



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 232 (2024). С. 50–69  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-50-69

УДК 517.956.32

## ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ РИМАНА РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

© 2024 г.    Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ

**Аннотация.** Известным методом Римана и новым методом компенсации граничного режима правой частью уравнения получены формулы Римана единственного и устойчивого классического решения первой смешанной задачи для линейного общего неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. Из постановки смешанной задачи, определения классических решений и установленного критерия гладкости правой части уравнения выведен её критерий корректности по Адамару. Этот критерий корректности состоит из требований гладкости и трёх условий согласования правой части уравнения, граничного и начальных данных. Подтверждена справедливость полученных формул Римана и критерия корректности тем, что доказано их совпадение с известными формулами классического решения и критерием корректности для модельного телеграфного уравнения.

**Ключевые слова:** первая смешанная задача, телеграфное уравнение, неявная характеристика, глобальная теорема корректности, требование гладкости, условие согласования.

## GENERALIZED RIEMANN FORMULAS FOR THE SOLUTION OF THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE GENERAL TELEGRAPH EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN THE FIRST QUADRANT

© 2024    F. E. LOMOVTSSEV

**ABSTRACT.** Using the well-known Riemann method and a new method for compensating the boundary regime with the right-hand side of the equation, we obtain the Riemann formulas for the unique and stable classical solution of the first mixed problem for a linear general inhomogeneous telegraph equation with variable coefficients in the first quadrant. From the formulation of the mixed problem, the definition of classical solutions, and the established criterion for the smoothness of the right-hand side of the equation, we obtain a criterion of the well-posedness in the Hadamard sense. This criterion consists of smoothness requirements and three conditions for matching the right-hand side of the equation and the boundary and initial data. The validity of the Riemann formulas and the well-posedness criterion is confirmed by their coincidence with the well-known formulas of the classical solution and the well-posedness criterion for the model telegraph equation.

**Keywords and phrases:** first mixed problem, telegraph equation, implicit characteristic, global correctness theorem, smoothness condition, consistency condition.

**AMS Subject Classification:** 35A09, 35L20

---

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф22КИ-001 от 05.11.2021 г.).

**1. Введение.** В настоящей работе впервые явно решена и полностью изучена корректность по Адамару (существование, единственность и устойчивость) первой смешанной задачи для линейного общего неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости для классических решений. Выведены обобщенные формулы типа Римана её единственного и устойчивого классического решения и установлен критерий (необходимые и достаточные условия) её корректности во множестве классических решений (теорема 3.1). Этот критерий корректности состоит из требований гладкости на правую часть уравнения, граничное и начальные данные и трёх условий согласования граничного режима с начальными условиями и уравнением. В настоящей статье (теорема 4.1) с помощью вычисленной функции Римана доказано, что в случае модельного телеграфного уравнения эти обобщенные формулы типа Римана и критерий корректности первой смешанной задачи из теоремы 3.1 совпадают с уже известными результатами из статьи [5]. В ней ранее автором настоящей работы были получены явные формулы классического решения, часть критерия корректности и доказана теорема существования единственного и устойчивого классического решения первой смешанной задачи для общего неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. В теореме 3.1 настоящей работы вывод полного критерия корректности на правую часть телеграфного уравнения с переменными коэффициентами использует критерий корректности из [15, 16]. Результаты из [5] и настоящей работы нами распространены «методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» (см. [6]) на первую смешанную задачу для модельного и общего телеграфных уравнений с переменными коэффициентами в полуполосе плоскости в статьях [17, 18].

В работе автора [5] обобщались результаты кандидатской диссертации [1], в которой первая смешанная задача для однородного уравнения в полуполосе плоскости, периодическими продолжениями исходных данных задачи и коэффициентов уравнения при соответствующих предположениях на них заменяется задачей Коши для него в верхней полуплоскости. Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для более общего ( $a_1 \neq a_2$ ) волнового уравнения на отрезке, но с постоянными коэффициентами имеется в [7]. В этой статье введено понятие глобальных теорем корректности линейных краевых задач и с помощью леммы Цорна доказана теорема (см. [7, теорема 1]) о существовании их глобальных теорем корректности. Глобальными называются теоремы корректности краевых задач с критериями (необходимыми и достаточными условиями) их корректности по Адамару. Теорема 1 из [7] утверждает: каждая корректно поставленная линейная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных имеет глобальную теорему её корректной разрешимости по Адамару в соответствующей паре локально выпуклых топологических векторных пространств.

Результаты настоящей работы обобщают работы [3, 12–14], в которых рассматривалась первая смешанная задача для простейшего ( $a = \text{const} > 0$ ,  $b = c = 0$ ,  $q = q(x)$ ) телеграфного уравнения (2.1). В диссертации [14] установлены необходимые и достаточные условия на начальные данные и только достаточные условия на правую часть уравнения для классического решения первой смешанной задачи. Согласно [3, 7] необходимые условия  $f(0, t) = f(\pi, t) = 0$ ,  $t \in [0, T]$ , на правую часть  $f(x, t) \in C(\overline{Q})$  уравнения колебаний струны из [14] являются лишь одними из достаточных (необязательных) условий корректности первой смешанной задачи. Здесь одними из необходимых (обязательных) условий служат условия согласования  $f(0, 0) = f(\pi, 0) = 0$  правой части  $f$  с нулевыми начальными и граничными данными. В статьях [12, 13] для волнового уравнения найдена формула и необходимые и достаточные условия на начальные данные для обобщенного (почти классического) решения смешанной задачи, предполагая его единственность. Это решение удовлетворяет уравнению почти всюду по  $x$  и  $t$ .

**2. Постановка основной первой смешанной задачи.** В первой четверти  $\dot{G}_\infty$  решить и вывести критерий корректности первой смешанной задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x, t) \equiv u_{tt}(x, t) - a^2(x, t)u_{xx}(x, t) + b(x, t)u_t(x, t) + c(x, t)u_x(x, t) + \\ + q(x, t)u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \dot{G}_\infty = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \quad (2.2)$$

$$u|_{x=0} = \mu(t), \quad t > 0, \quad (2.3)$$

где коэффициенты уравнения  $a, b, c, q$  — вещественные функции и исходные данные задачи  $f, \varphi, \psi, \mu$  — заданные функции своих переменных  $x$  и  $t$ . Количеством нижних индексов функций мы обозначаем порядки их соответствующих частных производных.

Пусть  $C^k(\Omega)$  — множество  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве  $\Omega$ ,  $C(\Omega)$  — множество непрерывных функций на  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^2$  — плоскость.

**Определение 2.1.** Классическим решением смешанной задачи (2.1)–(2.3) называется непрерывная ограниченная функция с непрерывными и ограниченными первыми и вторыми частными производными на  $G_\infty = [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ , т.е.  $u \in C^2(G_\infty)$ , удовлетворяющая уравнению (2.1) на  $\dot{G}_\infty$  в обычном смысле, а начальным условиям (2.2) и граничному режиму (2.3) в смысле значений пределов  $u(\dot{x}, \dot{t})$  и её производной  $u_i(\dot{x}, \dot{t})$  по  $\dot{t}$  во внутренних точках  $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , стремящихся к соответствующим граничным точкам  $(x, t)$ .

Требуется найти в явном виде классическое решение  $u \in C^2(G_\infty)$  первой смешанной задачи (2.1)–(2.3) на  $\dot{G}_\infty$  и установить критерий корректности на правую часть  $f$ , начальные  $\varphi, \psi$  и граничное  $\mu$  данные для ее однозначной везде разрешимости.

Из постановки этой смешанной задачи и определения 2.1 её классических решений сразу вытекают следующие необходимые условия гладкости исходных данных:

$$f \in C(G_\infty), \quad \varphi \in C^2[0, +\infty[, \quad \psi \in C^1[0, +\infty[, \quad \mu \in C^2[0, +\infty[. \quad (2.4)$$

Ниже в теореме 3.1 возьмем дополнительные необходимые и достаточные требования гладкости (3.1) на  $f \in C(G_\infty)$  из [15, 16], где ищутся классические решения неоднородного модельного телеграфного уравнения с минимальной гладкостью правой части.

Полагая  $t = 0$  соответственно в граничном режиме (2.3), первой и второй производных по  $t$  от граничного режима (2.3), с помощью начальных условий (2.2) при  $x = 0$  и уравнения (2.1) при  $x = t = 0$  выводим необходимые условия согласования:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \mu(0), \quad \psi(0) = \mu'(0), \\ S &\equiv f(0, 0) + a^2(0, 0)\varphi''(0) - b(0, 0)\psi(0) - c(0, 0)\varphi'(0) - q(0, 0)\varphi(0) = \mu''(0). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Количеством штрихов над функциями одной переменной мы обозначаем порядки их обыкновенных производных по этой переменной.

Уравнение (2.1) на  $G_\infty$  имеет характеристические дифференциальные уравнения

$$dx = (-1)^i a(x, t) dt, \quad i = 1, 2, \quad (2.6)$$

которым в плоскости  $\mathbb{R}^2$  переменных  $x$  и  $t$  соответствуют два различных семейства неявных характеристик  $g_i(x, t) = C_i, C_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ . Если коэффициент  $a(x, t) \geq a_0 > 0, (x, t) \in G_\infty$ , то переменная  $t$  на характеристике  $g_1(x, t) = C_1, C_1 \in \mathbb{R}$ , строго убывает, а на характеристике  $g_2(x, t) = C_2, C_2 \in \mathbb{R}$ , строго возрастает вместе с ростом  $x$  в правой плоскости  $Oxt$ . Поэтому у неявных функций  $y_i = g_i(x, t), x \geq 0, t \geq 0$ , существуют явные строго монотонные обратные функции  $x = h_i\{y_i, t\}, t \geq 0$ , и  $t = h^{(i)}[x, y_i], x \geq 0, i = 1, 2$ , для которых на  $G_\infty$  выполняются следующие тождества обращения из статьи [5]:

$$g_i(h_i\{y_i, t\}, t) = y_i, \quad t \geq 0, \quad h_i\{g_i(x, t), t\} = x, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

$$g_i(x, h^{(i)}[x, y_i]) = y_i, \quad x \geq 0, \quad h^{(i)}[x, g_i(x, t)] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.8)$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} = x, \quad x \geq 0, \quad h^{(i)}[h_i\{y_i, t\}, y_i] = t, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.9)$$

Если коэффициент  $a \in C^2(G_\infty)$ , то функции  $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2$  по  $x, t, y_i, i = 1, 2$ , на  $G_\infty$  (см. [1]).

**Замечание 2.1.** В случае  $a(x, t) = a = \text{const} > 0$  ими служат функции  $g_1(x, t) = x + at, g_2(x, t) = x - at, h_1\{y_1, t\} = y_1 - at, h_2\{y_2, t\} = y_2 + at, h^{(1)}[x, y_1] = (y_1 - x)/a, h^{(2)}[x, y_2] = (x - y_2)/a$  (см. [10]).

**Определение 2.2.** Характеристика  $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$ , в которой  $a(x, t) \geq a_0 > 0, (x, t) \in G_\infty$ , называется критической для уравнения (2.1) в первой четверти плоскости  $G_\infty$ .

Критическая характеристика разбивает четверть плоскости  $G_\infty$  на два множества

$$G_- = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) > g_2(0, 0)\}, \quad G_+ = \{(x, t) \in G_\infty : g_2(x, t) \leq g_2(0, 0)\}.$$

На этих множествах первая смешанная задача (2.1)–(2.3) может иметь разные единственные согласованные классические решения и критерии корректности по Адамару. В отличие от смешанных (начально-граничных) задач, в задаче Коши обычно нет условий согласования.

