ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 41–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-41-49

УДК 517.9

ОБ АЛГЕБРЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

© 2023 г. **А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО, Н. Б. УСКОВА**

Аннотация. В работе рассматриваются интегральные операторы с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$. Показано, что такие операторы образуют подалгебру алгебры ограниченных линейных операторов. Исследование оператора с ядром, зависящим от разности аргументов, проведено с применением банаховых $L_1(\mathbb{Z})$-модулей. Отмечены различие и сходство подалгебры интегральных операторов с соответствующей подалгеброй разностных операторов с инволюцией.

***Ключевые слова*:** интегральный оператор, полукарлемановское ядро, инволюция, банахов модуль, разностный оператор, спектр, свертка.

ON THE ALGEBRA OF INTEGRAL OPERATORS WITH INVOLUTION

© 2023 **A. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO, N. B. USKOVA**

Abstract. In this paper, we consider integral operators with kernels depending on the sum and difference of arguments in the space $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$. We prove that such operators form a subalgebra of the algebra of bounded linear operators. The study of operators with kernels depending on the difference of arguments was carried out using Banach $L_1(\mathbb{Z})$-modules. The differences and similarities between the subalgebra of integral operators and the corresponding subalgebra of difference operators with involution are noted.

***Keywords and phrases*:** integral operator, semi-Carleman kernel, involution, Banach module, difference operator, spectrum, convolution.

***AMS Subject Classification*:** 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. Пусть $L_p = L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $p \in [1, \infty]$, — банахово пространство измеримых и суммируемых со степенью p на $\mathbb{R}$ классов эквивалентности функций, существенно ограниченных при $p = \infty$, со значениями в $\mathbb{C}$. Нормы в L_p, $p \in [1, \infty]$, задаются формулами

$$\|x\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|.$$

Отдельно отметим наиболее используемые далее пространства L_1 и L_2. Пространство L_1 является банаховой алгеброй суммируемых на $\mathbb{R}$ классов измеримых комплексных функций со сверткой функций

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau) g(t - \tau) \, d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t - \tau) g(\tau) \, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L_1,$$

в качестве операции умножения.

Пространство L_2 является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} \, dt, \quad f, g \in L_2;$$

норма в L_2 порождается этим скалярным произведением.

Для функций из L_1 рассмотрим преобразование Фурье, задаваемое формулой

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in L_1.$$

Через $\widehat{L}_1(\mathbb{R})$ обозначим банахову алгебру преобразований Фурье функций из L_1 с поточечным умножением функций в качестве операции умножения и нормой

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \max_{\lambda\in\mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)|.$$

Заметим, что алгебра $\widehat{L}_1$ изометрична L_1. Преобразование Фурье обычным образом расширяется на функции из L_2, причем для $f \in L_1 \cap L_2$ имеет место равенство Парсеваля

$$\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2.$$

В работах Е. Л. Александрова (см. [1–7]) изучались интегральные операторы с ядрами, зависящими от суммы и разности аргументов вида

$$(Af)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} k(t-\tau)f(\tau)\,d\tau + \int\limits_{\mathbb{R}} h(t+\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad f, k, h \in L_2,$$

с областью определения $D(A) = \{f \in L_2, Af \in L_2\}$.

Определение 1.1 (см. [3, 26, 29]). Ядром Карлемана (C-ядром) называется всякая измеримая комплекснозначная функция $K : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим условиям: $K(x, y) \in L_2$ как функция переменной y для почти всех $x \in \mathbb{R}$;

$K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ для почти всех $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Если выполнено только условие (i), то функция K называется полукарлемановским ядром (SC-ядром).

В цитируемых выше работах предполагается, что оператор A обладает SC-ядром. Отметим, что условие принадлежности функций k, h, f пространству L_2 является основополагающим.

В [1–7] оператор A представляется в виде суммы двух операторов A^- и A^+ с ядрами, зависящими от разности и от суммы аргументов. Исследуются свойства этих операторов. В частности, происходит построение резольвент и спектральных функций. Отметим работу [21], в которой оператор A также действует в L_2, но $k, h \in L_1$; в этой работе также описан спектр оператора A.

