ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 13–29
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-13-29

УДК 517.977: 534.112

О ЗАДАЧАХ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАДАННЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ

© 2024 г. **В. Р. БАРСЕГЯН**

Аннотация. В работе исследуется распределенная неоднородная колебательная система, у которой заданы различные состояния в промежуточные моменты времени. Рассматриваются задачи граничного управления и оптимального граничного управления такой системой. Динамика указанного объекта моделируется одномерным волновым уравнением с кусочно постоянными характеристиками, при этом колебания распространяются в однородных участках за одинаковое время. Критерий качества для задач оптимального граничного управления задан на всем интервале времени. Предложен конструктивный подход построения функции граничного управления и оптимального управления одномерными колебательными неоднородными процессами. Подход исследования базируется на методах разделения переменных, теории управления и оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. Под действием построенного закона управления волновые колебания из заданного начального состояния переходят в заданное конечное состояние через многоточечные промежуточные состояния.

Ключевые слова: граничное управление колебаниями, оптимальное управление колебаниями, неоднородный колебательный процесс, волновое уравнение, кусочно постоянные характеристики.

ON PROBLEMS OF BOUNDARY CONTROL AND OPTIMAL CONTROL OF A DISTRIBUTED INHOMOGENEOUS OSCILLATORY SYSTEM WITH GIVEN INTERMEDIATE CONDITIONS ON THE STATE FUNCTIONS

© 2024 **V. R. BARSEGHYAN**

Abstract. In this work, we examine a distributed inhomogeneous oscillatory system, in which various states are specified at intermediate times. Problems of boundary control and optimal boundary control of this system are considered. The dynamics of this object is modeled by a one-dimensional wave equation with piecewise constant characteristics; the oscillations propagate in homogeneous domains areas in the same time. The quality criterion for optimal boundary control problems is specified over the entire time interval. A constructive approach to constructing a boundary control function and optimal control of one-dimensional oscillatory inhomogeneous processes is proposed. The research approach is based on methods of separation of variables, control theory, and optimal control of finite-dimensional systems with multipoint intermediate conditions. Under the influence of the constructed control law, wave oscillations from a given initial state pass into a given terminal state through multipoint intermediate states.

Keywords and phrases: boundary control of oscillations, optimal control of oscillations, inhomogeneous oscillatory process, wave equation, piecewise constant characteristics.

AMS Subject Classification: 93C95, 70Q05

1. Введение. Волновые уравнения, возникающие в задачах управления распределенными колебательными процессами, имеют неизменный теоретический интерес и существенное практическое значение (см. [1–5, 7–9, 11–18, 21, 22]). В задачах математического моделирования часто возникает необходимость генерации желаемой формы колебания или стабилизации колебания. Решение данной проблемы реализуется исследователями, как правило, с помощью задач граничного управления (см. [2, 4, 5, 7–9, 11–18, 21, 22]). Благодаря многочисленным приложениям многоточечные краевые задачи управления и оптимального управления динамикой являются активно развиваемым направлением в современной теории управления. В этих задачах, наряду с классическими краевыми условиями (начальными и конечными), дополнительно заданы многоточечные условия в промежуточные фиксированные моменты времени.

Задачам управления (в том числе и оптимального) динамикой разнородных составных систем посвящены, в частности, работы [1, 2, 4, 5, 7, 8, 11–18, 26]. Применительно к распределенной колебательной системе, включающей два кусочно однородных участка, эта задача была впервые сформулирована А. Г. Бутковским и исследована в [12]. Серия работ академика В. А. Ильина (см., например, [7, 8]) и работы [4, 5, 11, 13–16, 26] посвящены проблемам граничного управления (оптимального управления) процессами, которые моделируются одномерным волновым уравнением, состоящим из двух участков с разными физическими свойствами. Длины таких участков выбирались исходя из предположения, что время прохождения колебаний по каждому из них является одинаковым. Авторами указанных работ были изучены и выведены формулы типа Даламбера, при этом задачи исследовались методом бегущих волн.