**3. Исследование корректности основной смешанной задачи.** Если в уравнении (2.1) продолжить функцию  $a(x, t)$  чётным образом на  $x < 0$ , то характеристики  $g_i(x, t) = C_i$ ,  $i = 1, 2$ , будут заданы на верхней полуплоскости  $\tilde{G}$  плоскости  $Oxt$ .

Обобщенные формулы Римана классического решения и критерий корректности описаны в следующей теореме.

**Теорема 3.1** (см. [19]). Пусть  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty$ ,  $a \in C^2(G_\infty)$ ,  $b, c, q \in C^1(G_\infty)$ . Первая смешанная задача (2.1)–(2.3) в области  $\dot{G}_\infty$  имеет единственное и устойчивое по  $\varphi, \psi, f, \mu$  классическое решение  $u \in C^2(G_\infty)$  тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости (2.4),

$$H_i(x, t) \equiv \int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x, t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

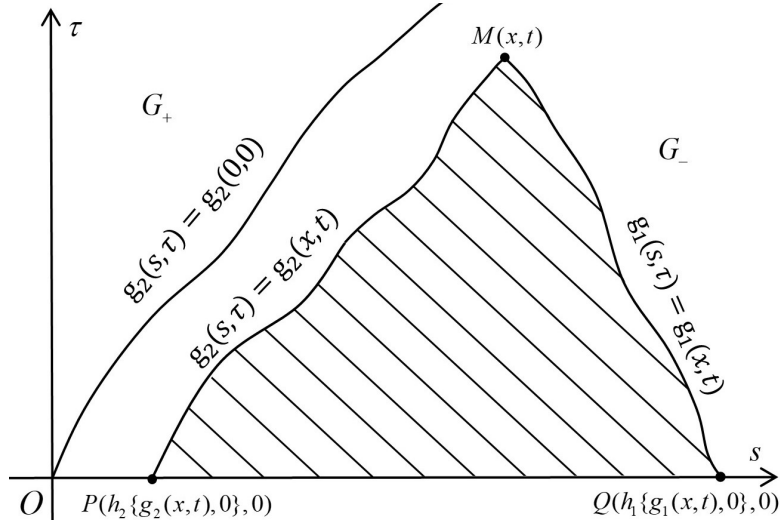
и условия согласования (2.5). Классическим решением задачи (2.1)–(2.3) в  $\dot{G}_\infty$  является функция

$$\begin{aligned} u_-(x, t) = & \frac{(auv)(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) + (auv)(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)}{2a(x, t)} + \\ & + \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)] ds + \\ & + \frac{1}{2a(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} f(s, \tau)v(s, \tau; x, t) ds, \quad (x, t) \in G_-, \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_+(x, t) = & \frac{(auv)(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0) - (auv)(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\}, 0)}{2a(x, t)} + \\ & + \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]\}, 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)] ds + \\ & + \frac{1}{2a(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \check{f}(|s|, \tau)v(|s|, \tau; |x|, t) ds + \mu(t) - \\ & - \frac{1}{2a(0, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(0, t), \tau\}} \check{f}(|s|, \tau)v(|s|, \tau; 0, t) ds, \quad (x, t) \in G_+, \quad (3.3) \end{aligned}$$

где  $\check{f}(x, t) = f(x, t) - f_\mu(x, t) + f^{(0)}(x, t)$ ,  $f_\mu(x, t) = \mathcal{L}\mu(t)$ ,  $f^{(0)}(x, t)$  – сужение на  $G_\infty$  решения системы (3.27) интегрального уравнения Вольтерра второго рода и соответствующего линейного алгебраического уравнения, а функции Римана  $v(s, \tau) = v(s, \tau; x, t)$  – классические решения задач Гурса (3.10), (3.13) в  $G_-$  и (3.20), (3.21) в  $G_+$ .

**Доказательство. Достаточность.** Сначала выведем формулы (3.2) и (3.3) формального решения задачи (2.1)–(2.3) на  $G_-$  и  $G_+$ . Затем установим его дважды непрерывную дифференцируемость, единственность и устойчивость в нормах (3.29) и (3.30).

Рис. 1. Криволинейный характеристический треугольник  $\triangle MPQ$  в  $G_-$ .

1. Множество  $G_-$ . Уравнение (2.1) для любых функций  $u \in C^2(G_-)$  умножаем на любые функции  $v \in C^2(G_-)$  и, используя очевидные равенства

$$\begin{aligned} u_{tt}v &= (u_tv)_t - u_tv_t = (u_tv)_t - (uv_t)_t + uv_{tt}, \\ a^2u_{xx}v &= (u_xa^2v)_x - u_x(a^2v)_x = (u_xa^2v)_x - (u(a^2v)_x)_x + u(a^2v)_{xx}, \\ bu_tv &= (ubv)_t - u(bv)_t, \quad cu_xv = (ucv)_x - u(cv)_x, \end{aligned}$$

приходим к тождеству

$$(\mathcal{L}u)v - u(\mathcal{M}v) = \frac{\partial H(u, v)}{\partial t} + \frac{\partial K(u, v)}{\partial x} \quad \forall u, v \in C^2(G_-), \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}v &= v_{tt}(x, t) - (a^2(x, t)v(x, t))_{xx} - (b(x, t)v(x, t))_t - (c(x, t)v(x, t))_x + q(x, t)v(x, t), \\ H(u, v) &= u_tv - u v_t + buv = (uv)_t - u[2v_t - bv], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$K(u, v) = -u_xa^2v + u(a^2v)_x + cuv = -(a^2uv)_x + u[2(a^2v)_x + cv]. \quad (3.6)$$

Дифференциальный оператор  $\mathcal{M}$ , который является сопряженным оператором к оператору  $\mathcal{L}$  в смысле численнозначных распределений Шварца  $\mathcal{D}'(G_-)$  (см. [2, 22]), обычно называют формально сопряженным оператором к оператору  $\mathcal{L}$ . В силу левой ориентации плоскости  $O\tau s$  на рис. 1 по известной формуле Грина двойной интеграл от тождества (3.4) по характеристическому треугольнику  $\triangle MPQ$  в  $G_-$  с любой вершиной  $M(x, t) \in G_-$  и вершинами его основания  $P(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$  и  $Q(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)$  равен

$$\int_{\triangle MPQ} [(\mathcal{L}u)v - u(\mathcal{M}v)] ds d\tau = \int_{\triangle MPQ} \left[ \frac{\partial H(u, v)}{\partial \tau} + \frac{\partial K(u, v)}{\partial s} \right] ds d\tau = \int_{l^+} [K(u, v)d\tau - H(u, v)ds], \quad (3.7)$$

где  $l^+ = QM \cup MP \cup PQ$  — контур криволинейного треугольника  $\triangle MPQ$  с положительным направлением обхода.

В криволинейном интеграле (3.7) с помощью выражений (3.5), (3.6), дифференциального уравнения характеристики из (2.6) при  $i = 1$  и очевидных равенств

$$(uv)_\tau a = (auv)_\tau - a_\tau uv, \quad (a^2uv)_s(1/a) = (auv)_s - a^2uv(1/a)_s = (auv)_s + a_s uv$$

вычисляем интеграл вдоль характеристики  $QM$  уравнения  $g_1(s, \tau) = g_1(x, t)$ :

$$\begin{aligned}
& \int_Q^M [K(u, v) d\tau - H(u, v) ds] = \\
& = \int_Q^M [(u v)_\tau a d\tau + (a^2 u v)_s (1/a) ds] + \int_Q^M \left( u[2v_\tau - bv] ds + u[2(a^2 v)_s + cv] d\tau \right) = \\
& = \int_Q^M d(a u v) + \int_Q^M \left( u[2v_\tau + (a_s - b)v] ds + u[2(a^2 v)_s + (c - a_\tau)v] d\tau \right) = \\
& = (a u v)(M) - (a u v)(Q) - \int_0^t u \{ 4a v_\tau - [ab - 4a_\tau + c]v \} d\tau. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Здесь на характеристике  $QM$  при  $i = 1$  мы воспользовались характеристическим дифференциальным уравнением из (2.6) и для функций  $w \in C^1(G_\infty)$  новым представлением из

$$w_s(s, \tau) = (-1)^i \frac{w_\tau(s, \tau)}{a(s, \tau)}, \quad i = 1, 2.$$

Поскольку на каждой из характеристик  $QM$  и  $MP$  переменные  $s = s_i(\tau)$ ,  $\tau = \tau_i(s)$  являются взаимно зависимыми, т.е. соответственно при  $i = 1$  и  $i = 2$  переменные  $s = h_i\{g_i(x, t), \tau\}$ ,  $\tau = h^{(i)}[s, g_i(x, t)]$  согласно формулам обращения (2.7)–(2.9), то эти представления вытекают из очевидных формул первых частных производных:

$$\begin{aligned}
w_s(s, \tau(s)) &= w_s(s, \tau)|_{\tau=\tau(s)} + w_\tau(s, \tau)|_{\tau=\tau(s)} \tau'(s) = w_s(s, \tau)|_{\tau=\tau(s)} + (-1)^i w_\tau(s, \tau)|_{\tau=\tau(s)} / a(s, \tau), \\
w_\tau(s(\tau), \tau) &= w_\tau(s, \tau)|_{s=s(\tau)} + w_s(s, \tau)|_{s=s(\tau)} s'(\tau) = w_\tau(s, \tau)|_{s=s(\tau)} + (-1)^i w_s(s, \tau)|_{s=s(\tau)} a(s, \tau),
\end{aligned}$$

так как  $\tau'(s) = (-1)^i / a(s, \tau)$ ,  $s'(\tau) = (-1)^i a(s, \tau)$ ,  $i = 1, 2$ , также ввиду формул (2.6). В последнем равенстве (3.8) для сведения криволинейного интеграла второго типа вдоль  $QM$  к обыкновенному определенному интегралу мы применили параметрическое представление кривой  $QM$ :  $s = s_1(\tau) = h_1\{g_1(x, t), \tau\}$ ,  $\tau = \tau$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ .

Используя характеристическое уравнение из (2.6) при  $i = 2$ , в (3.7) аналогично берем интеграл вдоль характеристики  $MP$  с уравнением  $g_2(s, \tau) = g_2(x, t)$ :

$$\begin{aligned}
& \int_M^P [K(u, v) d\tau - H(u, v) ds] = \\
& = - \int_M^P [(u v)_\tau a d\tau + (a^2 u v)_s (1/a) ds] + \int_M^P \left( u[2v_\tau - bv] ds + u[2(a^2 v)_s + cv] d\tau \right) = \\
& = - \int_M^P d(a u v) + \int_M^P \left( u[2v_\tau - (a_s + b)v] ds + u[2(a^2 v)_s + (c + a_\tau)v] d\tau \right) = \\
& = (a u v)(M) - (a u v)(P) - \int_0^t u \{ 4a v_\tau - [ab - 4a_\tau - c]v \} d\tau. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Здесь при  $i = 2$  мы применили характеристическое дифференциальное уравнение из (2.6) и указанное выше представление  $w_s(s, \tau) = w_\tau(s, \tau) / a(s, \tau)$ . В последнем равенстве из (3.9) для сведения криволинейного интеграла второго типа вдоль характеристики  $MP$  к обыкновенному

определенному интегралу мы также воспользовались параметрическим представлением кривой  $MP$ :  $s = s_2(\tau) = h_2\{g_2(x, t), \tau\}$ ,  $\tau = \tau$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ .

Пусть функция  $v(s, \tau) = v(s, \tau; x, t)$  с параметрами  $(x, t)$  является классическим решением однородного формально сопряженного дифференциального уравнения

$$\mathcal{M}v(s, \tau) = 0, \quad (s, \tau) \in \triangle MPQ, \quad (3.10)$$

с условиями на характеристиках  $QM$  и  $MP$ :

$$\begin{aligned} 4a(s, \tau)v_\tau(s, \tau) - [a(s, \tau)b(s, \tau) - 4a_\tau(s, \tau) + c(s, \tau)]v(s, \tau) &= 0, \\ 4a(s, \tau)v_\tau(s, \tau) - [a(s, \tau)b(s, \tau) - 4a_\tau(s, \tau) - c(s, \tau)]v(s, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

соответственно из определенных интегралов в (3.8) и (3.9) и условием согласования

$$v(M) = 1. \quad (3.12)$$

Условия (3.11), (3.12)) равносильны двум уже согласованным условиям Гурса

$$\begin{aligned} v(s, \tau) &= \exp \left\{ \int_t^\tau k_1(h_1\{g_1(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_1(s, \tau) = g_1(x, t), \\ v(s, \tau) &= \exp \left\{ \int_t^\tau k_2(h_2\{g_2(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_2(s, \tau) = g_2(x, t), \quad \tau \in [0, t], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} k_1(s, \tau) &= \{a(s, \tau)b(s, \tau) - 4a_\tau(s, \tau) + c(s, \tau)\}/4a(s, \tau) \quad \text{на кривой } QM, \\ k_2(s, \tau) &= \{a(s, \tau)b(s, \tau) - 4a_\tau(s, \tau) - c(s, \tau)\}/4a(s, \tau) \quad \text{на кривой } MP. \end{aligned}$$

Общеизвестно, что задача Гурса (3.10), (3.13) с коэффициентами  $a \in C^2(G_-)$ ,  $b, c, q \in C^1(G_-)$  всегда имеет единственное классическое решение  $v \in C^2(G_- \cap \triangle MPQ)$ , которое общепринято называть функцией Римана для задачи Коши (2.1), (2.2) на  $G_-$ . В общем случае функция Римана однозначно находится методом последовательных приближений (см. [11, с. 129–135]).

В формуле (3.7) полагаем  $\mathcal{L}u(s, \tau) = f(s, \tau)$ ,  $\mathcal{M}v(s, \tau) = 0$  на треугольнике  $\triangle MPQ$ , и в силу соотношений (3.10)–(3.13) согласно (3.8) и (3.9) получаем формулу решения

$$\begin{aligned} u_-(x, t) &= \frac{(auv)(P) + (auv)(Q)}{2a(x, t)} + \frac{1}{2a(x, t)} \int_P^Q [H(u, v) ds - K(u, v) d\tau] + \\ &\quad + \frac{1}{2a(x, t)} \int_{\triangle MPQ} f(s, \tau) v(s, \tau; x, t) ds d\tau, \quad (x, t) \in G_-. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь в интеграле по отрезку  $PQ$ , где  $a \in C^2(G_-)$ ,  $b, c \in C^1(G_-)$  и  $d\tau = 0$ , подынтегральные функции  $H$  и  $K$  однозначно определяются начальными условиями (2.2) (см. рис. 1). Если ещё двойной интеграл по треугольнику  $\triangle MPQ$  записать в виде повторных интегралов, то в (3.14) сумма этих двух интегралов будет равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)] ds + \\ + \frac{1}{2a(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} f(s, \tau) v(s, \tau; x, t) ds, \quad (x, t) \in G_-. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Первое слагаемое из (3.14) содержит значения

$$u(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) = \varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\}), \quad u(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0) = \varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\}).$$

Формула (3.14) с интегралами (3.15) вместо двух последних интегралов становится формулой (3.2), которая обобщает формулу Римана из [11, с. 139] со скорости  $a = 1$  на скорость  $a(x, t)$  волны на полупрямой  $x \geq 0$  носителя данных  $\varphi$  и  $\psi$ .

Теперь убедимся в дважды непрерывной дифференцируемости функции (3.2) на  $G_-$ . Если коэффициенты  $a \in C^2(G_-)$ ,  $b \in C^1(G_-)$ , то требований  $\varphi \in C^2[0, +\infty[$ ,  $\psi \in C^1[0, +\infty[$  из (2.4) достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости первых двух слагаемых с интегралом по отрезку  $PQ$  в (3.2) на  $G_-$ , так как существует единственная функция Римана  $v \in C^2(G_- \cap \triangle MPQ)$  (см. [11, с. 129–135]. Для  $f \in C(G_\infty)$  достаточность гладкости (3.1) для дважды непрерывной дифференцируемости на  $G_-$  последнего интеграла в (3.2) следует, например, из достаточности требований (3.1) на  $f$  для существования единственного классического решения задачи Коши (2.1), (2.2) на  $G_-$  в теореме 2 из [5].

2. Множество  $G_+$ . Пусть  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{q}$ ,  $\hat{f}$  — чётные продолжения и  $\tilde{c}$  — нечётное продолжение по  $x$  коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $q$  и правой части  $f$  уравнения (2.1) на все  $x < 0$ . В верхней полуплоскости  $\tilde{G} = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  ищем решение  $\tilde{u}$  задачи Коши

$$\hat{\mathcal{L}} \tilde{u}(x, t) \equiv \tilde{u}_{tt} - \hat{a}^2(x, t) \tilde{u}_{xx} + \hat{b}(x, t) \tilde{u}_t + \tilde{c}(x, t) \tilde{u}_x(x, t) + \hat{q}(x, t) \tilde{u} = \hat{f}(x, t), \quad (x, t) \in \tilde{G}, \quad (3.16)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[, \quad (3.17)$$

где  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$  — нечётные продолжения соответственно  $\varphi \in C^2[0, +\infty[$ ,  $\psi \in C^1[0, +\infty[$  на  $x < 0$ ,

$$\hat{f}(x, t) = \hat{f}(x, t) - \hat{f}_\mu(x, t) + \hat{f}^{(0)}(x, t), \quad \hat{\mathcal{L}}\mu(t) = \hat{f}_\mu(x, t)$$

и правило выбора чётной по  $x$  функции  $\hat{f}^{(0)}(x, t)$  будет указано ниже. Если  $f \in C(G_\infty)$ , то, очевидно,  $\hat{f} \in C(\tilde{G})$ . В формуле решения  $u_+$  первой смешанной задачи (2.1)–(2.3) этих продолжений не будет.

Если из обеих частей уравнения (3.16) вычесть слагаемое  $\tilde{c}(x, t) \tilde{u}_x(x, t)$ , то придём к уравнению вида (3.16) с коэффициентом  $\tilde{c}(x, t) \equiv 0$  и новой правой частью

$$\hat{f}(x, t) = \hat{f}(x, t) - \tilde{c}(x, t) \tilde{u}_x(x, t) \in C(G_\infty),$$

в котором вычитаемое  $c(x, t)u_x(x, t) \in C^1(G_\infty)$  непрерывно дифференцируемо и поэтому оно удовлетворяет интегральным требованиям гладкости (3.1) на  $G_\infty$ . Благодаря линейности этой задачи Коши её решение представимо в виде суммы  $\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}_0(x, t) + \tilde{u}_1(x, t)$  решения  $\tilde{u}_0$  задачи Коши (3.16), (3.17) при  $\hat{f} = 0$ ,  $\tilde{\varphi} \neq 0$ ,  $\tilde{\psi} \neq 0$  и решения  $\tilde{u}_1$  задачи Коши (3.16)–(3.17) при  $\hat{f} \neq 0$ ,  $\tilde{\varphi} \equiv 0$ ,  $\tilde{\psi} \equiv 0$ . Первая задача Коши на  $G_\infty$  с граничным режимом (2.3) при  $\mu = 0$  становится первой смешанной задачей (2.1)–(2.3) на  $G_\infty$ . С одной стороны, по теореме 2 статьи [5] существует единственное классическое решение  $\tilde{u}_0 \in C^2(G_\infty)$  этой первой смешанной задачи (2.1)–(2.3) на  $G_\infty$ . Первая задача Коши на  $G_\infty$  равносильна этой первой смешанной задаче на  $G_\infty$ , так как решение первой задачи Коши по формуле (4) из [20], т.е. по формуле (3.2) из теоремы 3.1, но с крышками над  $a$ ,  $b$ ,  $v$ , равно  $\tilde{u}_0(0, t) = 0$ ,  $t \geq 0$  (см. [11, с. 68–69]. Ниже перед леммой 3.1 показано, что характеристические треугольники  $\triangle MPQ$  с вершинами  $M(0, t)$ ,  $t \geq 0$ , на оси  $Ot$  являются «криволинейными» равнобедренными. Следовательно, вершины  $P$  и  $Q$  основания  $PQ$  треугольника  $\triangle MPQ$  симметричны относительно оси  $Ot$ , начальные данные  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{\psi}$  нечётны по  $x$ , функции  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{v}$  чётны по  $s$  и поэтому первые два слагаемых в (3.2) обращаются в ноль. Третье слагаемое в формуле (3.2) вида двойного повторного интеграла по  $\triangle MPQ$  при  $f = \hat{f} = 0$  тоже равно нулю.

Из условий согласования (2.5) при  $\tilde{c} \equiv 0$ ,  $\hat{f} = 0$ ,  $\mu = 0$  для  $\tilde{u}_0$  на  $G_\infty$  выводим условия

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0, \quad \psi(0) = 0. \quad (3.18)$$

Известно, что начальные данные  $\varphi \in C^2[0, +\infty[$ ,  $\psi \in C^1[0, +\infty[$  с условиями (3.18) всегда допускают на  $x < 0$  гладкие нечётные продолжения  $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$ . Это следует из [1, лемма 1]. Действительно, из нечётности по  $x$  продолжений  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\psi}$  следует их непрерывность при  $x = 0$ , так как  $\varphi(0) = 0$ ,  $\psi(0) = 0$  в (3.18). Производные  $\tilde{\varphi}'(x)$ ,  $\tilde{\psi}'(x)$  от этих нечётных начальных данных чётны и, следовательно, непрерывны при  $x = 0$ . Непрерывность второй производной  $\tilde{\varphi}''(x)$  при

$x = 0$  обеспечивает её нечётность по  $x$  и значение  $\varphi''(0) = 0$  из (3.18). Поэтому, с другой стороны, первая задача Коши для уравнения (3.16)) с  $\tilde{c} \equiv 0$  и  $\hat{f} \equiv 0$  при начальных данных  $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$  в (3.17) на  $\tilde{G}$  имеет единственное решение  $\tilde{u}_0 \in C^1(\tilde{G})$  (см. [20]). Действительно, нечётная по  $x$  функция  $\tilde{u}_0(x, t)$  непрерывна на  $\tilde{G}$ , так как  $\tilde{u}_0(0, t) = 0$ , и чётная по  $x$  её производная  $(\tilde{u}_0)_x(x, t)$  всегда непрерывна на  $\tilde{G}$ . Для сокращения доказательства теоремы 3.1 можно было бы положить коэффициент  $\tilde{c} \equiv 0$  в (3.16).