Будем рассматривать в работе интегральный оператор с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов вида

$$(A_{\alpha,\beta}x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \alpha(\tau-t)x(\tau)\,d\tau + \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(\tau+t)x(\tau)\,d\tau,$$

где $\alpha, \beta \in L_1$ и $x \in L_p$, $p \in [1, \infty)$. В работе показано, что такие операторы образуют подалгебру $\mathcal{M}$ из алгебры ограниченных операторов, найден спектр, а также рассмотрены отдельно свойства оператора A^-. Для этого привлекается теория банаховых $L_1(\mathbb{R})$-модулей, основные положения которой изложены в [10, 23, 27, 28].

Кроме того, в работе отмечаются различия и сходство подалгебры $\mathcal{M}$ рассматриваемых операторов $A_{\alpha,\beta}$ и соответствующей подалгебры разностных операторов с инволюцией, изученной в [11].

2. Постановка задачи.

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое комплексное банахово пространство. Символом $\operatorname{End}\mathcal{X}$ будем обозначать банахову алгебру ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{X}$, с нормой

$$\|X\|_\infty = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Xx\|, \quad X \in \operatorname{End}\mathcal{X}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Символом $I \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ будем обозначать тождественный оператор.

Определение 2.1. Оператор $J \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ называется инволюцией, если $J^2 = I$.

Заметим, что соответствующая операция изначально называлась сдвигом Карлемана $(Jx)(t) = x(\omega - t)$, $x \in L_2[0,\omega]$ (см. [18, 25]), затем использовались термины «отклоняющийся аргумент» [8], «инволютивное отклонение» [9], сейчас же используется, в основном, термин «инволюция» [15, 17, 19, 20], который мы и будем употреблять.

Простейшей или стандартной инволюцией в L_p, $p \in [1,\infty]$, является оператор отражения

$$(Jx)(t) = x(-t). \tag{1}$$

Именно его мы и будем рассматривать.

Очевидно, что оператор J, определенный формулой (1), как и любой оператор инволюции, имеет два собственных значения ± 1. При этом собственному значению 1 отвечает подпространство четных функций из L_p, а значению -1 — подпространство нечетных функций из L_p. Любую функцию $f \in L_p$, $p \in [1,\infty]$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций

$$f(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} + \frac{f(t) - f(-t)}{2} = f_+(t) + f_-(t).$$

Отметим, что в случае, если $\mathcal{X}$ — абстрактное банахово пространство и $J \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ — инволюция, то любой такой вектор, что $Jx = x$ называется четным вектором, а если $Jx = -x$, то вектор x называется нечетным вектором.

Обозначим через $\mathcal{X}_+$ и $\mathcal{X}_-$ соответственно подпространства четных и нечетных векторов из $\mathcal{X}$. Отметим, что $\mathcal{X}_+$ и $\mathcal{X}_-$ — замкнутые подпространства и пространство $\mathcal{X}$ представимо в виде их прямой суммы

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_+ \oplus \mathcal{X}_-. \tag{2}$$

Введем два оператора P_+, $P_- \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ формулами

$$P_+ = \frac{I + J}{2}, \quad P_- = \frac{I - J}{2}.$$

Свойства оператора P_+ и P_- удобно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 2.1. *Операторы P_+ и P_- обладают следующими свойствами:*

(i) P_+ *и* P_- — *проекторы*;
(ii) $P_+ + P_- = I$, $P_+P_- = 0$;
(iii) $JP_+ = P_+$, $JP_- = -P_-$;
(iv) $J = P_+ - P_-$ (*спектральное разложение оператора* J);
(v) $\operatorname{Im} P_+ = \mathcal{X}_+$, $\operatorname{Im} P_- = \mathcal{X}_-$.

Таким образом, есть два проектора, осуществляющих разложение пространства $\mathcal{X}$ в виде прямой суммы (2).

Для любой функции $\alpha \in L_1$ введем в рассмотрение оператор свертки A_α, определенный формулой

$$(A_\alpha x)(t) = (\alpha * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_{\mathbb{R}} \alpha(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = \int_{\mathbb{R}} \alpha(\tau)S(-\tau)x(\tau)\,d\tau, \quad x \in L_p.$$

Оператор A_α является интегральным оператором с ядром, зависящим от разности аргументов.

