



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 3–15
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-3-15

УДК 517.977: 534.112

ГРАНИЧНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ НЕКОТОРОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2023 г. В. Р. БАРСЕГЯН, С. В. СОЛОДУША

Аннотация. Рассматриваются задачи граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой, описываемой одномерным волновым уравнением с кусочно постоянными характеристиками. Полагается, что время прохождения волны через каждый однородный участок одинаково. Управление осуществляется смещением одного конца при закреплённом другом конце с заданными начальным, конечным условиями и заданными промежуточными условиями на значения функции прогиба и скоростей точек системы. Предложен подход аналитического построения граничного управления. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере. Проведен вычислительный эксперимент и сравнительный анализ.

Ключевые слова: управление колебаниями, граничное управление, многоточечные промежуточные состояния, разделение переменных.

BOUNDARY CONTROL OF SOME DISTRIBUTED INHOMOGENEOUS OSCILLATORY SYSTEM WITH INTERMEDIATE CONDITIONS

© 2023 V. R. BARSEGHYAN, S. V. SOLODUSHA

ABSTRACT. We consider boundary-control problems for a distributed inhomogeneous oscillatory system described by a one-dimensional wave equation with piecewise constant characteristics. We assume that the propagation times for all homogeneous sections are the same. The control is performed by shifting one end with the other end fixed. The initial, intermediate, and final conditions on the deflection function and the velocities of the points of the system are given. An approach to the analytical construction of the boundary control is proposed. The results obtained are illustrated by a specific example. A computational experiment and a comparative analysis were performed.

Keywords and phrases: control of oscillations, boundary control, multipoint intermediate states, separation of variables.

AMS Subject Classification: 93C95, 70Q05

1. Введение. Задачи управления колебательными процессами, описываемые волновыми уравнениями, имеют значительный теоретический интерес и возрастающее практическое значение (см. [1, 2, 5–10, 13, 14, 17–19, 21–24]). Задачам управления разнородных распределённых колебательных систем посвящены, в частности, работы [2, 7–10, 13, 14, 19, 23, 24]. Одной из первых работ в этой области является [13], где решена задача (поставленная А. Г. Бутковским) управления распределённой колебательной системой, состоящей из двух кусочно однородных сред. В [9, 10] и других работах В. А. Ильина и его учеников для задач граничных управлений процессом, описываемым одномерным волновым уравнением, состоящим из двух участков разной плотности и

Исследование С. В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема AAAA-A21-121012090034-3).

упругости, при условии, что длины этих участков выбраны так, что время прохождения волны по каждому из этих участков является одинаковым, изучены и введены формулы типа Даламбера. Исследованиям кусочно однородных систем посвящены, в частности, работы [12, 15, 16]. Задачи граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой пока еще недостаточно исследованы. Весьма важны краевые задачи управления, в которых наряду с классическими краевыми условиями заданы также многоточечные промежуточные условия. Такие задачи изучаются, в частности, в [1, 5, 17, 18, 21, 22].

В настоящей работе рассмотрены новые задачи управления неоднородной (кусочно однородной) колебательной системой с заданными значениями функции колебания и скоростей точек в промежуточные моменты времени. Управление осуществляется смещением одного конца при закрепленном другом конце с заданными начальным, конечным условиями и заданными многоточечными условиями в промежуточные моменты времени. Рассмотренный кусочно однородный колебательный процесс состоит из двух участков с разными физическими характеристиками (упругими свойствами и плотностями) материалов. Предполагается, что длины однородных участков таковы, что время прохождения волны по каждому из однородных участков является одинаковым.

Предложен подход аналитического построения граничного управления. Схема построения заключается в следующем: исходная задача сводится к задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями. Далее при помощи метода разделения переменных и метода теории управления конечномерных систем с многоточечными промежуточными условиями (см. [1, 3–5, 17, 18, 20–22]) для произвольного числа первых гармоник построены граничные управления. Полученные результаты проиллюстрированы на конкретном примере. Проведен также вычислительный эксперимент с построением соответствующих графиков и их сравнительный анализ, которые подтверждают полученные результаты.

2. Постановки задач. Рассматриваются колебания распределенной кусочно однородной среды, расположенной вдоль отрезка $-l_1 \leq x \leq l$ и состоящей из двух участков: участка $-l_1 \leq x \leq 0$ и участка $0 \leq x \leq l$. Обозначим через $\rho_i = \text{const}$ линейную плотность, $k_i = \text{const}$ — модуль Юнга, $a_i = \sqrt{\frac{k_i}{\rho_i}}$ — скорость прохождения по участкам волны соответственно для первого и второго участка, $i = 1, 2$. Предполагается, что длины l_1 и l участков выбраны так, что время прохождения волны по участку $-l_1 \leq x \leq 0$ совпадает со временем прохождения волны по участку $0 \leq x \leq l$, т.е.

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}.$$

Отметим, что такими колебательными неоднородными процессами могут быть, в частности, продольные колебания кусочно однородного стержня (ρ — плотность, k — модуль упругости) или поперечные колебания кусочно однородной струны (ρ — плотность, k — натяжение струны).