Другая задача Коши при  $\hat{f} \neq 0$ ,  $\tilde{\varphi} \equiv 0$ ,  $\tilde{\psi} \equiv 0$  на  $\tilde{G}$ , очевидно, имеет единственным классическим решением двойной интеграл  $\hat{u}_1(x, t) = \hat{F}(x, t) \in C^2(G_\infty)$  из [20] при  $f = \hat{f}$ :

$$\hat{F}(x, t) = \frac{1}{2\hat{a}(x, t)} \int_{\triangle MPQ} \hat{f}(s, \tau) \hat{v}(s, \tau) ds d\tau = \frac{1}{2\hat{a}(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \hat{f}(s, \tau) \hat{v}(s, \tau) ds,$$

удовлетворяющий однородным начальным данным  $\tilde{\varphi} = 0$ ,  $\tilde{\psi} = 0$ , потому что этот двойной интеграл и его первая производная по  $t$  при  $t = 0$  равны  $\hat{F}(x, 0) = 0$ ,  $\hat{F}_t(x, 0) = 0$ . Чётность по  $x$  этого интеграла  $\hat{F}$  подтверждается чётностью по  $x$  коэффициента  $\hat{a}$ , чётностью по  $s$  его подинтегральной функции и равнобедренностью «криволинейных» характеристических треугольников  $\triangle MPQ$  с вершинами  $M(0, t)$ ,  $t \geq 0$ , на оси  $Ot$ . Ниже в лемме 3.1 будет показана чётность по  $s$  функции Римана  $\hat{v} = \hat{v}(s, \tau)$  на  $\tilde{G}$ . Таким образом, четное по  $x$  решение  $\hat{u}_1(x, t) = \hat{F}(x, t)$  всегда непрерывно по  $x$  на  $\tilde{G}$ , т.е.  $\hat{u}_1 \in C(G_\infty)$ . Более того, согласно теореме 2 из [5] при  $\varphi = \psi = 0$ ,  $\mu(t) = \hat{F}(0, t) \in C^2[0, +\infty[$  решение  $\hat{F}$  дважды непрерывно дифференцируемо в первой четверти  $\hat{u}_1(x, t) = \hat{F}(x, t) \in C^2(G_\infty)$ , а в силу его четности по  $x$  и во второй четверти плоскости (см. ниже предисловие к замечанию 3.1). Здесь применение теоремы 2 на  $G_\infty$  из [5] основано на справедливости не только первых двух, но и третьего условия согласования из (2.5) при  $\varphi = \psi = 0$ ,  $f = \hat{f} \neq 0$ ,  $c \neq 0$  и  $\mu \neq 0$ , а также интегральных требований гладкости (3.1) на  $f$ . От переноса слагаемого  $\tilde{c}\tilde{u}_x$  из левой части уравнения (3.16) в его правую часть это уравнение фактически не меняется. В дальнейшем мы увидим, что на гладкость правой части  $f$  уравнения (2.1) дополнительные слагаемые  $-f_\mu$ ,  $f^{(0)}$  правой части  $\hat{f}$  уравнения (3.16) фактически не влияют, потому что в процессе решения смешанной задачи (2.1)–(2.3) нашим новым методом компенсации они сокращаются (аннулируются).

В итоге, мы нашли суммарное решение  $\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}_0(x, t) + \hat{u}_1(x, t) \in C(\tilde{G})$ ,  $C^2(G_\infty)$  вспомогательной задачи Коши (3.16), (3.17) на  $\tilde{G}$ . Отсюда и из чётности по  $x$  продолжений коэффициентов  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{q}$  и правой части  $\hat{f}$  на все  $x < 0$  также следует, что во второй четверти плоскости это классическое решение  $\tilde{u} \in C^2(\tilde{G} \setminus G_\infty)$  (см. ниже замечание 3.2).

Интегрируя аналог тождества (3.4) для любых  $\tilde{u}$ ,  $\hat{v} \in C^2(G_\infty)$ ,  $C^2(\tilde{G} \setminus G_\infty)$ ,  $C(\tilde{G})$  по треугольнику  $\triangle MPQ$  с любой вершиной  $M(x, t) \in G_+$  в верхней полуплоскости  $Ost$ , мы имеем аналог формулы (3.4) решения задачи Коши (3.16), (3.17):

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) = & \frac{(\hat{a}\tilde{u}\hat{v})(P) + (\hat{a}\tilde{u}\hat{v})(Q)}{2\hat{a}(x, t)} + \frac{1}{2\hat{a}(x, t)} \int_P^Q [H(\tilde{u}, \hat{v}) ds - K(\tilde{u}, \hat{v}) d\tau] + \\ & + \frac{1}{2\hat{a}(x, t)} \int_{\triangle MPQ} \hat{f}(s, \tau) \hat{v}(s, \tau; x, t) ds d\tau, \quad (x, t) \in \tilde{G} = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В силу единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2) на  $G_-$  функция (3.19) на  $G_-$  равна классическому решению (3.2). Аналогично множеству  $G_-$  в криволинейном интеграле по  $PQ$  формулы (3.19) подынтегральные функции  $H$  и  $K$  однозначно определяются начальными данными  $\tilde{\varphi} \in C^2(\tilde{G})$ ,  $\tilde{\psi} \in C^2(\tilde{G})$  и функцией Римана  $\hat{v}$  (см. рис. 2).

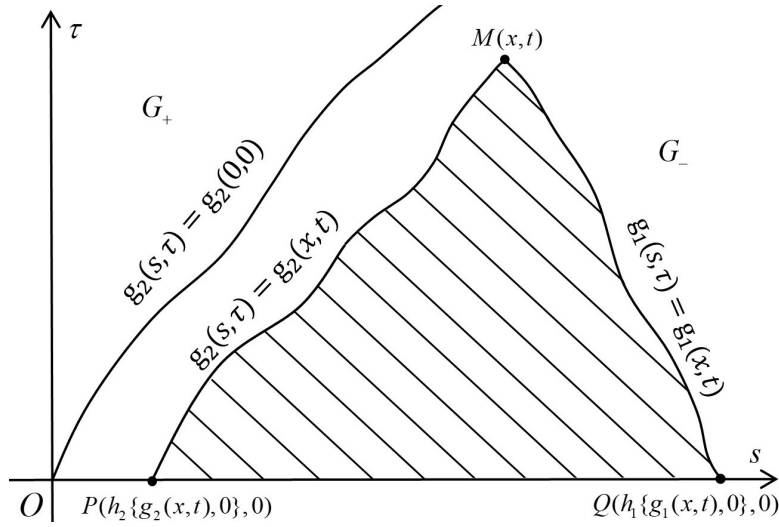


Рис. 2. Криволинейные характеристический и критический треугольники  $\triangle MPQ$  и  $\triangle Q'PP'$  в  $\tilde{G}$ .

Эта функция Римана на  $G_\infty$  является решением задачи Гурса:

$$\widehat{M}\hat{v}(s, \tau) \equiv \hat{v}_{\tau\tau}(s, \tau) - (\hat{a}^2(s, \tau)\hat{v}(s, \tau))_{ss} - (\hat{b}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau))_{\tau\tau} - (\hat{c}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau))_s + \hat{q}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau) = 0, \quad (s, \tau) \in \triangle MPQ, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \hat{v}(s, \tau) &= \exp \left\{ \int_t^\tau \tilde{k}_1(h_1\{g_1(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_1(s, \tau) = g_1(x, t), \\ \hat{v}(s, \tau) &= \exp \left\{ \int_t^\tau \tilde{k}_2(h_2\{g_2(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_2(s, \tau) = g_2(x, t), \quad \tau \in [0, t], \end{aligned} \quad (3.21)$$

аналогичной задаче Гурса (3.10), (3.13) и с функциями  $\tilde{k}_1(s, \tau)$  на кривой  $QM$  и  $\tilde{k}_2(s, \tau)$  на кривой  $MP$ , соответственно равными функциям  $k_1(s, \tau)$  и  $k_2(s, \tau)$ , в которых коэффициенты  $a, b, q$  заменены на их четные продолжения  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{q}$ , а коэффициент  $c$  — на нечетное продолжение  $\tilde{c}$  по  $x$  с  $x \geq 0$  на  $x < 0$ . Формально сопряженный дифференциальный оператор  $\widehat{M}$  равен оператору  $M$  с коэффициентами  $\hat{a}, \hat{b}, \tilde{c}, \hat{q}$  вместо коэффициентов  $a, b, c, q$ . Задача Гурса (3.20), (3.21) имеет единственное решение  $\hat{v}(s, \tau) = \hat{v}(s, \tau; x, t)$ , непрерывное на  $\tilde{G}$  и дважды непрерывно дифференцируемое на  $G_\infty$  (см. [11, с. 129–135] (см. ниже замечание 3.2).

Ввиду (2.6) в каждой фиксированной точке  $M(x, t)$  тангенсы углов наклона касательных прямых к характеристикам двух семейств  $g_i(x, t) = C_i$ ,  $i = 1, 2$ , отличаются лишь противоположными знаками  $dx/dt = (-1)^i a(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ , в силу чётности продолжения  $\hat{a}$  по  $x$ . Следовательно, для любых вершин  $M(0, t)$ ,  $t > 0$ , на оси  $O\tau$ , треугольники  $\triangle MPQ$  и, в частности, треугольники  $\triangle Q'PP'$  являются криволинейными «равнобедренными». Поэтому на рис. 2 характеристики  $g_2(s, \tau) = C_2$  и  $g_1(s, \tau) = C_1$  при  $s < 0$  соответственно симметричны характеристикам  $g_1(s, \tau) = C_1$  и  $g_2(s, \tau) = C_2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , при  $s > 0$  относительно оси  $O\tau$ .

Покажем, что функция Римана  $\hat{v} = \hat{v}(s, \tau)$  является чётной по  $s$  функцией в  $\tilde{G}$ .

**Лемма 3.1.** Пусть выполняются предположения теоремы 3.1. Тогда для любой вершины  $M(x, t) \in G_+$  характеристического треугольника  $\triangle MPQ$  решение  $\hat{v}(s, \tau) = \hat{v}(s, \tau; x, t)$  задачи Гурса (3.20), (3.21) на  $\triangle MPQ$  является чётной по  $s$  функцией.

*Доказательство.* Главные дифференциальные части общего телеграфного уравнения (3.16) и его формально сопряженного уравнения (3.20), а ниже также модельного телеграфного уравнения (4.1) и его формально сопряженного уравнения одинаковые. Поэтому им соответствуют одни

и те же дифференциальные уравнения характеристик (2.6) и, значит, одинаковые семейства характеристик  $g_i(x, t) = C_i$ ,  $C_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , в  $\tilde{G}$ .

Для любой точки  $M(x, t) \in G_+$  строим характеристический треугольник  $\triangle \tilde{M}P'\tilde{P}$  с симметричной относительно оси  $O\tau$  вершиной  $\tilde{M}(-x, t) \in \tilde{G}$ , вершинами основания  $P'(-h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$ ,  $\tilde{P}(h_2\{g_2(-x, t), 0\}, 0)$  и криволинейными сторонами  $g_1(s, \tau) = g_1(-x, t)$ ,  $g_2(s, \tau) = g_2(-x, t)$  (см. рис. 2). Докажем симметричность криволинейного треугольника  $\triangle \tilde{M}P'\tilde{P}$  треугольнику  $\triangle MPQ$  относительно оси  $O\tau$  строго математически. Визуально это очевидно из рис. 2. Симметричность этих треугольников относительно  $O\tau$  не вызывает сомнений только для прямых характеристик, так как в этом случае симметричность вершины  $\tilde{P}$  вершине  $Q$  вытекает из замечания 2.1, а вершина  $P'$  очевидно симметрична вершине  $P$  и для кривых характеристик.