Если $\alpha \in L_1 \cap L_2$, то оператор A_α, согласно определению 1.1, является интегральным оператором с SC-ядром и аналогом оператора A^- из [1–7]. В отличие от оператора A^-, оператор A_α определен для всех $x \in L_p$, $p \in [1,\infty)$, ввиду принадлежности функции α пространству L_1.

Рассмотрим оператор $A_\alpha + A_\beta J$, α, $\beta \in L_1$. Это интегральный оператор с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов:

$$\begin{aligned}(A_\alpha + A_\beta J)x &= \int_{\mathbb{R}} \alpha(\tau)x(t-\tau)\,d\tau + \int_{\mathbb{R}} \beta(\tau)x(-t+\tau)\,d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha(t-\tau)x(\tau)\,d\tau + \int_{\mathbb{R}} \beta(t+\tau)x(\tau)\,d\tau, \quad x \in L_p;\end{aligned}$$

при этом соответствующее ядро является SC-ядром. Отметим, что

$$\|A_{\alpha,\beta}\| \leqslant \|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1.$$

Областью определения $D(A_{\alpha,\beta})$ оператора $A_{\alpha,\beta}$ есть все пространство L_p, $p \in [1,\infty)$. Отметим также, что при $\alpha,\beta \in L_1 \cap L_2$ и $x \in L_2$ оператор $A_{\alpha,\beta}$ есть оператор $A^- + A^+$ из [1].

3. Некоторые сведения из теории банаховых $L_1(\mathbb{R})$-модулей. Будем изучать свойства операторов A_α и $A_{\alpha,\beta}$. В рассматриваемом случае $\alpha, \beta \in L_1$ это удобнее сделать, привлекая теорию банаховых $L_1(\mathbb{R})$-модулей, элементы которой мы и изложим в этом разделе. Будем, кроме работ [10, 23, 27, 28], также использовать результаты из [13, 14, 24].

Определение 3.1. Комплексное банахово пространство $\mathcal{X}$ называется невырожденным банаховым $L_1(\mathbb{R})$-модулем, если задано билинейное отображение $(f, x) \mapsto fx : L_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, обладающее следующими свойствами:

(i) $(ab)x = a(bx)$, a, $b \in L_1$, $x \in \mathcal{X}$;
(ii) $\|ax\| \leqslant \|a\|_1 \|x\|$, $a \in L_1$, $x \in \mathcal{X}$;
(iii) если $ax = 0$ для всех $a \in L_1$, то $x = 0$.

Невырожденный банахов $L_1(\mathbb{R})$-модуль называется также гармоничным пространством или пространством Винера—Банаха.

Определение 3.2. Отображение $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$ называется представлением группы $\mathbb{R}$ операторами из $\operatorname{End} \mathcal{X}$, если $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$. Представление $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$ называется сильно непрерывным, если каждая функция вида

$$\tau_x : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}, \quad \tau_x(t) = T(t)x, \quad x \in \mathcal{X},$$

непрерывна, и изометрическим, если

$$\|T(t)x\| = \|x\| \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Одним из стандартных представлений является оператор сдвига функции

$$S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}, \quad (S(s)x)(t) = x(t+s), \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Оно является изометрическим и сильно непрерывно при $\mathcal{X} = L_p$, $p \in [1, \infty)$. Далее в качестве представления мы будем рассматривать именно оператор сдвига функций.

Определение 3.3. Модульная структура на $\mathcal{X}$ ассоциирована с представлением $S : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$, если для всех $f \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{R}$, имеют место равенства

$$S(t)(fx) = (S(t)f)x = f(S(t)x).$$

Обычно пишут вместо $\mathcal{X}$ пару $(\mathcal{X}, S)$. Это подчеркивает, что модульная структура на $\mathcal{X}$ ассоциирована с представлением S. Формула

$$T(f)x = fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)S(-\tau)x\,d\tau, \quad f \in L_1, \quad x \in \mathcal{X},$$

определяет на $\mathcal{X} = L_p$, $p \in [1,\infty)$, структуру банахова $L_1(\mathbb{R})$-модуля, ассоциированного с представлением S.