Пусть состояние колебательной системы (продольные колебания стержня или поперечные колебания струны) описывается функцией $Q(x, t)$, $-l_1 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, а отклонение от состояния равновесия подчиняется следующему волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1, t) = u(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0+0}. \quad (3)$$

Распределенная кусочно однородная колебательная система переменной структуры (см. [3, 4, 20]), представленная однородным волновым уравнением (1), в частности, описывает не только поперечные колебания неоднородного стержня, но и продольные колебания неоднородной струны.

Пусть заданы начальные (при $t = t_0 = 0$) и конечные (при $t = T$) условия

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (5)$$

Пусть в промежуточные моменты времени t_k : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$, заданы промежуточные значения функции состояния (прогиба струны) и ее производной (значения скоростей точек струны):

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad j = \overline{1, m}. \quad (7)$$

Отметим, что промежуточные значения функции состояния (6) и значения производной (7) можно задавать в промежуточные моменты времени t_k ($k = \overline{1, m}$) в любой очередности. Предполагается, что $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x, t) : x \in [-l_1, l], t \in [0, T]\}$, $\varphi_i(x) \in C^2[-l_1, l]$, $\psi_j(x) \in C^1[-l_1, l]$. Предполагается также, что все функции такие, что выполняются соответствующие условия согласования (см. [1, 17, 18, 21, 22]).

В данной работе для уравнения (1) с начальными (4) и конечными (5) условиями на промежутке времени $[0, T]$ с заданными различными условиями ((6) или (7)) на значения функции состояния и значения производной системы в разные промежуточные моменты времени рассматриваются следующие задачи граничного управления системы смещением левого конца при закреплённом правом конце:

1. Требуется найти такое граничное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (2)), под воздействием которого колебательное движение системы (1) с условиями сопряжения (3) из заданного начального состояния (4) переходит в конечное состояние (5), обеспечивая выполнение в промежуточных моментах времени условия (6).

2. Требуется найти такое граничное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (2)), под воздействием которого колебательное движение системы (1) с условиями сопряжения (3) из заданного начального состояния (4) переходит в конечное состояние (5), обеспечивая выполнение в промежуточных моментах времени условия (7).

3. Сведение поставленных задач к задачам с нулевыми граничными условиями. Для построения решения поставленных задач перейдем к новой переменной (см. [16])

$$\xi = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1}x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (8)$$

что приводит к растяжению или сжатию отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ относительно точки $x = 0$. При этом с учетом (1) будем иметь, что отрезок $-l_1 \leq x \leq 0$ переходит к отрезку $-l \leq \xi \leq 0$. Для функции состояния $Q(\xi, t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковое уравнение

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & -l \leq \xi \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & 0 \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

с соответствующими граничными условиями

$$Q(-l, t) = u(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

с начальными условиями

$$Q(\xi, 0) = \varphi_0(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad (11)$$

промежуточными условиями

$$Q(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad i = \overline{1, m}, \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad i = \overline{1, m}, \quad (13)$$

с конечными условиями

$$Q(\xi, T) = \varphi_T(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad (14)$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1 \rho_1 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0-0} = a_2 \rho_2 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0+0}. \quad (15)$$

Для удобства после замены переменной (8) все функции оставлены в исходных обозначениях.

Так как граничные условия (10) неоднородны, решение уравнения (9) построим в виде суммы

$$Q(\xi, t) = V(\xi, t) + W(\xi, t), \quad (16)$$

где $V(\xi, t)$ — функция с граничными условиями

$$V(-l, t) = V(l, t) = 0, \quad (17)$$

требуемая определения, а функция $W(\xi, t)$ — решение уравнения (9) с условиями

$$W(-l, t) = u(t), \quad W(l, t) = 0$$

и имеет вид

$$W(\xi, t) = \frac{1}{2l}(l - \xi)u(t). \quad (18)$$

Подстановка (16) в (9) с учетом (18) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial \xi^2} + F(\xi, t), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (19)$$

где

$$F(\xi, t) = \frac{1}{2l}(\xi - l)\ddot{u}(t). \quad (20)$$

Функция $V(\xi, t)$ удовлетворяет соответствующему условию сопряжения (15) в точке $\xi = 0$ соединения участков. Отметим, что согласно (8) будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_0(-l_1) &= \varphi_0(-l), \quad \varphi_i(-l_1) = \varphi_i(-l), \quad \varphi_T(-l_1) = \varphi_T(-l), \\ \psi_0(-l_1) &= \psi_0(-l), \quad \psi_T(-l_1) = \psi_T(-l). \end{aligned} \quad (21)$$

Из начальных (11), промежуточных (12), (13) и конечных (14) условий, с учетом условий согласования и (21), получим, что функция $V(\xi, t)$ должна удовлетворять начальным условиям

$$V(\xi, 0) = \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_0(-l), \quad \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_0(-l), \quad (22)$$

промежуточным условиям

$$V(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_i(-l), \quad i = \overline{1, m}, \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_j(-l), \quad j = \overline{1, m}, \quad (24)$$

и конечным условиям

$$V(\xi, T) = \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_T(-l), \quad \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_T(-l). \quad (25)$$

Таким образом, решение поставленных задач сведено к решению задач управления колебаниями, описываемым уравнением (19) с однородными граничными условиями (17), которые формулируются следующим образом:

1⁰. Требуется найти такое граничное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (10)), под воздействием которого колебательное движение системы (19) с условиями сопряжения (15) из заданного начального состояния (22) переходит в конечное состояние (25), обеспечивая выполнение в промежуточных моментах времени условия (23).