Во-первых, из указанной выше «равнобедренности» криволинейных треугольников с вершинами на оси  $O\tau$ ,  $\tau > 0$ , следует взаимозаменяемость уравнений сторон-характеристик таких треугольников семейства  $g_2(s, \tau) = C_2$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}$ , на характеристики семейства  $-g_1(-s, \tau) = C_1$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}$ , и уравнений сторон-характеристик семейства  $g_1(s, \tau) = C_1$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}$ , на характеристики семейства  $-g_2(-s, \tau) = C_2$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}$ , в верхней полуплоскости  $\tilde{G}$ . Характеристику  $MP$  уравнения  $g_2(s, \tau) = g_2(x, t)$  ищем в виде  $-g_1(-s, \tau) = C_1$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}$ . Подставляем сюда координаты точки  $M(x, t)$  и находим значение постоянной  $-g_1(-s, \tau) = C_1 = -g_1(-x, t)$ . Отсюда для характеристик  $MP$ ,  $\tilde{M}P'$  соответственно имеем два уравнения

$$g_1(-s, \tau) = g_1(-x, t), \quad g_1(s, \tau) = g_1(-x, t),$$

из которых вытекает равенство  $g_1(-s, \tau) = g_1(s, \tau)$ ,  $s \geq 0$ , т.е. чётность по  $s$  функции  $g_1$ . Иначе говоря, характеристика  $\tilde{M}P'$  симметрична характеристике  $MP$  относительно оси  $O\tau$  в  $\tilde{G}$  (см. рис. 2). Согласно уравнениям характеристик  $MQ$  и  $\tilde{M}\tilde{P}$  существуют их продолжения до пересечения с осью  $O\tau$ . Если характеристику  $MQ$  уравнения  $g_1(s, \tau) = g_1(x, t)$  искать в виде  $-g_2(-s, \tau) = C_2$ , то подставляя сюда координаты точки  $M(x, t)$ , имеем значение постоянной  $-g_2(-s, \tau) = C_2 = -g_2(-x, t)$ . Поэтому для характеристик  $MQ$  и  $\tilde{M}\tilde{P}$  соответственно имеем два уравнения

$$g_2(-s, \tau) = g_2(-x, t), \quad g_2(s, \tau) = g_2(-x, t).$$

Из них следует равенство  $g_2(-s, \tau) = g_2(s, \tau)$ ,  $s \geq 0$ , т.е. чётность по  $s$  функции  $g_2$ . Итак, характеристика  $\tilde{M}\tilde{P}$  симметрична характеристике  $MQ$  относительно оси  $O\tau$  в  $\tilde{G}$  (см. рис. 2). В итоге, мы обосновали чётность по  $s$  характеристик уравнения (3.20) на  $\tilde{G}$ :

$$g_1(-s, \tau) = g_1(s, \tau), \quad g_2(-s, \tau) = g_2(s, \tau), \quad s, \tau \geq 0. \quad (3.22)$$

Во-вторых, в (3.21) нечётность  $\tilde{c}$  по  $s$  меняет знак слагаемого в  $\tilde{c}(s, \tau)$  из  $\tilde{k}_1$  на противоположный для выражения  $-\tilde{c}(s, \tau)$  из  $\tilde{k}_2$  и наоборот. Взаимная чётность по  $s$  одной из функций  $\tilde{k}_1$ ,  $\tilde{k}_2$ , указанных после (3.13) (см. уравнения (3.11) и (3.21), по отношению к другой из них, вытекает из чётности  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{q}$ , нечётности  $\tilde{c}$  по  $s$  в (3.21) и чётности по  $s$  характеристик (3.22) на  $\tilde{G}$ :

$$\tilde{k}_1(-s, \tau) = \tilde{k}_2(s, \tau), \quad \tilde{k}_2(-s, \tau) = \tilde{k}_1(s, \tau), \quad (s, \tau) \in \triangle MPQ. \quad (3.23)$$

Из симметрии характеристик  $\tilde{M}\tilde{P}$ ,  $\tilde{M}P'$  соответственно характеристикам  $MQ$ ,  $MP$  относительно оси  $O\tau$  ввиду (3.22) и (3.23) имеем чётность по  $s$  данных Гурса (3.21).

В-третьих, известен факт: производная от нечётной (чётной) функции является (чётной) нечётной функцией. Если функция  $\hat{v}$  чётна по  $s$ , то в уравнении (3.20) дифференциальный оператор  $\hat{M}$  чётен по  $s$  на верхней полуплоскости  $\tilde{G}$  относительно оси  $O\tau$ , так как его коэффициенты  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{q}$  чётны, коэффициент  $\tilde{c}$  нечётен по  $s$  на  $\tilde{G}$  и

$$\begin{aligned} (\tilde{c}(-s, \tau)\hat{v}(-s, \tau))_s &= \tilde{c}_s(-s, \tau)\hat{v}(-s, \tau) + \tilde{c}(-s, \tau)\hat{v}_s(-s, \tau) = \\ &= \tilde{c}_s(s, \tau)\hat{v}(-s, \tau) - \tilde{c}(s, \tau)\hat{v}_s(-s, \tau) = \tilde{c}_s(s, \tau)\hat{v}(s, \tau) + \tilde{c}(s, \tau)\hat{v}_s(s, \tau) = \\ &= (\tilde{c}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau))_s, \quad s > 0, \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Чётность по  $s$  уравнения (3.20) и данных Гурса (3.21) влечёт чётность по  $s$  единственного достаточно гладкого решения задачи Гурса (3.20), (3.21). Отсутствие чётности решения задачи Гурса (3.20), (3.21) во внутренних точках из  $\triangle MPQ$  и на основании  $PQ$  противоречит чётности

по  $s$  уравнения (3.20), а на боковых сторонах  $MP$  и  $MQ$  — установленной чётности по  $s$  данных Гурса (3.21).  $\square$

На рис. 2 в критическом треугольнике  $\triangle Q'PP'$  уравнениями пунктирной линии  $Q'P'$ , симметричной куску характеристики  $Q'P$  относительно оси  $O\tau$ , очевидно, служат уравнения

$$g_1(s, \tau) = g_1(-x, t), \quad s = h_1\{g_1(-x, t), \tau\}.$$

Существуют другие равносильные уравнения кривой  $Q'P'$  в терминах  $g_1$  и  $h_1$ . В плоскости  $Ost$  неявное уравнение  $g_1(s, \tau) = g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)])$ , конечно, описывает кривую  $Q'P'$ , проходящую через точку  $Q'$  (см. рис. 2). Таким образом, по определению обратной функции кривая  $Q'P'$  также задается явным уравнением

$$s = h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), \tau\}, \quad 0 \leq \tau \leq h^{(2)}[0, g_2(x, t)]. \quad (3.24)$$

Отсюда мы находим другой вид тех же координат точек  $P'(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0)$  и  $P(-h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0)$ .

Выше показано, что функция (3.19) является решением  $\tilde{u} \in C(\tilde{G}), C^2(G_\infty), C^2(\tilde{G} \setminus G_\infty)$  задачи Коши (3.16), (3.17), а функция Римана  $\hat{v} \in C(\tilde{G}), C^2(G_\infty)$  — чётным по  $s$  решением задачи Гурса (3.20), (3.21) на  $\tilde{G}$  (см. [11, с. 129–135]). Из её чётности по  $s$  следует  $\hat{v} \in C^2(\tilde{G} \setminus G_\infty)$ . Из решения (3.19) задачи Коши на  $\tilde{G}$  выведем решение смешанной задачи (2.1)–(2.3) на  $G_\infty$ .

В формуле (3.19) за счёт нечетности начального данного  $\tilde{\varphi}$  и чётности произведения  $\hat{a}\hat{v}$  по  $s$  значение произведения  $\hat{a}\tilde{u}\hat{v}$  в точке  $P$  равно его значению в симметричной точке  $P'$  относительно оси  $O\tau$ , взятому с противоположным знаком. Поэтому согласно (3.24) первое слагаемое из (3.21) совпадает с первым слагаемым формулы (3.3), в котором берутся значения функции

$$\tilde{u}(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0) = \varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\}), \quad \tilde{u}(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) = -\varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}),$$

т.е. в первом слагаемом из (3.3) подразумевается значение функции

$$\tilde{u}(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0) = \varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}).$$

В формуле (3.19) интеграл по основанию  $PQ$  треугольника равен сумме трёх интегралов по отрезкам  $PO$ ,  $OP'$  и  $P'Q$ , первые два из которых сокращаются из-за нечетности обоих начальных данных  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ , чётности по  $s$  коэффициентов  $\hat{a}, \hat{b}$  и, согласно обоснованной выше лемме 3.1, чётности по  $s$  функции Римана  $\hat{v}$ . Таким образом, интеграл по  $PQ$  формулы (3.19) при  $d\tau = 0$  равен интегралу по  $P'Q$  от  $H(\tilde{u}, \hat{v})$  и, следовательно, второе слагаемое из (3.19) становится вторым слагаемым из (3.3) благодаря координатам точки  $P'$  из (3.24). Сужением на  $G_\infty$  последнего слагаемого из (3.19) с двойным интегралом имеем следующее слагаемое, за указанными выше, решения (3.3), так как двойной интеграл по треугольнику  $\triangle MPQ$  из (3.19) совпадает с двойным повторным интегралом от произведения правой части  $\check{f}$  уравнения (3.16) на функцию Римана  $v$  с модулем  $|s|$  их первой переменной  $s$ . В нём вместо двойного интеграла по треугольнику  $\triangle Q'PP'$  от произведения функций  $\check{f}$  и  $v$  фактически дважды берётся двойной интеграл по треугольнику  $\triangle Q'O P'$  из  $G_+$  благодаря их четности по  $s$ .

Существование единственного классического решения  $\check{u}$  задачи (2.1)–(2.3) на  $G_\infty$  и  $G_+$  взято из теоремы 2 статьи [5], где для него обоснована достаточность гладкости на  $\varphi, \psi, f, \mu$  из (2.4), (3.1). В доказательстве теоремы 2 из [5] о корректности задачи (2.1)–(2.3) для общего телеграфного уравнения (2.1) используются теорема 1 из [5] для модельного телеграфного уравнения (см. ниже (4.1)), обобщение метода продолжения по параметру Шаудера (см. [4, 8, 21]) и теоремы повышения гладкости сильных решений из [8]. Метод продолжения по параметру основан на том, что линейное общее телеграфное уравнение (2.1) отличается от линейного модельного телеграфного уравнения (4.1) младшими членами, т.е. слагаемыми с первыми производными  $u_t, u_x$  и  $u$ . Поэтому при коэффициентах  $a \in C^2(G_\infty), b, c, q \in C^1(G_\infty)$  гладкости (2.4), (3.1) на  $\varphi, \psi, f$  хватает для дважды непрерывной дифференцируемости решения (3.19) задачи Коши (3.16), (3.17) и первых трех слагаемых из (3.3) на  $G_+$  при  $x \geq 0$ , так как функция Римана  $\hat{v}$  тоже дважды непрерывно дифференцируема на  $G_+$  при  $x \geq 0$  (см. [11, с. 129–135] (см. ниже замечание 3.2). В формуле (3.3) классического решения нашей задачи на  $G_+$  отсутствуют значения продолжений  $\hat{a}, \hat{b}, \tilde{c}, \hat{q}, \check{f}$  для  $x < 0$ , потому что эти продолжения оказались формальными благодаря знаку модуля  $|s|$  в функциях  $\check{f}(|s|, \tau)$  и  $v(|s|, \tau)$ .