В данной статье рассматривается серия задач граничного управления и оптимального граничного управления динамикой распределенной неоднородной колебательной системы, причем в промежуточные моменты времени известны различные состояния колебательного процесса, который состоит из двух кусочно однородных участков. Считаем, что физические характеристики этих участков удовлетворяют сделанным выше предположениям. Будем осуществлять управление и оптимальное управление за счет смещения одного конца (при закрепленном противоположном конце), а также за счет одновременного смещения обоих концов с заданными условиями: в начальный и конечный моменты времени, а также в разные определенные промежуточные моменты времени. Критерий качества в задачах оптимального граничного управления задан на всем интервале времени.

Сформулированные в данной работе задачи отличаются от существующих постановок тем, что помимо стандартных краевых условий заданы дополнительно многоточечные условия в промежуточные моменты времени, а именно: на функции колебания (прогиба), на их производную (функции скоростей точек), а также одновременно на функции колебания и производную функции колебания. При исследовании этих задач используется метод разделения переменных (метод Фурье).

Цель данной работы состоит в создании аналитического подхода и разработке алгоритма построения функции граничного управления и оптимального управления одномерными колебательными системами, обладающими неоднородными свойствами, динамика которых (под действием сформированного закона управления) за конечный отрезок времени переходит из определенного начального состояния через многоточечные промежуточные состояния в известное (желаемое) конечное состояние.

2. Постановка задачи. Пусть кусочно однородная среда состоит из двух участков с соответствующими длинами l_1 и l (т.е. $-l_1 \leqslant x \leqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$), $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$ — скорость прохождения волны по i-му участку, где $\rho_i = \mathrm{const}$ — линейная плотность, $k_i = \mathrm{const}$ — модуль Юнга, $i = 1, 2$. При этом имеет место равенство

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}, \tag{2.1}$$

так что время прохождения волны по участкам разной длины совпадает. Пусть состояние неоднородной распределенной системы описывается функцией $Q(x,t)$, $-l_1 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, а отклонения от состояния равновесия можно представить в виде волнового уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \dfrac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2.2}$$

с граничными условиями двух видов:

$$1. \quad Q(-l_1,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.3}$$

$$2. \quad Q(-l_1,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.4}$$

Функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — управляющие воздействия (граничные управления) с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0-0,t) = Q(0+0,t), \quad a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0+0}. \tag{2.5}$$

Распределенный кусочно однородный процесс (2.2) можно охарактеризовать как динамическую систему переменной структуры (см. [19]). Уравнение (2.2) характеризует математическая модель продольных (либо поперечных) колебаний стержня (струны) соответственно, где ρ — плотность, k — модуль упругости (натяжение струны).

Пусть классические условия (начальные и конечные) имеют вид

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_0(x), \qquad -l_1 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.6}$$

$$Q(x,T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \qquad \frac{\partial Q}{\partial t}\Big|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad -l_1 \leqslant x \leqslant l. \tag{2.7}$$

Пусть также в некоторые определенные моменты времени t_k $(k = 1, \ldots, m)$:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = T,$$

известны промежуточные значения функции колебания (прогиба) и значения ее производной (скоростей точек системы) в следующем виде:

$$\text{A.} \quad Q(x,t_i) = \varphi_i(x), \quad -l_1 \leqslant x \leqslant l, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.8}$$

$$\text{B.} \quad \frac{\partial Q}{\partial t}\Big|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad -l_1 \leqslant x \leqslant l, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.9}$$

$$\text{C.} \quad \begin{aligned} & Q(x,t_i) = \varphi_i(x), \quad -l_1 \leqslant x \leqslant l, \quad i = 2\alpha - 1, \qquad \alpha = 1, \ \ldots, \ \frac{m}{2}, \\ & \frac{\partial Q}{\partial t}\Big|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad -l_1 \leqslant x \leqslant l, \quad j = 2\alpha, \qquad \alpha = 1, \ \ldots, \ \frac{m}{2}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

В промежуточных условиях (2.10) предполагается, что m — четное число.

Замечание 1. Промежуточные значения функции колебания и значения производной функции колебания в условиях (2.10) можно задавать в любой очередности.