2⁰. Требуется найти такое граничное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (10)), под воздействием которого колебательное движение системы (19) с условиями сопряжения (15) из заданного начального состояния (22) переходит в конечное состояние (25), обеспечивая выполнение в промежуточных моментах времени условия (24).

4. Решение задачи. Решение уравнения (21) ищем в виде

$$V(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k \xi}{l}. \quad (26)$$

Функции $F(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi)$, $\psi_i(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ представим в виде рядов Фурье, в базисе $\left\{ \sin \frac{\pi k \xi}{l} \right\}$, и, подставив их значения вместе с $V(\xi, t)$ в уравнения (19), (20) и в условия (22)–(25), получим

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a_2 \pi k}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

$$F_k(t) = -\frac{2a_2}{\lambda_k l} \ddot{u}(t), \quad (28)$$

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{2a_2}{\lambda_k l} \varphi_0(-l), \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{2a_2}{\lambda_k l} \psi_0(-l), \quad (29)$$

$$V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{2a_2}{\lambda_k l} \varphi_i(-l), \quad i = \overline{1, m}, \quad (30)$$

$$\dot{V}_k(t_j) = \psi_k^{(j)} - \frac{2a_2}{\lambda_k l} \psi_j(-l), \quad j = \overline{1, m}, \quad (31)$$

$$V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{2a_2}{\lambda_k l} \varphi_T(-l), \quad \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{2a_2}{\lambda_k l} \psi_T(-l). \quad (32)$$

Здесь коэффициенты Фурье функций $F(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(i)}$ и $\psi_k^{(j)}$ соответственно. Общее решение уравнения (27) имеет вид

$$V_k(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau. \quad (33)$$

Следуя [1, 3, 17, 18, 21, 22], подставляя выражение функции $F_k(t)$ из (28) в (33), учитывая условия (30)–(32) и интегрируя по частям с учетом условий согласования, получим, что функции $u(\tau)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\int_0^T u(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{1k}(T), \quad \int_0^T u(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{2k}(T), \quad (34)$$

$$\int_0^T u(\tau) h_{1k}^{(1)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_1), \quad \dots, \quad \int_0^T u(\tau) h_{1k}^{(m)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_m), \quad (35)$$

$$\int_0^T u(\tau) h_{2k}^{(1)}(\tau) d\tau = C_{2k}(t_1), \quad \dots, \quad \int_0^T u(\tau) h_{2k}^{(m)}(\tau) d\tau = C_{2k}(t_m), \quad (36)$$

где

$$C_{1k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} \right], \quad C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} \right],$$

$$C_{1k}(t_i) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} \right], \quad C_{2k}(t_j) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)} \right], \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\begin{aligned} X_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(-l) - \psi_0(-l) \sin \lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(-l) \cos \lambda_k T, \\ X_{2k} &= \psi_T(-l) - \psi_0(-l) \cos \lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(-l) \sin \lambda_k T, \\ X_{1k}^{(i)} &= \lambda_k \varphi_i(-l) - \psi_0(-l) \sin \lambda_k t_i - \lambda_k \varphi_0(-l) \cos \lambda_k t_i, \\ X_{2k}^{(j)} &= \psi_j(-l) - \psi_0(-l) \cos \lambda_k t_j + \lambda_k \varphi_0(-l) \sin \lambda_k t_j, \end{aligned} \quad (37)$$

$$h_{1k}^{(i)}(\tau) = \begin{cases} \sin \lambda_k(t_i - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_i, \\ 0, & t_i < \tau \leq T, \end{cases} \quad h_{2k}^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \cos \lambda_k(t_j - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_j, \\ 0, & t_j < \tau \leq T. \end{cases} \quad (38)$$

Выражения для $\tilde{C}_{1k}(t_i)$, $\tilde{C}_{1k}(t_i)$, $\tilde{C}_{1k}(t_i)$, $\tilde{C}_{1k}(t_i)$ не приводятся, так как они аналогичны приведенным в [5]. Отметим, что для задачи $\mathbf{1}^0$ соответствуют интегральные соотношения (34) и (35), а для задачи $\mathbf{2}^0$ — соотношения (34) и (36). Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{H}_k^{(a)}(\tau) &= \left(\sin \lambda_k(T - \tau) \quad \cos \lambda_k(T - \tau) \quad h_{1k}^{(1)}(\tau) \quad \dots \quad h_{1k}^{(m)}(\tau) \right)^T, \\ C_k^{(a)} &= \left(C_{1k}(T) \quad C_{2k}(T)q \quad C_{1k}(t_1) \quad \dots \quad C_{1k}(t_m) \right)^T, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_k^{(b)}(\tau) &= \left(\sin \lambda_k(T - \tau) \quad \cos \lambda_k(T - \tau) \quad h_{2k}^{(1)}(\tau) \quad \dots \quad h_{2k}^{(m)}(\tau) \right)^T, \\ C_k^{(b)} &= \left(C_{1k}(T) \quad C_{2k}(T) \quad C_{2k}(t_1) \quad \dots \quad C_{2k}(t_m) \right)^T. \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда, учитывая введенные обозначения (39), (40), соотношения (34)–(36) запишутся так:

