde{x})-u_d(\tilde{x})| \leqslant\; C_{f,g}h^{\gamma},$$

где $\gamma=\min\{s-1,\varkappa-s\}$, постоянная $C_{f,g}$ зависит только от граничных функций f, g.

Доказательство. По заданной функции $\tilde{f}(\xi_1)$ определим $\tilde{f}_h(\xi_1)$ как функцию вида

$$\tilde{f}_h(\xi_1)=\begin{cases}0, & \xi_1\in\hbar\mathbb{T},\\ \tilde{f}(\xi_1), & \xi\notin\hbar\mathbb{T};\end{cases}$$

аналогично определим $\tilde{g}_h(\xi_2)$. Запишем

$$\|\boldsymbol{P}_h\tilde{\boldsymbol{F}}-\tilde{\boldsymbol{F}}\|_{s_0}=\|P_h\tilde{F}-\tilde{F}\|_{s_0}+\|P_h\tilde{G}-\tilde{G}\|_{s_0}$$

и оценим одно из слагаемых:

$$\|P_h\tilde{F}-\tilde{F}\|_{s_0}^2=\int\limits_{\mathbb{R}}(1+|\xi_1|)^{2s_0}\left|\tilde{f}_h(\xi_1)A_0^{-1}(\xi_1)\right|^2 d\xi_1 \leqslant \mathrm{const}\cdot\int\limits_{\hbar\pi}^{+\infty}(1+|\xi_1|)^{2s_0}d\xi_1$$

в силу условий (15) и ограниченности функции $\tilde{f}$. Последний интеграл конечен:

$$\int\limits_{\hbar\pi}^{+\infty}(1+|\xi_1|)^{2s_0}d\xi_1 \leqslant \mathrm{const}\cdot h^{-2s_0-1},$$

$$-2s_0-1=-2\left(s-\varkappa-\frac{1}{2}\right)-1=-2s+2\varkappa+1-1=2(\varkappa-s)=2(1+\delta)>0.$$

Таким образом,

$$\|P_h\tilde{F}-\tilde{F}\|_{s_0}\leqslant \mathrm{const}\cdot h^{\varkappa-s},$$

и такая же оценка имеет место для $\|P_h\tilde{G}-\tilde{G}\|_{s_0}$. Остается применить теорему 5.1, и доказательство окончено. □

6. Заключение. В этой работе рассмотрен лишь двумерный конус, однако авторы рассчитывают получить результаты для многомерной ситуации, аналогичные результатам для случая дискретного полупространства. Кроме этого, желательно избавиться от некоторых использованных дополнительных ограничений, связанных с обратимостью оператора m при малых значениях параметра решетки h.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 5. — С. 642–649.
2. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — М.: КомКнига, 2010.
3. *Васильев В. Б., Тарасова О. А.* О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *174*. — С. 12–19.
4. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
7. *Ремпель Ш., Шульце Б. В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1986.
8. *Рябенький В. С.* Метод разностных потенциалов и его приложения. — М.: Физматлит, 2002.
9. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
10. *Франк Л. С.* Пространства сеточных функций// Мат. сб. — 1971. — *86*, № 2. — С. 187-–233.
11. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. — М.: Мир, 1987.
12. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
13. *Botchway L., Kibiti G., Ruzhansky M.* Difference equations and pseudo-differential operators on $\mathbb{Z}^n$// J. Funct. Anal. — 2020. — *278*, № 11. — P. 1–41.
14. *Rabinovich V. S.* Wiener algebra of operators on the lattice $\mu\mathbb{Z}^n$ depending on the small parameter $\mu > 0$// Complex Var. Ellipt. Equations. — 2013. — *58*, № 6. — P. 751–766.
15. *Tarasova O. A., Vasilyev V. B.* To the theory of discrete boundary value problems// 4Open. — 2019. — *2*, № 17. — P. 1–7.
16. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Discrete singular operators and equations in a half-space// Azerb. J. Math. — 2013. — *3*, № 1. — P. 81–93.
17. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space// Math. Model. Anal. — 2018. — *23*, № 3. — P. 492–506.
18. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* On some discrete potential like operators// Tatra Mt. Math. Publ. — 2018. — *71*. — P. 195–212.
19. *Vasilyev V. B.* The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, discrete pseudo-differential operators// AIP Conf. Proc. — 2017. — *1863*, № 1. — 140014.
20. *Vasilyev V.* Discrete operators in canonical domains// WSEAS Trans. Math. — 2017. — *16*. — P. 197–201.
21. *Vasilyev V. B.* On discrete solutions for pseudo-differential equations// AIP Conf. Proc. — 2019. — *2116*. — 040010.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: vbv57@inbox.ru

Ходырева Анастасия Александровна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: anastasia.kho@yandex.ru