Далее нам понадобятся определение и свойства спектра Бёрлинга элементов банахова модуля.

Определение 3.4. Пусть $(\mathcal{X}, S)$ — банахов $L_1(\mathbb{R})$-модуль и Y — некоторое подмножество из $\mathcal{X}$. Спектр Бёрлинга $\lambda(Y) = \Lambda(Y, S)$ определяется формулой

$$\Lambda(Y,S) = \Big\{\lambda \in \mathbb{R} : \text{ равенство } fx = 0 \text{ для всех } x \in Y \text{ означает } \widehat{f}(\lambda) = 0,\ f \in L_1\Big\}.$$

Если $x \in \mathcal{X}$, то

$$\Lambda(x) = \Big\{\lambda \in \mathbb{R} : \ fx \neq 0 \text{ для любой } f \in L_1 \text{ такой, что } \widehat{f}(\lambda) \neq 0\Big\}.$$

Отметим, что спектр Бёрлинга можно рассматривать как обобщение понятия носителя. Так, если $\mathcal{X} = L_2$, то $\Lambda(x, S) = \operatorname{supp} \widehat{x}$.

Известные свойства спектра Бёрлинга удобно сформулировать в виде леммы. В ней через $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$ обозначено некоторое представление (не обязательно S), которое вначале не предполагается изометрическим.

Лемма 3.1 (см. [10]). *Пусть $(\mathcal{X}, T)$ — банахов $L_1(\mathbb{R})$-модуль. Имеют место следующие свойства*:

(i) $\Lambda(Y)$ *замкнуто для любого подмножества* $Y \subseteq \mathcal{X}$;

(ii) $\Lambda(Y) = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $Y = \{0\}$;

(iii) $\Lambda(Ax + By) \subseteq \Lambda(x) \cup \Lambda(y)$ *для любых* $A, B \in \operatorname{End} \mathcal{X}$, *перестановочных со всеми* $T(f)$, $f \in L_1(\mathbb{R})$;

(iv) $\Lambda(fx) \subseteq (\operatorname{supp} \widehat{f}) \cap \Lambda(x)$ *для* $f \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$;

(v) $fx = 0$, *если* $(\operatorname{supp} \widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \varnothing$ *для* $f \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$;

(vi) $fx = x$, *если* $\Lambda(x)$ — *компакт и* $\widehat{f} = 1$ *в некоторой окрестности множества* $\Lambda(x)$.

Отметим, что последние два свойства из предыдущей леммы могут быть усилены дляизометрического представления T.

Лемма 3.2 (см. [13, лемма 3.7.32]). *Пусть $(\mathcal{X}, T)$ — банахов $L_1(\mathbb{R})$-модуль и представление T является изометрическим. Тогда для $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{X}$ справедливы следующие утверждения*:

(v′) $fx = 0$, *если* $(\operatorname{supp} \widehat{f}) \cap \Lambda(x)$ *счетно и* $\widehat{f}(\lambda) = 0$ *для всех* $\lambda \in (\operatorname{supp} \widehat{f}) \cap \Lambda(x)$;

(vi′) $fx = x$, *если* $\Lambda(x)$ — *компакт со счетной границей и* $\widehat{f} = 1$ *на* $\Lambda(x)$.

Приведем еще одну лемму из [14].

Лемма 3.3 (см. [14, лемма 2]). *Пусть $\mathcal{X}$ — банахов B-модуль. Тогда для любого элемента $a \in B$ спектр $\sigma(A)$ оператора $Ax = ax : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ совпадает с множеством $\widehat{a}(\Lambda(x))$.*

4. Основные результаты.

Вернемся к операторам A_α и $A_{\alpha,\beta}$.