$$\int_0^T \bar{H}_k^{(\delta)}(\tau) u^{(\delta)}(\tau) d\tau = C_k^{(\delta)}, \quad \delta = a, b; \quad k = 1, 2, \dots \quad (41)$$

Обозначения в верхнем индексе $\delta = a, b$ соответствуют задачам $\mathbf{1}^0$ и $\mathbf{2}^0$.

На практике обычно выбираются несколько первых n гармоник колебаний и решается задача синтеза управлений, используя методы теории управления конечномерными системами. Поэтому

$$H_n^{(\delta)}(\tau) = \left(\bar{H}_1^{(\delta)}(\tau) \quad \bar{H}_2^{(\delta)}(\tau) \quad \dots \quad \bar{H}_n^{(\delta)}(\tau) \right)^T, \quad \eta_n^{(\delta)} = \left(C_1^{(\delta)} \quad C_2^{(\delta)} \quad \dots \quad C_n^{(\delta)} \right)^T, \quad \delta = a, b, \quad (42)$$

с размерностями $H_n^{(\delta)}(\tau) - (n(m+2) \times 1)$, $\eta_n^{(\delta)} - (n(m+2) \times 1)$ при всех $\delta = a, b$.

Для первых n гармоник соотношение (41), с учетом (42), запишется в виде

$$\int_0^T H_n^{(\delta)}(\tau) u_n^{(\delta)}(\tau) d\tau = \eta_n^{(\delta)}, \quad \delta = a, b. \quad (43)$$

Из (43) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Первые n гармоник системы (27) с условиями (29)–(32) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора $\eta_n^{(\delta)}$ можно найти управление $u_n^{(\delta)}(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (43).*

Для произвольного числа первых гармоник управляющее воздействие $u_n^{(\delta)}(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (43), имеет вид (см. [3, 11])

$$u_n^{(\delta)}(t) = \left(H_n^{(\delta)}(t) \right)^T \left(S_n^{(\delta)} \right)^{-1} \eta_n^{(\delta)} + f_n^{(\delta)}(t), \quad \delta = a, b, \quad (44)$$

где $(H_n^{(\delta)}(t))^T$ — транспонированная матрица, $f_n^{(\delta)}(t)$ — некоторая вектор-функция, причем

$$\int_0^T H_n^{(\delta)}(t) f_n^{(\delta)}(t) dt = 0, \quad S_n^{(\delta)} = \int_0^T H_n^{(\delta)}(t) \left(H_n^{(\delta)}(t) \right)^T dt, \quad \delta = a, b.$$

Здесь $H_n^{(\delta)}(t) (H_n^{(\delta)}(t))^T$ — внешнее произведение, $S_n^{(\delta)}$ — известная матрица размерности $(n(m+2) \times n(m+2))$, для которой предполагается, что $\det S_n^{(\delta)} \neq 0$ при $\delta = a, b$.

Из формулы (44) следует, что существует множество управляющих функций, решающих задачи граничных управлений. Учитывая обозначения (38) для промежутков времени $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, m+1}$, функции управления $u_n^{(\delta)}(t)$ представляются в виде

$$u_n^{(\delta)}(t) = \begin{cases} u_n^{(\delta)1}(t), & 0 \leq t \leq t_1, \\ u_n^{(\delta)2}(t), & t_1 < t \leq t_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ u_n^{(\delta)m}(t), & t_{m-1} < t \leq t_m, \\ u_n^{(\delta)m+1}(t), & t_m < t \leq T. \end{cases} \quad (45)$$

Подставляя из (44) (или (45)) управление $u_n^{(\delta)}(t)$ в (28), а найденное для $F_k^{(\delta)}(t)$ выражение — в (33), получим функцию $V_k^{(\delta)}(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (26) будем иметь

$$V_n^{(\delta)}(\xi, t) = \sum_{k=1}^n V_k^{(\delta)}(t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi, \quad (46)$$

где

$$V_k^{(\delta)}(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k^{(\delta)}(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau,$$

а с помощью (16) и (18) функция колебания $Q_n^{(\delta)}(\xi, t)$, $-l \leq \xi \leq l$, для первых n гармоник запишется в виде

$$Q_n^{(\delta)}(\xi, t) = V_n^{(\delta)}(\xi, t) + W_n^{(\delta)}(\xi, t), \quad W_n^{(\delta)}(\xi, t) = \frac{1}{2l}(l - \xi) u_n^{(\delta)}(t), \quad \delta = a, b. \quad (47)$$

Учитывая обозначения (8), функция $Q_n^{(\delta)}(x, t)$ при $-l_1 \leq x \leq l$ представляется в виде

$$Q_n^{(\delta)}(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n V_k^{(\delta)}(t) \sin \frac{\pi k}{l_1} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1} \right) u_n^{(\delta)}(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \sum_{k=1}^n V_k^{(\delta)}(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) u_n^{(\delta)}(t), & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (48)$$

Здесь функции управления $u_n^{(\delta)}(t)$ имеют вид (44) (или (45)).