Из установленной выше гладкости решения  $\check{u} \in C^2(G_\infty)$  вида (3.19) задачи Коши (3.16), (3.17) на  $\tilde{G}$  следует дважды непрерывная дифференцируемость по  $t \geq 0$  следа справа  $\check{u}(0, t) = \lim_{x \rightarrow +0} \check{u}(x, t)$  решения (3.19) на  $G_+$  при  $x \geq 0$ . Поскольку решение (3.19) этой задачи Коши на  $G_\infty$  совпадает с суммой первых трёх слагаемых из (3.3), то этот след равен

$$\begin{aligned} \check{u}(0, t) = & \frac{(a u v)(h_1\{g_1(0, t), 0\}, 0) - (a u v)(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(0, t)]\}, 0), 0)}{2a(0, t)} + \\ & + \frac{1}{2a(0, t)} \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(0, t)]\}, 0\}}^{h_1\{g_1(0, t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)] ds + \\ & + \frac{1}{2a(0, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(0, t), \tau\}} \check{f}(|s|, \tau)v(|s|, \tau; 0, t) ds, \quad (x, t) \in G_+. \end{aligned}$$

В этом следе два первых слагаемых обращаются в ноль, потому что в них  $h^{(2)}[0, g_2(0, t)] = t$  согласно второй формуле обращения из (3.8) при  $i = 2$ . Запишем его в виде суммы

$$\check{u}(0, t) = \tilde{\Psi}(t) + \tilde{F}^{(0)}(t), \quad (3.25)$$

где функции

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(t) &= \frac{1}{2a(0, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(0, t), \tau\}} [\hat{f}(s, \tau) - \hat{f}_\mu(s, \tau)] \hat{v}(s, \tau; 0, t) ds, \\ \tilde{F}^{(0)}(t) &= \frac{1}{2a(0, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(0, t), \tau\}} \hat{f}^{(0)}(s, \tau) \hat{v}(s, \tau; 0, t) ds. \end{aligned}$$

В (3.3) в качестве чётной по  $x$  функции  $\hat{f}^{(0)}$  берем значение оператора  $\hat{\mathcal{L}}$  на следе:

$$\hat{\mathcal{L}} \check{u}(0, t) \equiv \check{u}_{tt}(0, t) + \hat{b}(x, t)\check{u}_t(0, t) + \hat{q}(x, t)\check{u}(0, t) = \hat{f}^{(0)}(x, t), \quad (x, t) \in \tilde{G}. \quad (3.26)$$

Согласно представлению (3.25) функция  $\hat{f}^{(0)}$  должна удовлетворять уравнению

$$\hat{f}^{(0)}(x, t) - \tilde{F}_{tt}^{(0)}(t) - \hat{b}(x, t)\tilde{F}_t^{(0)}(t) - \hat{q}(x, t)\tilde{F}^{(0)}(t) = \hat{\mathcal{L}}\tilde{\Psi}(t), \quad (x, t) \in \tilde{G}.$$

Здесь полагаем

$$\tilde{F}_{tt}^{(0)}(t) = \tilde{Y}(t), \quad \tilde{F}_t^{(0)}(t) = \int_0^t \tilde{Y}(\delta) d\delta, \quad \tilde{F}^{(0)}(t) = \int_0^t (t - \delta) \tilde{Y}(\delta) d\delta$$

и получаем систему интегрального уравнения Вольтерра второго рода и алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(t) &= \int_0^t [(\delta - t)\hat{q}(x, t) - \hat{b}(x, t)] \tilde{Y}(\delta) d\delta + \tilde{Z}(x, t), \\ \hat{f}^{(0)}(x, t) - \tilde{Z}(x, t) &= \hat{\mathcal{L}}\tilde{\Psi}(t), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Непрерывность функции  $\hat{f}^{(0)}$  на  $\tilde{G}$  вытекает из уравнения (3.26) и непрерывности его коэффициентов на  $\tilde{G}$ . Из теории интегральных уравнений хорошо известно, что для непрерывной  $\tilde{Z} \in C(\tilde{G})$  существует единственное непрерывное решение  $\tilde{Y} \in C(\tilde{G})$  уравнения Вольтерра второго рода системы (3.27). По значению  $\tilde{Y}$  единственным образом выводятся сначала дважды непрерывно дифференцируемая функция  $\tilde{F}^{(0)}(t) \in C^2[0, +\infty[$ , как решение задачи Коши для уравнения  $\tilde{F}_{tt}^{(0)}(t) = \tilde{Y}(t)$  с очевидными начальными условиями  $\tilde{F}^{(0)}(0) = \tilde{F}_t^{(0)}(0) = 0$ , и затем

единственная функция  $\hat{f}^{(0)} \in C(\tilde{G})$ . Находим функцию  $\tilde{Z}$  из второго алгебраического уравнения системы (3.27) и имеем её единственное решение  $\{\tilde{Y}, \tilde{Z}\}$ .

Итак, выше мы преобразовали все слагаемые из (3.19) в первые три слагаемые из (3.3). Вычитаем след формулы (3.19) при  $x = 0$  из формулы (3.19), прибавляем граничное данное  $\mu \in C^2[0, +\infty[$  и получаем классическое решение исходной задачи (2.1)–(2.3) на  $G_+$  вида

$$u_+(x, t) = \check{u}(x, t) - \check{u}(0, t) + \mu(t) \in C^2(G_+), \quad (3.28)$$

которое совпадает с решением (3.3) на  $G_+$  из теоремы 3.1. Выражение (3.28), очевидно, удовлетворяет уравнению (2.1) и граничному режиму (2.3) на  $G_+$ . Единственные решения краевых задач могут иметь разные виды и формы записи.

Мы убедились в дважды непрерывной дифференцируемости функций (3.2) в  $G_-$  и (3.3) в  $G_+$ . В теореме 1 из [5] непрерывность решений на  $G_-$  и  $G_+$  и их частных производных до второго порядка включительно на характеристике  $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$  подробно и строго обоснована в случае модельного телеграфного уравнения (см. ниже уравнение (4.1)). В нашей первой смешанной задаче для общего телеграфного уравнения (2.1)–(2.3) достаточность условий согласования (2.5) для дважды непрерывной дифференцируемости функции  $u_-$  вида (3.2) в замыкании  $\overline{G_-}$  множества  $G_-$  и функции  $u_+$  вида (3.3) в  $G_+$  на характеристике  $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$  можно вывести из достаточности условий согласования для модельного уравнения в теореме 1 из [5]. Во-первых, первые два наших условия согласования из (2.5) и теоремы 1 из [5] совпадают. Во-вторых, для общего телеграфного уравнения (2.1), из левой и правой частей которого вычитаем слагаемые

$$a^{-1}(x, t)a_t(x, t)u_t(x, t) + a(x, t)a_x(x, t)u_x(x, t), \quad b(x, t)u_t(x, t) + c(x, t)u_x(x, t) + q(x, t)u(x, t),$$

записываем третье условие согласования из теоремы 1 статьи [5] для правой части

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, t) = f(x, t) - a^{-1}(x, t)a_t(x, t)u_t(x, t) - a(x, t)a_x(x, t)u_x(x, t) - \\ - b(x, t)u_t(x, t) - c(x, t)u_x(x, t) - q(x, t)u(x, t) \end{aligned}$$

и получаем третье условие согласования из (2.5) для смешанной задачи (2.1)–(2.3):

$$\begin{aligned} \mu''(0) = \tilde{S} \equiv \tilde{f}(0, 0) + a^2(0, 0)\varphi''(0) + a^{-1}(0, 0)a_t(0, 0)\psi(0) + a(0, 0)a_x(0, 0)\varphi'(0) = \\ = f(0, 0) + a^2(0, 0)\varphi''(0) - b(0, 0)\psi(0) - c(0, 0)\varphi'(0) - q(0, 0)\varphi(0) \equiv S. \end{aligned}$$

В доказательстве теоремы 2 статьи [5] единственность классического решения  $u \in C^2(G_\infty)$  первой смешанной задачи (2.1)–(2.3) на  $G_\infty$  обоснована от противного с помощью энергетического неравенства для её обобщенного сильного решения (см. [8]). Более того, в настоящей статье единственность этого классического решения задачи (2.1)–(2.3) также следует из способа получения формул Римана (3.14) и (3.19) также, как в [11, с. 139] (см. замечание 3.2).

Устойчивость классического решения  $u_-$  вида (3.1) на  $G_-$  и  $u_+$  вида (3.3) на  $G_+$  по  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\mu$ ,  $f$  первой смешанной задачи (2.1)–(2.3) подробно описана в [5]. При любом  $0 < T < +\infty$  решение (3.2) непрерывно зависит в банаховом пространстве  $X^{(1)} = C^2(G_T^-)$  от  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $f$  в произведении  $Y^{(1)}$  банаховых пространств  $C^2[0, +\infty[$ ,  $C^1[0, +\infty[$ ,  $\hat{C}(G_T^-)$ , где множества  $G_T^- = G_T \cap G_-$ ,  $G_T = \{(x, t) \in G_\infty : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq t \leq T\}$ , с нормами из [5]:

$$\begin{aligned} \|u_-(x, t)\|_{C^2(G_T^-)} &= \sup_{(x, t) \in G_T^-} \sum_{0 \leq p+j \leq 2} \left| \frac{\partial^{p+j} u_-(x, t)}{\partial^p x \partial^j t} \right|, \\ \|\varphi(x)\|_{C^2[0, +\infty[} &= \sup_{0 \leq x < +\infty} \sum_{m=0}^2 \left| \frac{d^m \varphi(x)}{dx^m} \right|, \quad \|\psi(x)\|_{C^1[0, +\infty[} = \sup_{0 \leq x < +\infty} \sum_{m=0}^1 \left| \frac{d^m \psi(x)}{dx^m} \right|, \\ \|f(x, t)\|_{\hat{C}(G_T^-)} &= \sup_{(x, t) \in G_T^-} \left( |f(x, t)| + \sum_{i=1}^2 \sum_{0 \leq p+j \leq 1} \left| \frac{\partial^{p+j} H_i(x, t)}{\partial^p x \partial^j t} \right| \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

При любом  $0 < T < +\infty$  решение (3.3) непрерывно зависит в банаховом пространстве  $X^{(2)} = C^2(G_T^+)$  от  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\mu$ ,  $f$  в произведении  $Y^{(2)}$  банаховых пространств  $C^2[0, \Upsilon_T]$ ,  $C^1[0, \Upsilon_T]$ ,  $C^2[0, T]$ ,

$\widehat{C}(G^T)$  с нормами из [5]:

$$\begin{aligned} \|u_+(x, t)\|_{C^2(G_T^+)} &= \max_{(x, t) \in G_T^+} \sum_{0 \leq p+j \leq 2} \left| \frac{\partial^{p+j} u(x, t)}{\partial^p x \partial^j t} \right|, \quad \|\varphi(x)\|_{C^2[0, \Upsilon_T]} = \max_{0 \leq x \leq \Upsilon_T} \sum_{m=0}^2 \left| \frac{d^m \varphi(x)}{dx^m} \right|, \\ \|\psi(x)\|_{C^1[0, \Upsilon_T]} &= \max_{0 \leq x \leq \Upsilon_T} \sum_{m=0}^1 \left| \frac{d^m \psi(x)}{dx^m} \right|, \quad \|\mu(t)\|_{C^2[0, T]} = \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{m=0}^2 \left| \frac{d^m \mu(t)}{dt^m} \right|, \\ \|f(x, t)\|_{\widehat{C}(G^T)} &= \max_{(x, t) \in G^T} \left( |f(x, t)| + \sum_{i=1}^2 \sum_{0 \leq p+j \leq 1} \left| \frac{\partial^{p+j} H_i(x, t)}{\partial^p x \partial^j t} \right| \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_T^+ &= G^T \cap G_+, \quad \Upsilon_T = h_1 \left\{ g_1(h_2\{g_2(0, 0), T\}, T), 0 \right\}, \\ G^T &= \left\{ (x, t) \in G_\infty : g_1(x, t) \leq g_1(h_2\{g_2(0, 0), T\}, T), 0 \leq t \leq T \right\}. \end{aligned}$$

Кроме того, устойчивость решения  $u \in C^2(G_\infty)$  по данным  $\varphi, \psi, \mu, f$  вытекает из его существования и единственности в силу теоремы Банаха о замкнутом графике.