Лемма 4.1. *Операторы инволюции и свертки неперестановочны. Операторы инволюции и сдвига неперестановочны.*

Доказательство. Пусть $f \in L_1$, $g \in L_p$. Тогда $f * g \in L_p$ и

$$(J(f * g))(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(-t - \tau)\, d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(-t - \tau) g(\tau)\, d\tau, \quad (f * Jg)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t + u) g(u)\, du,$$

$$(JSx)(t) = x(-t + s), \quad (SJx)(t) = x(-t - s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

□

Следствие 4.1. *Если $f \in L_1$ — четная функция и $g \in L_p$, то*

$$(J(f * g))(t) = (f * Jg)(t).$$

Непосредственной проверкой доказывается следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Операторы A_α перестановочны между собой и с операторами сдвига S. Операторы A_α неперестановочны с операторами инволюции.*

Из леммы 3.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Имеют место следующие свойства.*

(i) *Ядро* $\operatorname{Ker} A_\alpha$ *оператора* A_α *состоит из таких* $x \in L_p$, $p \in [1, \infty)$, *что* $(\operatorname{supp} \widehat{\alpha}) \cap \Lambda(x) = \varnothing$.

(ii) $\Lambda(A_\alpha x) \subset \Lambda(x) \cap (\operatorname{supp} \widehat{\alpha})$, $x \in L_p$.

(iii) *Если* $x \in L_2$, *то* $\operatorname{Ker} A_\alpha$ *состоит из таких* $x \in L_2$, *что* $(\operatorname{supp} \widehat{\alpha}) \cap (\operatorname{supp} \widehat{x}) = \varnothing$.

(iv) *В пространстве* L_2 *оператор* A_α *самосопряжен, если* $\alpha(-t) = \overline{\alpha(t)}$, $t \in \mathbb{R}$.

Применив к оператору A_α лемму 3.3, получим следующее утверждение.

Лемма 4.4. *Спектр $\sigma(A_\alpha)$ оператора A_α совпадает с замыканием множества* $\operatorname{Im}\widehat{\alpha}$.

Отметим, что результаты леммы 4.4 аналогичны формуле для спектра оператора A^- из [1–7] при $\alpha \in L_1 \cap L_2$. Также заметим, что свойство (iv) леммы 4.3, касающееся самосопряженности оператора A_α, полностью идентично соответствующему свойству для оператора A^- из [1–7]. Оно также означает, что оператор A^- (или A_α) является в этом случае оператором с ядром Карлемана.

Заметим также, что к оператору $A_\beta J$ лемма 4.4 неприменима.

Лемма 4.5. *Пусть $|\lambda| > \|\alpha\|_1$. Тогда оператор $A_\alpha - \lambda I$ обратим и имеет место формула*

$$(A_\alpha - \lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{A_\alpha^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Пусть $|\lambda| > \|\beta\|_1$. Тогда оператор $A_\beta J - \lambda I$ обратим и

$$(A_\beta J - \lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(A_\beta J)^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Лемма 4.6. *Операторы $A_{\alpha,\beta}$ образуют банахову подалгебру $\mathcal{M} \in \operatorname{End} L_p$, $A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'} = A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, где*

$$\widetilde{\alpha} = \alpha * \alpha' + \beta * J\beta', \quad \widetilde{\beta} = \alpha * \beta' + \beta * J\alpha'.$$

Доказательство. Имеем

$$A_{\alpha,\beta} - A_{\alpha',\beta'} = (A_\alpha + A_\beta J)(A_{\alpha'} + A_{\beta'} J) = A_\alpha A_{\alpha'} + A_\beta J A_{\beta'} J + A_\alpha A_\beta J + A_\beta J A_{\alpha'}.$$

Теперь каждое слагаемое рассмотрим отдельно. Очевидно, что

$$(A_\alpha A_{\alpha'} x)(t) = A_\alpha\left(\int_{\mathbb{R}} \alpha'(t-\tau)x(\tau)\,d\tau\right) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \alpha(t-\tau)\alpha'(\tau-u)\,d\tau\, x(u)\,du,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha(t-\tau)\alpha'(\tau-u)\,d\tau = \widetilde{\alpha}(t-u), \quad (A_\alpha A_{\alpha'} x)(t) = (A_{\widetilde{\alpha}_1} x)(t),$$

где $\widetilde{\alpha}_1 = \alpha * \alpha'$. Аналогично,

$$(A_\beta J A_{\alpha'} x)(t) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \beta(-t-\tau)\alpha'(-\tau-u)x(u)\,du\,d\tau = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\beta}_1(t+u)x(u)\,du,$$

где

$$\widetilde{\beta}_1(t+u) = \int_{\mathbb{R}} \beta(t+z+u)\alpha'(z)\,dz,$$

т.е. $\widetilde{\beta}_1 = \beta * J_{\alpha'}$. Остальные слагаемые рассматриваются аналогично. □

Отметим, что операторы A_α образуют в $\mathcal{M}$ замкнутую подалгебру (без единицы), а операторы $A_\beta J$ подалгебры не образуют.