5. Пример для $n = 1$. Для иллюстрации вышеизложенного построения рассмотрим случай $m = 1$, т.е. когда в одном промежуточном моменте времени $t = t_1$ ($0 < t_1 < T$) задано состояние колебания:

$$Q(x, t_1) = \varphi_1(x), \quad -l_1 \leq x \leq l.$$

Следовательно,

$$\bar{H}_k(t) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k(T - t) \\ \cos \lambda_k(T - t) \\ h_{1k}^{(1)}(t) \end{pmatrix}, \quad C_k(t_1, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{1k}(t_1) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Построим функцию граничного управления $u_n(t)$ при $n = 1$ (следовательно, $k = 1$). Тогда, согласно (42), будем иметь $H_1(t) = \bar{H}_1(t)$, $\eta_1 = C_1$, а матрица S_1 имеет вид

$$S_1 = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, & s_{12} &= s_{21} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T, \\ s_{13} &= s_{31} = \frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T, \\ s_{22} &= \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, & s_{33} &= \frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1, \\ s_{23} &= s_{32} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1); \end{aligned}$$

при этом $\Delta = \det S_1 \neq 0$. Обозначим

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & \hat{s}_{13} \\ \hat{s}_{21} & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} \\ \hat{s}_{31} & \hat{s}_{32} & \hat{s}_{33} \end{pmatrix}.$$

Из формулы (44) следует, что

$$u_1(\tau) = H_1^T(\tau) S_1^{-1} \eta_1 + f_1(\tau).$$

Предполагая, что $f_1(\tau) = 0$, получим

$$\begin{aligned} u_1^{(1)}(t) &= \sin \lambda_1 (T - t) [\hat{s}_{11} C_{11}(T) + \hat{s}_{12} C_{21}(T) + \hat{s}_{13} C_{11}(t_1)] + \\ &+ \cos \lambda_1 (T - t) [\hat{s}_{21} C_{11}(T) + \hat{s}_{22} C_{21}(T) + \hat{s}_{23} C_{11}(t_1)] + \\ &+ \sin \lambda_1 (t_1 - t) [\hat{s}_{31} C_{11}(T) + \hat{s}_{32} C_{21}(T) + \hat{s}_{33} C_{11}(t_1)] \end{aligned}$$

при $t \in [0, t_1]$ и

$$\begin{aligned} u_1^{(2)}(t) &= \sin \lambda_1 (T - t) [\hat{s}_{11} C_{11}(T) + \hat{s}_{12} C_{21}(T) + \hat{s}_{13} C_{11}(t_1)] + \\ &+ \cos \lambda_1 (T - t) [\hat{s}_{21} C_{11}(T) + \hat{s}_{22} C_{21}(T) + \hat{s}_{23} C_{11}(t_1)] \end{aligned}$$

при $t \in (t_1, T]$. Отметим, что согласно формулам (46)–(48) будем иметь выражение для $Q_1(\xi, t)$ при $-l \leq \xi \leq l$ в виде

$$Q_1(\xi, t) = \begin{cases} V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} \xi + \frac{1}{2l} (l - \xi) u_1^{(1)}(t), & 0 \leq \tau \leq t_1, \\ V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} \xi + \frac{1}{2l} (l - \xi) u_1^{(2)}(t), & t_1 < \tau \leq T. \end{cases}$$

Учитывая обозначения (8), представим функцию состояния $Q_1(x, t)$ при $-l_1 \leq x \leq l$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1(x, t) &= \begin{cases} V_1(t) \sin \frac{\pi}{l_1} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) u_1^{(1)}(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1^{(1)}(t), & 0 \leq x \leq l, \end{cases} & \text{при } t \in [0, t_1], \\ Q_1(x, t) &= \begin{cases} V_1(t) \sin \frac{\pi}{l_1} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) u_1^{(2)}(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1^{(2)}(t), & 0 \leq x \leq l, \end{cases} & \text{при } t \in (t_1, T]. \end{aligned}$$

6. Результаты вычислительного эксперимента. Положим

$$a_1 = \frac{4}{5}a_2, \quad t_1 = 6\frac{l}{a_2}, \quad T = 12\frac{l}{a_2}, \quad l = 1, \quad l_1 = \frac{4}{5}.$$

Пусть состояние струны и скорости точек при $t = 0$ задано следующими функциями:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3 + \left(\frac{2}{3}l_1 + \frac{l}{7l_1}\right)x^2 - \frac{1}{7}l \cdot l_1, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \frac{l_1}{7l}x^2 - \frac{1}{7}l \cdot l_1, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad \psi_0(x) = 0, \quad -l_1 \leq x \leq l.$$