*Необходимость* требований гладкости (2.4) и условий согласования (2.5) установлена нами перед теоремой 3.1. В [5] для зависящих от  $x$  и  $t$  функций  $f(x, t) \in C(G_\infty)$  доказана необходимость (обязательность) гладкости (3.1) для дважды непрерывной дифференцируемости интеграла  $F(x, t)$ , которым в теореме 3.1 становятся интегралы в третьих слагаемых из (3.2) и (3.3) при функциях  $v \equiv a \equiv 1$  на  $G_\infty$ . Дважды непрерывная дифференцируемость интегралов из (3.2) и (3.3), содержащих правую часть  $f(x, t) \in C(G_\infty)$  не зависит от непрерывно дифференцируемых решений  $v \in C^1(G_\infty \cap \triangle MPQ)$  задач Гурса (3.10), (3.13) и (3.20), (3.21) и от дважды непрерывно дифференцируемого коэффициента  $a \in C^2(G_\infty)$ ,  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty$ , и функций  $g_i, h_i, h^{(i)}, i = 1, 2$  (см. ниже замечание 3.1). Доказательство того, что для функций  $f(x, t) \in C(G_\infty)$  требования (3.1) гарантируют дважды непрерывную дифференцируемость интеграла  $F \in C^2(G_\infty)$  имеется в [5]. Поэтому необходимость гладкости (3.1) на непрерывные  $f \in C(G_\infty)$  следует из дважды непрерывной дифференцируемости функции  $F \in C^2(G_\infty)$  (см. [10, 15, 16]).  $\square$

Для непрерывной правой части  $f \in C[0, +\infty[$ , зависящей только от  $x$  или  $t$ , интегральные требования гладкости (3.1) автоматически выполняются (см. [10, 15, 16]).

**Следствие 3.1.** *Если непрерывная правая часть  $f$  зависит только от  $x$  или  $t$ , то утверждение теоремы 3.1 справедливо без требований гладкости (3.1).*

Исследования автора минимальной гладкости правой части  $f$  модельного телеграфного уравнения (см. ниже уравнение (4.1)) для дважды непрерывной дифференцируемости его частного решения  $F(x, t)$  в [15, 16] указывают на то, что требования гладкости (3.1) на  $G_\infty$  выполняются для непрерывно дифференцируемых  $f \in C^1(G_\infty)$  и даже тех непрерывных  $f(x, t) \in C(G_\infty)$ , у которых частные производные интегралов  $\partial H_i(x, t)/\partial x$  по  $x$  или  $\partial H_i(x, t)/\partial t$  по  $t, i = 1, 2$ , из (3.1) непрерывны на  $G_\infty$  (см. следствие 3.2). Поэтому такая же справедливость гладкости (3.1) распространяется на коэффициент  $a(x, t) \geq a_0 > 0, (x, t) \in G_\infty, a \in C^2(G_\infty)$ , функции  $g_i, h_i, h^{(i)} \in C^2(G_\infty), i = 1, 2$ , и функцию Римана  $v(s, \tau) \in C^2(G_\infty)$ .

**Замечание 3.1.** В теореме 3.1 для непрерывной правой части  $f \in C(G_\infty)$  гладкость (3.1) равносильна гладкости (см. [5, 15, 16]):

$$\int_0^t f(|h_i\{g_i(x, t), \tau\}|, \tau) d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2. \quad (3.31)$$

**Следствие 3.2.** *В теореме 3.1 принадлежность интегралов (3.1) и интегралов (3.31) из предыдущего замечания 3.1 множеству  $C^1(G_\infty)$  равносильна их принадлежности множеству  $C^{(0,1)}(G_\infty)$  или множеству  $C^{(1,0)}(G_\infty)$ , где  $C^{(0,1)}(G_\infty)$  ( $C^{(1,0)}(G_\infty)$ ) — множества непрерывных (непрерывно дифференцируемых) по  $x$  и непрерывно дифференцируемых (непрерывных) по  $t$  функций в первой четверти плоскости  $G_\infty$  (см. [15, 16]).*

**Замечание 3.2.** Используя соответственно чётность и нечётность по  $x$  продолжений коэффициентов  $a \in C^2(G_\infty)$ ,  $b, c, q \in C^1(G_\infty)$  уравнения (2.1) и дополнительные предположения  $a_x(0, t) = 0$ ,  $b_x(0, t) = 0$ ,  $c(0, t) = 0$ ,  $q_x(0, t) = 0$ ,  $t \geq 0$ , можно аналогичными рассуждениями из доказательства теоремы 3.1 показать  $\hat{a} \in C^2(\tilde{G})$ ,  $\hat{b} \in C^1(\tilde{G})$ ,  $\hat{c} \in C^1(\tilde{G})$ ,  $\hat{q} \in C^1(\tilde{G})$ . При таких коэффициентах вспомогательная задача Коши (3.16), (3.17) имеет единственное классическое решение  $\check{u} \in C^2(\tilde{G})$  и задача Гурса (3.20), (3.21) — функцию Римана  $\hat{v} \in C^2(\tilde{G})$ . Такая гладкость функций  $\check{u}$ ,  $\hat{v}$  избыточна для решения  $u \in C^2(G_\infty)$  задачи (2.1)–(2.3) на  $G_\infty$ .

**4. Модельная первая смешанная задача.** Из теоремы 3.1 вывести классическое решение и критерий корректности первой смешанной задачи для модельного телеграфного уравнения:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}u(x, t) \equiv u_{tt}(x, t) - a^2(x, t)u_{xx}(x, t) - a^{-1}(x, t)a_t(x, t)u_t(x, t) - \\ - a(x, t)a_x(x, t)u_x(x, t) = \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in \dot{G}_\infty, \end{aligned} \quad (4.1)$$

при начальных условиях (2.2) и граничном режиме (2.3).

Так же, как и выше, из постановки смешанной задачи (4.1), (2.2), (2.3) и определения 2.1 следуют необходимые условия гладкости (2.4) исходных данных и условия согласования:

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \mu(0), \quad \psi(0) = \mu'(0), \\ \tilde{S} \equiv \tilde{f}(0, 0) + a^2(0, 0)\varphi''(0) + a^{-1}(0, 0)\tilde{a}_t(0, 0)\psi(0) + a(0, 0)a_x(0, 0)\varphi'(0) = \mu''(0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Найдём формулы классического решения и критерий корректности по Адамару первой смешанной задачи (4.1), (2.2), (2.3) из формул Римана (3.2), (3.3) и критерия корректности первой смешанной задачи (2.1)–(2.3), полученных нами выше в теореме 3.1.

**Теорема 4.1.** [5]. Пусть коэффициент  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty$ ,  $a \in C^2(G_\infty)$ . Первая смешанная задача (4.1), (2.2), (2.3) в  $\dot{G}_\infty$  имеет единственное и устойчивое по  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\tilde{f}$ ,  $\mu$  классическое решение  $u \in C^2(G_\infty)$  тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости (2.4), (3.1) при  $f = \tilde{f}$  и условия согласования (4.2). Этим классическим решением задачи (4.1), (2.2), (2.3) в  $\dot{G}_\infty$  является функция

$$\begin{aligned} \hat{u}_-(x, t) = \frac{\varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\}) + \varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\})}{2} + \\ + \frac{1}{2} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu, 0)} d\nu + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(s, \tau)}{a(s, \tau)} ds, \quad (x, t) \in G_-, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_+(x, t) = \frac{\varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\}) - \varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\})}{2} + \\ + \frac{1}{2} \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu, 0)} d\nu + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds + \mu(h^{(2)}[0, g_2(x, t)]) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{h^{(2)}[0, g_2(x, t)]} d\tau \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), \tau\}}^{h_2\{g_2(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds, \quad (x, t) \in G_+. \end{aligned} \quad (4.4)$$

*Доказательство.* Сначала выведем формулы (4.3), (4.4) формального решения первой смешанной задачи (4.1), (2.2), (2.3) на множествах  $G_-$  и  $G_+$  из формул Римана (3.2), (3.3).

1 Множество  $G_-$ . В случае модельного телеграфного уравнения (4.1) решением  $\hat{v} \in C^2(G_\infty)$ ,  $C(\tilde{G})$ ,  $C^2(\tilde{G} \setminus G_\infty)$  соответствующих задач Гурса (3.10), (3.13) на  $G_-$  и (3.20), (3.21) на  $G_+$  из теоремы 3.1 служит функция Римана из [9]:

$$\hat{v}(s, \tau) = v(|s|, \tau) = \hat{v}(s, \tau; x, t) = \frac{a(|x|, t)}{a(|s|, \tau)}, \quad (s, \tau) \in \tilde{G}.$$

В этом также можно убедиться подстановкой этой функции Римана в телеграфные уравнения (3.10), (3.20)) и условия Гурса (3.13), (3.21) при коэффициентах  $\hat{b}(s, \tau) = -\hat{a}^{-1}(s, \tau)\hat{a}_\tau(s, \tau)$ ,  $\hat{c}(s, \tau) = -\hat{a}(s, \tau)\hat{a}_s(s, \tau)$  и  $\hat{q}(s, \tau) = 0$ . Других функций Римана этих задач Гурса не существует, так как решение каждой задачи Гурса единственно и задача Гурса (3.10), (3.13) на  $G_-$  — частный случай задачи Гурса (3.20), (3.21) на верхней полуплоскости  $\tilde{G}$ .

Подставляем функцию Римана  $v(s, \tau) = a(|x|, t)/a(|s|, \tau)$  в решение (3.2):

$$\begin{aligned} & \frac{(auv)(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) + (auv)(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)}{2a(x, t)} = \\ & = \frac{1}{2a(x, t)} \left[ a(x, t) \frac{a(s, \tau)}{a(s, \tau)} u(s, \tau) \Big|_{\tau=0}^{s=h_2\{g_2(x, t), 0\}} + a(x, t) \frac{a(s, \tau)}{a(s, \tau)} u(s, \tau) \Big|_{\tau=0}^{s=h_1\{g_1(x, t), 0\}} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \left[ u(s, \tau) \Big|_{\tau=0}^{s=h_2\{g_2(x, t), 0\}} + u(s, \tau) \Big|_{\tau=0}^{s=h_1\{g_1(x, t), 0\}} \right] = \frac{\varphi(h_2\{g_2(x, t), 0\}) + \varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\})}{2}, \quad (4.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \psi(s) v(s, 0) ds = \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \psi(s) \frac{a(x, t)}{a(s, 0)} ds = \frac{1}{2} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \frac{\psi(s)}{a(s, 0)} ds, \\ & \frac{-1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} [\varphi(s) v_\tau(s, 0) - b(s, 0) \varphi(s) v(s, 0)] ds = \\ & = \frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} \varphi(s) \left[ \frac{a(x, t) a_\tau(s, 0)}{a^2(s, 0)} - \frac{a^{-1}(s, 0) a_\tau(s, 0) a(x, t)}{a(s, 0)} \right] ds = 0, \\ & \frac{1}{2a(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \tilde{f}(s, \tau) v(s, \tau) ds = \frac{1}{2a(x, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \tilde{f}(s, \tau) \frac{a(x, t)}{a(s, \tau)} ds = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(s, \tau)}{a(s, \tau)} ds, \quad (x, t) \in G_-. \end{aligned}$$

Эти равенства указывают на то, что решение (3.2) становится решением (4.3) на  $G_-$ .