Перейдем к нахождению спектра оператора $A_{\alpha,\beta} : L_2 \to L_2$. Пусть F — оператор, осуществляющий преобразование Фурье функции $x \in L_2$, $Fx = \widehat{x}$. Положим $A_{\alpha,\beta}x = F^{-1}\widehat{A}_{\alpha,\beta}Fx$, $x \in L_2$, где $\widehat{A}_{\alpha,\beta} : L_2 \to L_2$ — линейный ограниченный оператор, действующий по формуле $\widehat{A}_{\alpha,\beta}y = \widehat{\alpha}y + \widehat{\beta}Jy$, $y \in L_2$. Каждой функции $y \in L_2$ поставим в соответствие пару функций $\overline{y} = (y_+, y_-)$, где $y_\pm(\lambda) = y(\pm\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Пусть $Uy = \overline{y}$, где $U : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$. Оператор U является унитарным. Введем оператор

$$B_{\alpha,\beta} : L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) \to L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2), \quad B_{\alpha,\beta} = UFA_{\alpha,\beta}F^{-1}U^{-1}.$$

Лемма 4.7. *Оператор $A_{\alpha,\beta}$ подобен оператору $B_{\alpha,\beta}$ вида*

$$B\overline{y}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}(\lambda) & \widehat{\beta}(\lambda) \\ \widehat{\beta}(-\lambda) & \widehat{\alpha}(-\lambda) \end{pmatrix} \overline{y}(\lambda) = Q(\lambda)\overline{y}(\lambda),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathbb{C}^2$.

Лемма проверяется непосредственным вычислением.

Лемма 4.8. $\sigma(A_{\alpha,\beta}) = \sigma(B)$, $\sigma(B) = \overline{\operatorname{Ran} \delta_1 \cup \operatorname{Ran} \delta_2}$, *где*

$$\delta_{1,2}(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\widehat{\alpha}(\lambda) + \widehat{\alpha}(-\lambda) \pm \left((\widehat{\alpha}(\lambda) - \widehat{\alpha}(-\lambda))^2 + 4\widehat{\beta}(\lambda)\widehat{\beta}(-\lambda)\right)^{1/2}\right).$$

Отметим, что представленная выше замена $Uy = \overline{y}$, $y \in \mathcal{X}$, использовалась также в [21] в спектральном анализе интегральных операторов с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов, а также в [16, 22] для перехода от дифференциального оператора первого порядка с инволюцией к оператору Дирака.

Применим также формулу для резольвенты оператора A^- к оператору $A_\alpha : L_2 \to L_2$, $\alpha \in L_1 \cap L_2$, из [2, 3]. Тогда

$$(R_{A_\alpha} y)(u) = -\frac{y(u)}{\lambda} + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\alpha(u-\tau)}{\alpha(u-\tau) - \lambda} y(\tau)\, d\tau.$$

Согласно [2, 3] отсюда следует, что R_{A_α} не является интегральным оператором; он является пределом интегральных операторов с полукарлемановскими ядрами.

5. Интегральные и разностные операторы с инволюцией. Интересна аналогия между операторами $A_{\alpha,\beta}$ и разностными операторами специального вида.

Пусть $l_p = l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, $p \in [1, \infty)$, — пространство двусторонних комплексных последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^p\Big)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty), \quad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|.$$

Пространство l_2 является гильбертовым со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\overline{y(n)};$$

норма порождается этим скалярным произведением. Пространство l_∞ является алгеброй с поточечным умножением $(xy)(n) = x(n)y(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, x, $y \in l_\infty$.

Стандартная (или простейшая) инволюция в любом банаховом пространстве с двусторонним базисом $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ задается формулой $(Jx)(n) = x(-n)$, где $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e_n x(n)$.