Пусть при $t = t_1$ задано промежуточное состояние струны в виде функции

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} - \frac{l_1 x^2}{3}, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{x^3}{2} + \frac{l x^2}{2}, & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

а при $t = T$ задано следующее конечное состояние:

$$\varphi_T(x) = 0, \quad \psi_T(x) = 0, \quad -l_1 \leq x \leq l.$$

Тогда значения этих функций на краях струны следующие:

$$\varphi_0(0) = -\frac{4}{35}, \quad \varphi_0(l) = \varphi_0(-l) = 0, \quad \varphi_1(l) = \varphi_1(-l) = 0, \quad \varphi_T(l) = \varphi_T(-l) = 0.$$

В этом случае матрицы S_1 и S_1^{-1} представлены следующим образом:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 6/a_2 & 0 & 3/a_2 \\ 0 & 6/a_2 & 0 \\ 3/a_2 & 0 & 3/a_2 \end{pmatrix}, \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} a_2/3 & 0 & -a_2/3 \\ 0 & a_2/6 & 0 \\ -a_2/3 & 0 & 2a_2/3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\det S_1 = a_2^3/54$. Для функции управления $u_1(t)$, с учетом (34)–(38), имеем:

$$u_1(t) = \begin{cases} -\frac{253}{375} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^3}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{503}{1125} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^3}, & t_1 < t \leq T, \end{cases}$$

а $V_1(t)$ имеет вид

$$V_1(t) = \begin{cases} \left(-\frac{256}{375\pi^3} + \frac{253}{750} \frac{a_2 t}{\pi^3} \right) \cos a_2 \pi t - \frac{253}{750} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^4}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \left(\frac{1006}{375\pi^3} - \frac{503}{2250} \frac{a_2 t}{\pi^3} \right) \cos a_2 \pi t + \frac{503}{2250} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^4}, & t_1 < t \leq T. \end{cases}$$

Для функции колебания имеем:

$$Q_1(x, t) = \begin{cases} \left(\left(-\frac{256}{375\pi^3} + \frac{253}{750} \frac{a_2 t}{\pi^3} \right) \cos a_2 \pi t - \frac{253}{750} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^4} \right) \sin \frac{5}{4} \pi x - \\ \quad - \frac{253}{750} \left(1 - \frac{5}{4} x \right) \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^3}, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \left(\left(-\frac{256}{375\pi^3} + \frac{253}{750} \frac{a_2 t}{\pi^3} \right) \cos a_2 \pi t - \frac{253}{750} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^4} \right) \sin \pi x - \\ \quad - \frac{253}{750} (1 - x) \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^3}, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_1,$$

$$Q_1(x, t) = \begin{cases} \left(\left(\frac{1006}{375\pi^3} - \frac{503}{2250} \frac{a_2 t}{\pi^3} \right) \cos a_2 \pi t + \frac{503}{2250} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^4} \right) \sin \frac{5}{4} \pi x + \\ \quad + \frac{503}{2250} \left(1 - \frac{5}{4} x \right) \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^3}, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \left(\left(\frac{1006}{375\pi^3} - \frac{503}{2250} \frac{a_2 t}{\pi^3} \right) \cos a_2 \pi t + \frac{503}{2250} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^4} \right) \sin \pi x + \\ \quad + \frac{503}{2250} (1 - x) \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^3}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad \text{при } t_1 < t \leq T.$$

Теперь предположим, что

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad t_1 = 24, \quad T = 48, \quad l = 1, \quad l_1 = \frac{4}{5}, \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Для функций $u_1(t)$ и $V_1(t)$ имеем:

$$u_1(t) = \begin{cases} -\frac{253}{375\pi^3} \sin \frac{1}{4} \pi t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{503}{1125\pi^3} \sin \frac{1}{4} \pi t, & t_1 < t \leq T, \end{cases}$$

$$V_1(t) = \begin{cases} \left(-\frac{256}{375\pi^3} + \frac{253}{3000} \frac{t}{\pi^3} \right) \cos \frac{1}{4} \pi t - \frac{253}{750\pi^4} \sin \frac{1}{4} \pi t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \left(\frac{1006}{375\pi^3} - \frac{503}{9000} \frac{t}{\pi^3} \right) \cos \frac{1}{4} \pi t + \frac{503}{2250\pi^4} \sin \frac{1}{4} \pi t, & t_1 < t \leq T. \end{cases}$$

Их графики представлены на рис. 1 и 2 соответственно.