2. Множество  $G_+$ . Вывод первых трёх слагаемых решения (4.4) из формулы Римана (3.3) аналогичен равенствам (4.5). Согласно нашему выводу формулы Римана (3.3) классического решения  $u_+$  задачи (2.1)–(2.3) на  $G_+$  его последний интеграл, равный значению предпоследнего двойного интеграла по  $\triangle MPG$  при  $x = 0$ , имеет величину

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(x, t) & \equiv -\frac{1}{2a(0, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(0, t), \tau\}} \tilde{f}(|s|, \tau) v(|s|, \tau; 0, t) ds = \\ & = -\frac{1}{2a(0, t)} \left( \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \tilde{f}(|s|, \tau) v(|s|, \tau; x, t) ds \right) \Big|_{x=0}, \quad (x, t) \in G_+, \end{aligned}$$

так как в (3.3) функция  $\check{f} = \tilde{f}$ , поскольку в [5] решение задачи (4.1), (2.2), (2.3) получено методом характеристик, а не нашим методом компенсации правой частью уравнения. Подставляем

функцию  $v(|s|, \tau) = a(|s|, t)/a(|s|, \tau)$  и меняем порядок интегрирования:

$$-\frac{a(0, t)}{2a(0, t)} \left( \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x, t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \left( \int_0^t d\tau \int_{h_1\{g_1(x, t), \tau\}}^{h_2\{g_2(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds \right) \Big|_{x=0}.$$

Сначала во внешнем повторном интеграле делаем замену переменной интегрирования

$$\tilde{\tau} = h^{(2)}[0, g_2(x, \tau)], \quad \tau \geq 0, \quad (4.6)$$

и приходим к повторному двойному интегралу

$$\mathfrak{U}(x, t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^{h^{(2)}[0, g_2(x, t)]} d\tilde{\tau} \left( \int_{h_1\{g_1(x, t), \tau\}}^{h_2\{g_2(x, t), \tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|, \tau)}{a(|s|, \tau)} ds \right) \Big|_{x=0}, \quad (4.7)$$

так как внешний нижний предел интегрирования равен  $\tilde{\tau} = h^{(2)}[0, g_2(x, \tau)]|_{x=0, \tau=0} = \tau|_{\tau=0} = 0$  по второму тождеству обращения из (2.8) при  $i = 2$ , внешний верхний предел интегрирования равен  $\tilde{\tau} = h^{(2)}[0, g_2(x, \tau)]|_{\tau=t} = h^{(2)}[0, g_2(x, t)]$  и из тождества  $h^{(2)}[0, g_2(x, \tau)]|_{x=0} = \tau$ ,  $\tau \geq 0$ , в (2.8) при  $i = 2$  следует равенство

$$d\tilde{\tau} = \frac{\partial h^{(2)}[0, g_2(x, \tau)]}{\partial \tau} \Big|_{x=0} d\tau = d\tau.$$

Здесь производная по  $\tau$  и след при  $x = 0$  коммутируют. В функции  $h^{(2)}[0, g_2(x, t)]$  уже  $x = 0$ , потому что к функции  $y_2 = g_2(x, t)$  обратной функцией при  $x = 0$  является функция

$$t = h^{(2)}[x, y_2]|_{x=0} = h^{(2)}[0, y_2] = h^{(2)}[0, g_2(x, t)], \quad t \geq 0.$$

Итак, после замены (4.6) в интеграле  $\mathfrak{U}(x, t)$  верхний предел интегрирования  $t$  внешнего повторного интеграла при  $x = 0$  стал равным  $h^{(2)}[0, g_2(x, t)]$  в (4.7). Поэтому во внутреннем повторном интеграле из  $\mathfrak{U}(x, t)$  замена (4.6) при  $x = 0$  равносильна замене  $t$  на  $h^{(2)}[0, g_2(x, t)]$ . Кроме того, во внутреннем повторном интеграле из (4.7) замена (4.6) при  $x = 0$  равносильна замене  $\tilde{\tau} = h^{(2)}[0, g_2(x, \tau)]|_{x=0} = \tau$ ,  $\tau \geq 0$ , по второй формуле обращения из (2.8) при  $i = 2$ . В результате этих замен находим

$$\mathfrak{U}(x, t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^{h^{(2)}[0, g_2(x, t)]} d\tilde{\tau} \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), \tilde{\tau}\}}^{h_2\{g_2(x, t), \tilde{\tau}\}} \frac{\tilde{f}(|s|, \tilde{\tau})}{a(|s|, \tilde{\tau})} ds, \quad (x, t) \in G_+, \quad (4.8)$$

так как по первой формуле обращения из (2.8) при  $i = 2$  пределы интегрирования равны

$$\begin{aligned} h_2\{g_2(0, t), \tau\} &= h_2\{g_2(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), \tilde{\tau}\} = h_2\{g_2(x, t), \tilde{\tau}\}, \\ h_1\{g_1(0, t), \tau\} &= h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), \tilde{\tau}\}. \end{aligned}$$

В граничном данном  $\mu(t)$  формулы (3.3) можно тоже заменить  $t$  на  $h^{(2)}[0, g_2(x, t)]$ , т.е.  $\mu(t)$  на  $\mu(h^{(2)}[0, g_2(x, t)])$ . Граничное данное  $\mu(h^{(2)}[0, g_2(x, t)])$  для  $\mu(t) \in C^2[0, +\infty[$  и интеграл (4.8) служат классическими решениями однородного модельного телеграфного уравнения (4.1) на  $G_+$ , так как они имеют вид слагаемого  $\mathfrak{F}_2(g_2(x, t))$  для всех  $\mathfrak{F}_2 \in C^2(\mathbb{R})$ , общего интеграла уравнения (4.1) при  $\tilde{f} = 0$  на  $G_\infty$  из [5, 15, 16].

Из теоремы 3.1 следует дважды непрерывная дифференцируемость найденных из общих формул Римана (3.2) и (3.3) решений (4.3) на  $G_-$ , (4.4) на  $G_+$  и (4.3), (4.4) на критической характеристике  $g_2(x, t) = g_2(0, 0)$  для первой смешанной задачи (4.1), (2.2), (2.3), а также критерий её корректности. Эта гладкость решений (4.3), (4.4) и критерий корректности задачи (4.1), (2.2), (2.3) подробно и конструктивно исследованы в [5]. Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 4.1.** При доказательстве теорем 1 и 2 в [5] была показана только достаточность требований гладкости (3.1). Их необходимость также подтверждают работы автора [15, 16]. В [1] нет формулы (4.4) решения задачи (4.1), (2.2), (2.3) на  $G_+$ .

**Следствие 4.1.** Если непрерывная правая часть  $\tilde{f}$  зависит только от  $x$  или  $t$ , то утверждение теоремы 4.1 справедливо без требований гладкости (3.1).

Для непрерывной правой части  $\tilde{f} \in C[0, +\infty[$ , зависящей только от  $x$  или  $t$ , интегральные требования гладкости (3.1) автоматически выполняются (см. [10, 15, 16]).

**Замечание 4.2.** В теореме 4.1, где  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ ,  $(x, t) \in G_\infty$ ,  $a \in C^2(G_\infty)$ , для зависящей от  $x$  и  $t$  и непрерывной правой части  $\tilde{f} \in C(G_\infty)$  гладкость (3.1) равносильна гладкости (3.31) из замечания 3.1 (см. [5, 10, 15, 16]).

**Следствие 4.2.** В теореме 4.1 принадлежность интегралов (3.1) и равносильных интегралов (3.31) множеству  $C^1(G_\infty)$  эквивалентна их принадлежности множеству  $C^{(0,1)}(G_\infty)$  или множеству  $C^{(1,0)}(G_\infty)$ , где  $C^{(0,1)}(G_\infty)$  ( $C^{(1,0)}(G_\infty)$ ) — множества непрерывных (непрерывно дифференцируемых) по  $x$  и непрерывно дифференцируемых (непрерывных) по  $t$  функций в первой четверти плоскости  $G_\infty$  ([10, 15, 16]).

**5. Заключение.** Получены формулы Римана (3.2), (3.3) единственного и устойчивого классического решения  $u \in C^2(G_\infty)$  и критерий (2.4), (2.5), (3.31) корректности по Адамару первой смешанной задачи (2.1)–(2.3) для общего линейного неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. Эти формулы Римана содержат неявные функции характеристик уравнения (2.1). Из формул Римана (3.2), (3.3) и критерия корректности (2.4), (2.5), (3.31) выведены уже известные формулы классического решения (4.3), (4.4) и критерий корректности (2.4), (3.31), (4.2) первой смешанной задачи (4.1), (2.2), (2.3) для неоднородного модельного телеграфного уравнения со специальными переменными коэффициентами в первой четверти плоскости, которые ранее были установлены автором в [5]. Последние результаты служат подтверждением справедливости полученных формул Римана (3.2), (3.3) и критерия корректности (2.4), (2.5), (3.31) настоящей работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барановская С. Н. О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Минск: БГУ, 1991.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1976.
3. Корнев В. В. Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 4. — С. 403–412.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
5. Ломовцев Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой// Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2021. — № 1. — С. 18–38.
6. Ломовцев Ф. Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуграниченной струны// Тез. докл. Междунар. мат. конф. «VI Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 7–10 декабря 2015 г.). — Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 2015. — 2. — С. 74–75.
7. Ломовцев Ф. Е. Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости// Весн. Гродз. дзярж. ўн-та ім. Я. Купалы. Сер. 2. — 2021. — 11, № 1. — С. 68–82.
8. Ломовцев Ф. Е. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменной областью определения операторных коэффициентов// Диффер. уравн. — 1992. — 28, № 5. — С. 873–886.
9. Ломовцев Ф. Е. Задача Гурса для сопряжённого модельного телеграфного уравнения со скоростью  $a(x, t)$  в верхней полуплоскости// Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С. Фундам. науки. — 2022. — № 4. — С. 92–102.
10. Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными. — Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 2017.
11. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 2004.
12. Хромов А. П. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения// Докл. РАН. — 2019. — 484, № 1. — С. 18–20.
13. Хромов А. П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала// Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 5. — С. 717–731.

14. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / Препринт. — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1990.
15. Lomovtsev F. E. Conclusion of the smoothness criterion for the right-hand side of the model telegraph equation with the rate  $a(x, t)$  by the correction method// Мат. Междунар. конф. «XXXIV Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXXII» (Воронеж, 3-9 мая 2021 г.). — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2021. — С. 284–287.
16. Lomovtsev F. E. The smoothness criterion for the classical solution to inhomogeneous model telegraph equation at the rate  $a(x, t)$  on the half-line// Тр. 10 Междунар. науч. семин. AMADE-2021 (Минск, 13–17 сентября 2021г.). — Минск: БГУ, 2022. — С. 43–53.
17. Lomovtsev F. E. Global correctness theorem of the first mixed problem for the model telegraph equation at the rate  $a(x, t)$  in the half-strip of the plane// Весн. Гродз. дзярж. ўн-та ім. Я. Купалы. Сер. 2. — 2021. — 11, № 3. — С. 13–26.
18. Lomovtsev F. E. Global correctness theorem to the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the segment// Пробл. физ. мат. техн. — 2022. — № 1 (50). — С. 62–73.
19. Lomovtsev F. E. Riemann formula of the classical solution to the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line// Тез. докл. Междунар. мат. конф. «VII Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 1-4 июня 2021 г.). — Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 2021. — С. 201–203.
20. Lomovtsev F. E. Generalized Riemann formula of the classical solution to the Cauchy problem for the general telegraph equation with variable coefficients// Мат. Междунар. конф. «XXXIV Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXXII» (Воронеж, 3-9 мая 2021 г.). — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2021. — С. 288–289.
21. Schauder J. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung// Math. Z. — 1934. — 38. — P. 257–282.
22. Schwartz L. Theorie des distributions. — Paris: Hermann, 1950–1951.

#### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф22КИ-001 от 05.11.2021 г.).

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ломовцев Федор Егорович (Lomovtsev Fedor Egorovich)  
Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь  
(Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus)  
E-mail: lomovcev@bsu.by