Для любой последовательности $\alpha \in l_\infty$ определим оператор $A_\alpha \in \operatorname{End} l_p$, $p \in [1, \infty)$, формулой

$$A_\alpha x = \alpha x, \quad (A_\alpha x)(n) = \alpha(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, $\|A_\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_\infty$. Определим также оператор $A_{\alpha,\beta}$, α, $\beta \in l_1$, следующим образом:

$$A_{\alpha,\beta} x = \alpha x + \beta J x, \quad x \in l_p, \quad p \in [1, \infty).$$

Оператор $A_{\alpha,\beta}$ действует по формуле

$$(A_{\alpha,\beta} x)(n) = \alpha(n)x(n) + \beta(n)x(-n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_p, \quad p \in [1, \infty),$$

и в стандартном базисе пространства l_p имеет разреженную матрицу $A_{\alpha,\beta} \sim (a_{ij})$, где $a_{ii} = \alpha(i)$, $a_{i,-i} = \beta(i)$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a_{00} = \alpha(0) + \beta(0)$, а остальные элементы нулевые. Множество таких операторов $A_{\alpha,\beta}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}$. Очевидно, что

$$I = A_{e,0} = eI + 0J \in \widetilde{\mathcal{M}}, \quad J = A_{0,e} = 0I + eJ \in \widetilde{\mathcal{M}}.$$

Здесь символом $e \in l_\infty$ обозначена такая последовательность, что $e(n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, $\|e\|_\infty = 1$, и символом 0 — нулевая последовательность, т.е. $0(n) = 0$ для всех n.

Лемма 5.1. *Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ является наполненной банаховой подалгеброй в* $\operatorname{End} l_p$, $p \in [1, \infty)$, *с единицей.*

Напомним, что наполненность подалгебры означает, что любой обратимый в $\operatorname{End} l_p$ элемент из $\widetilde{\mathcal{M}}$ обратим также и в $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Таким образом, между операторами $A_{\alpha,\beta}$ в l_p и $A_{\alpha,\beta}$ в L_p прослеживается аналогия. Оба класса операторов образуют подалгебры в банаховых алгебрах соответствующих ограниченных линейных операторов. Только в случае разностных операторов эта подалгебра наполненная.

Также (см. [11]) обратим внимание на формулу

$$A_{\alpha,\beta} A_{\alpha',\beta'} = A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}},$$

для разностных операторов, где

$$\widetilde{\alpha} = \alpha\alpha' + \beta' J\beta, \quad \widetilde{\beta} = \alpha\beta' + \beta J\alpha',$$

которая аналогична соответствующей формуле для интегральных операторов $A_{\alpha,\beta}$.

Известно (см. [22]), что для разностных операторов из $\operatorname{End} l_p$, $p \in [1, \infty)$, спектр оператора не зависит от пространства l_p, $p \in [1, \infty)$, поэтому спектральные свойства таких операторов обычно исследуются в l_2.

Лемма 5.2. *Спектр оператора* $A_{\alpha,\beta} \in \operatorname{End} l_p$, $p \in [1, \infty)$, $\alpha, \beta \in l_\infty$, *есть замыкание множества чисел*