Явные выражения функции прогиба струны:

$$Q_1(x, t) = \begin{cases} \left(\left(-\frac{256}{375\pi^3} + \frac{253}{3000} \frac{t}{\pi^3} \right) \cos \frac{1}{4} \pi t - \frac{253}{750\pi^4} \sin \frac{1}{4} \pi t \right) \sin \frac{5}{4} \pi x - \\ \quad - \frac{253}{750\pi^3} \left(1 - \frac{5}{4} x \right) \sin \frac{1}{4} \pi t, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \left(\left(-\frac{256}{375\pi^3} + \frac{253}{3000} \frac{t}{\pi^3} \right) \cos \frac{1}{4} \pi t - \frac{253}{750\pi^4} \sin \frac{1}{4} \pi t \right) \sin \pi x - \\ \quad - \frac{253}{750\pi^3} (1 - x) \sin \frac{1}{4} \pi t, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_1,$$

$$Q_1(x, t) = \begin{cases} \left(\left(\frac{1006}{375\pi^3} - \frac{503}{9000} \frac{t}{\pi^3} \right) \cos \frac{1}{4} \pi t + \frac{503}{2250\pi^4} \sin \frac{1}{4} \pi t \right) \sin \frac{5}{4} \pi x + \\ \quad + \frac{503}{2250\pi^3} \left(1 - \frac{5}{4} x \right) \sin \frac{1}{4} \pi t, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \left(\left(\frac{1006}{375\pi^3} - \frac{503}{9000} \frac{t}{\pi^3} \right) \cos \frac{1}{4} \pi t + \frac{503}{2250\pi^4} \sin \frac{1}{4} \pi t \right) \sin \pi x + \\ \quad + \frac{503}{2250\pi^3} (1 - x) \sin \frac{1}{4} \pi t, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad \text{при } t_1 < t \leq T.$$

Выражения и графики (см. рис. 3–6) функций прогиба струны и ее производной представлены ниже. При $t = t_0 = 0$:

$$Q_1(x, 0) = \begin{cases} -\frac{256}{375\pi^3} \sin \frac{5}{4} \pi x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{256}{375\pi^3} \sin \pi x, & 0 \leq x \leq l; \end{cases}$$

$$\frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \begin{cases} -\frac{253}{3000\pi^2} \left(1 - \frac{5}{4} x \right), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{253}{3000\pi^2} (1 - x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

При $t = t_1 = 24$:

$$Q_1(x, 24) = \begin{cases} \frac{503}{375\pi^3} \sin \frac{5}{4}\pi x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \frac{503}{375\pi^3} \sin \pi x, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

При $t = t_1 = 48$:

$$Q_1(x, 48) = 0, \quad \frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=48} = \begin{cases} \frac{503}{9000\pi^2} \left(1 - \frac{5}{4}x\right), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \frac{503}{9000\pi^2} (1 - x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_1(x, t_i) = |Q_1(x, t_i) - \varphi_i(x)|, \quad \widehat{\varepsilon}_1(x, t_j) = |\dot{Q}_1(x, t_j) - \psi_j(x)|,$$

где $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 2$ ($i = j = 2$ соответствуют моменту времени $t_2 = T$). Тогда

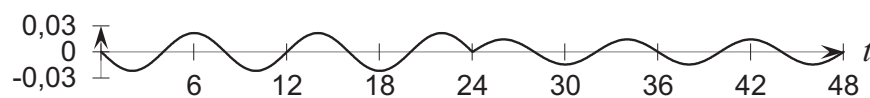
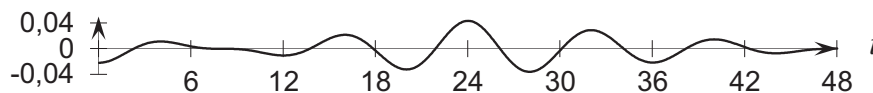
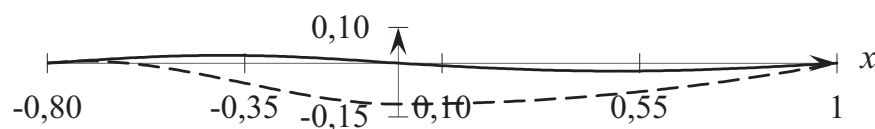
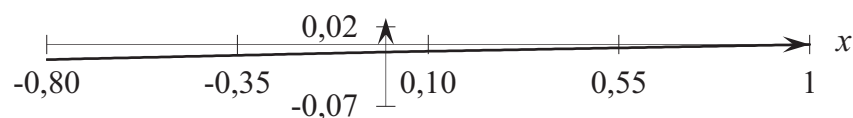
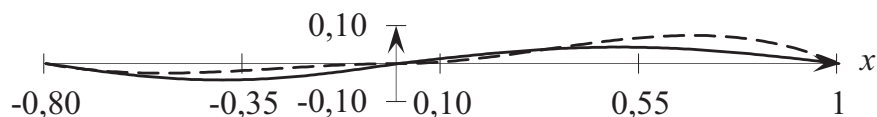
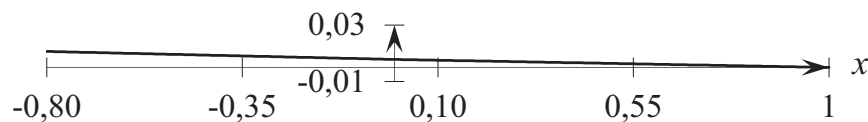
$$\begin{aligned} \max_{-4/5 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 0) &\approx 0,114, & \max_{-4/5 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 0) &\approx 0,017, & \max_{-4/5 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 24) &\approx 0,040, \\ \int_{-4/5}^1 \varepsilon_1(x, 0) dx &\approx 0,103, & \int_{-4/5}^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 0) dx &\approx 0,015, & \int_{-4/5}^1 \varepsilon_1(x, 24) dx &\approx 0,025, \\ \max_{-4/5 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 48) &= 0, & \max_{-4/5 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 48) &= 0,011, & \int_{-4/5}^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 48) dx &\approx 0,010. \end{aligned}$$

Таким образом, результаты анализа показали, что (даже при $n = 1$) под воздействием построенного граничного управления $u_1(t)$ поведение функции прогиба неоднородной струны $Q_1(x, t)$ и ее производная $\dot{Q}_1(x, t)$ достаточно близки к заданным исходным функциям.

7. Заключение. В работе предложен основанный на методе Фурье конструктивный подход построения граничного управления неоднородной колебательной системой с заданными значениями функций колебания и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени. Предложенный подход можно распространить на другие неоднородные колебательные системы. Вычислительный эксперимент показал эффективность построенного граничного управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барсегян В. Р. Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 36–47.
2. Барсегян В. Р. Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости// Диффер. уравн. процессы управл. — 2022. — № 2. — С. 41–54.
3. Барсегян В. Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. — М.: Наука, 2016.
4. Барсегян В. Р., Барсегян Т. В. Критерий управляемости линейных стационарных систем переменной структуры// Тр. VIII Междунар. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Горис-Степанакерт, Армения, 22-26 сентября 2014 г.), 2014. — С. 83–87.
5. Барсегян В. Р., Солодуша С. В. Задача граничного управления колебаниями струны смещением на двух концах с заданными состояниями в промежуточные моменты времени// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 30–42.
6. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
7. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами// Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2011. — 17, № 1. — С. 85–92.

Рис. 1. График функции $u_1(t)$.Рис. 2. График функции $V_1(t)$.Рис. 3. Графики $Q_1(x, 0)$ (сплошная линия) и $\varphi_0(x)$ (пунктирная линия).Рис. 4. Графики функций $\dot{Q}_1(x, 0)$ (сплошная линия) и $\psi_0(x) = 0$.Рис. 5. Графики функций $Q_1(x, 24)$ (сплошная линия) и $\varphi_1(x)$ (пунктирная линия).Рис. 6. Графики функций $\dot{Q}_1(x, 48)$ (сплошная линия) и $\psi_T(x) = 0$.

8. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2009. — 49, № 5. — С. 786–796.
9. Ильин В. А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 159–163.
10. Ильин В. А. О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. РАН. — 2010. — 435, № 6. — С. 732–735.
11. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

12. Кулешов А. А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 5. — С. 594–597.
13. Львова Н. Н. Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой// Автомат. телемех. — 1973. — № 10. — С. 22–32.
14. Провоторов В. В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы из m струн// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Прикл. мат. Информ. Процессы управл. — 2012. — № 1. — С. 60–69.
15. Рогожников А. М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 488–491.
16. Холодовский С. Е., Чухрий П. А. Задача о движении неограниченной кусочно-однородной струны// Уч. зап. Забайкал. гос. ун-та. Физ. Мат. Техн. Технол. — 2018. — 13, № 4. — С. 42–50.
17. Barseghyan V. R. Control problem of string vibrations with inseparable multipoint conditions at intermediate points in time// Mech. Solid. — 2019. — 54, № 8. — P. 1216–1226.
18. Barseghyan V. R. The problem of optimal control of string vibrations// Int. Appl. Mech. — 2020. — 56, № 4. — P. 471–480.
19. Barseghian V. R. String vibration observation problem// Proc. I Int. Conf. “Control of Oscillations and Chaos” (August 27–29, 1997, St. Petersburg, Russia), 1997. — P. 309–311.
20. Barseghyan V. R. On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure// 2016 Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (June 1–3, 2016, Moscow, Russia), 2016. — P. 1–4.
21. Barseghyan V. R., Solodusha S. V. Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time// Proc. Int. Conf. “Mathematical Optimizatopn Theory and Operations Research” MOTOR-2021 (July 5–10, 2021, Irkutsk, Russia). — Cham: Springer, 2021. — P. 299–313.
22. Barseghyan V. R., Solodusha S. V. On one problem in optimal boundary control for string vibrations with a given velocity of points at an intermediate moment of time// Proc. Int. Russian Automation Conference “RusAutoCon” (September 5–11, 2021, Sochi, Russia). — IEEE, 2021. — P. 343–349.
23. Ben Amara J., Beldi E. Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients// SIAM J. Control Optim. — 2019. — 57, № 5. — P. 3360–3387.
24. Mercier D., Regnier V. Boundary controllability of a chain of serially connected Euler–Bernoulli beams with interior masses// Collect. Math. — 2009. — 60, № 3. — P. 307–334.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Исследование С. В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема АААА-А21-121012090034-3).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барсегян Ваня Рафаелович
Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения;
Ереванский государственный университет
E-mail: barseghyan@sci.am

Солодуша Светлана Витальевна
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева
Сибирского отделения РАН, Иркутск;
Иркутский государственный университет
E-mail: solodusha@isem.irk.ru