$$\Big\{\alpha(0) + \beta(0),\ \frac{1}{2}\Big(\alpha(n) + \alpha(-n) \pm \big(\alpha(n) - \alpha(-n)\big)^2 + 4\beta(n)\beta(-n)\Big)^{1/2}\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Подчеркнем аналогию между леммой 5.2 и леммой 4.8, касающейся формул для спектра разностного и интегрального оператора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров Е. Л.* О спектральных функциях одного интегрального оператора с ядром Карлемана// Изв. вузов. Мат. — 1969. — № 7. — С. 3–12.
2. *Александров Е. Л., Кириченко Б. И.* Интегральные операторы Карлемана с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов// Сиб. мат. ж. — 1977. — *18*, № 1. — С. 3–22.
3. *Александров Е. Л., Кириченко Б. И.* О спектральных функциях интегральных операторов Карлемана с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов// Сиб. мат. ж. — 1978. — *19*, № 6. — С. 1219–1231.
4. *Александров Е. Л., Кириченко Б. И.* Характеристические свойства (SC)-операторов с ядрами, зависящими от разности аргументов// Сиб. мат. ж. — 1979. — *20*, № 5. — С. 931–941.
5. *Александров Е. Л.* Характеристические свойства полукарлемановских операторов с ядрами вида $k(x-y) + h(x+y)$// Мат. заметки. — 1984. — *36*, № 2. — С. 189–200.
6. *Александров Е. Л.* Спектральные свойства операторов с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов// Изв. вузов. Мат. — 1991. — *8*. — С. 3–8.
7. *Александров Е. Л.* Спектральные функции самосопряженных и симметрических операторов умножения в пространствах $L^2(X, \mu)$// Мат. заметки. — 2000. — *67*, № 6. — С. 803–810.
8. *Андреев А. А., Шиндин И. П.* О корректности граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных с отклоняющимся аргументом// в кн.: Аналитические методы в теории дифференциальных и интегральных уравнений. — Куйбышев: КГУ, 1987. — С. 3–6.
9. *Андреев А. А., Огородников Е. Н.* О корректности начальных краевых задач для одного гиперболического уравнения с вырождением порядка и инволютивным отклонением// Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2000. — № 9. — С. 32–36.
10. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — *69*, № 3. — С. 3–54.
11. *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральные свойства разностных операторов с инволюцией// Тр. Междунар. науч. конф. ББАктуальные проблемы прикладной математики, информатики и механикиЮЮ (Воронеж, 4-6 декабря 2023 г.). — Воронеж: ВГУ, 2023. — С. 7–11.
12. *Баскаков А. Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 1997. — *61*, № 6. — С. 3–26.

13. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов// Совр. мат. Фундам. напр. — 2004. — *9*. — С. 3–151.
14. *Баскаков А. Г.* Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе// Сиб. мат. ж. — 1979. — *20*, № 5. — С. 942–952.
15. *Бурлуцкая М. Ш.* Вопросы спектральной теории для операторов с инволюцией и приложения. — Воронеж: Научная книга, 2020.
16. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией// Докл. РАН. — 2007. — *414*, № 4. — С. 443–446.
17. *Владыкина В. Е., Шкаликов А. А.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией// Докл. РАН. — 2019. — *484*, № 1. — С. 12–17.
18. *Карапетянц Н. К., Самко С. Г.* Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1988.
19. *Крицков Л. В., Сарсенби А. М.* Базисность Рисса системы корневых функций для операторов второго порядка с инволюцией// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 35–48.
20. *Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — *16*. — С. 1091–1132.
21. *Пальчиков А. Н.* Спектральный анализ интегральных операторов с ядром, зависящим от разности и суммы аргументов// Изв. вузов. Мат. — 1990. — № 3. — С. 80–83.
22. *Хромов А. П., Кувардина Л. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией// Изв. вузов. Мат. — 2008. — № 5. — С. 67–76.
23. *Baskakov A. G., Krishtal I. A.* Memory estimation of inverse operators// J. Funct. Anal. — 2014. — *267*. — P. 2551–2605.
24. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* Closed operator functional calculus in Banach modules and applications// J. Math. Anal. Appl. — 2020. — *492*, № 2. — 124473.
25. *Carleman P.* Sur la théorie des équations intégrales lineaires et ses applications// Verh. Int. Math.-Kongr. — 1932. — *1*. — P. 138–151.
26. *Carleman T.* Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique. — Uppsala Univ. Årsskrift, 1923.
27. *Loomis L. H.* An Introduction of Abstract Harmonic Analysis. — Toronto–New York–London: Van Nostrand, 1953.
28. *Reiter H., Stegeman J. D.* Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups. — Oxford–London: Oxford Univ. Press, 2000.
29. *Schreiber M.* Semi-Carleman operators// Acta Sci. Math. — 1963. — *24*. — P. 82–86.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баскаков Анатолий Григорьевич
Воронежский государственный университет
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валериевна
Воронежский государственный педагогический университет
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Ускова Наталья Борисовна
Воронежский государственный технический университет
E-mail: nat-uskova@mail.ru