Для задач управления с граничными условиями (2.3) будем рассматривать функционал вида

$$\left[\int_0^T \mu^2(t) dt \right]^{1/2}, \tag{2.11}$$

а для задач управления с граничными условиями (2.4) будем рассматривать функционал вида

$$\left[\int_0^T \left(\mu^2(t) + \nu^2(t) \right) dt \right]^{1/2}. \tag{2.12}$$

Предполагается, что функция $Q(x,t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \Big\{(x,t) : x \in [-l_1,l],\ t \in [0,T]\Big\}$, а функции удовлетворяют условиям $\varphi_i(x) \in C^2[-l_1,l]$ и $\psi_j(x) \in C^1[-l_1,l]$. Кроме того, полагаем, что выполнены условия согласования

$$\begin{array}{llll} \mu(0) = \varphi_0(-l_1), & \dot\mu(0) = \psi_0(-l_1), & \nu(0) = \varphi_0(l), & \dot\nu(0) = \psi_0(l), \\ \mu(t_i) = \varphi_i(-l_1), & \dot\mu(t_j) = \psi_j(-l_1), & \nu(t_i) = \varphi_i(l), & \dot\nu(t_j) = \psi_j(l), \\ \mu(T) = \varphi_T(-l_1), & \dot\mu(T) = \psi_T(-l_1), & \nu(T) = \varphi_T(l), & \dot\nu(T) = \psi_T(l), \end{array} \tag{2.13}$$

где $i = 2\alpha - 1$, $j = 2\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, m/2$.

Для уравнения (2.2) с условиями (2.6) и (2.7) на отрезке $[0,T]$ сформулированы шесть задач граничного управления с граничными условиями (2.3) и (2.4), с заданными различными условиями (2.8)–(2.10) на функцию колебания и ее производную в фиксированные промежуточные значения.

Номером 1 обозначим задачи, в которых управление реализуется за счет перемещения только одного конца (для определенности, левого) при закрепленном другом конце.

Задача 1A. Граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.8).

Задача 1B. Граничное управление колебательным процессом с заданными значениями производной функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.9).

Задача 1C. Граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания и ее производной в выделенные разные промежуточные моменты времени (2.10).

Сформулируем перечисленные задачи управления 1A, 1B, 1C с указанными граничными условиями (2.3).

Требуется найти такое граничное управление $\mu(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, (см. (2.3)), под влиянием которого колебания системы (2.2) с условиями сопряжения (2.5) из известного состояния (2.6) в начале отрезка $t = 0$ переходят в состояние (2.7) в конце отрезка $t = T$, обеспечивая выполнение следующих значений:

A. функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_i (см. (2.8));
B. производной функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_j (см. (2.9));
C. функции колебания и ее производной в фиксированные промежуточные значения t_i и t_j (см. (2.10)).

Номером 2 обозначим далее задачи, в которых управление реализуется за счет перемещения обоих концов системы.

Задача 2A. Граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.8).

Задача 2B. Граничное управление колебательным процессом с заданными значениями производной функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.9).

Задача 2C. Граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания и ее производной в выделенные разные промежуточные моменты времени (2.10).

Сформулируем перечисленные задачи управления 2A, 2B, 2C с указанными граничными условиями (2.4).

Требуется найти такие граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (см. (2.4)), под влиянием которых колебания системы (2.2) с условиями сопряжения (2.5) из известного состояния (2.6) в начале отрезка $t = 0$ переходят в состояние (2.7) в конце отрезка $t = T$, обеспечивая выполнение следующих значений:

A. функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_i (см. (2.8));

B. производной функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_j (см. (2.9));
C. функции колебания и ее производной в фиксированные промежуточные значения t_i и t_j (см. (2.10)).

Для уравнения (2.2) с начальными (2.6) и конечными (2.7) условиями на отрезке времени $[0, T]$ и функционалами (2.11), (2.12) сформулированы шесть задач оптимального граничного управления с граничными условиями (2.3) и (2.4), с заданными различными условиями (2.8)–(2.10) на функцию колебания и ее производную в определенные промежуточные значения из временного интервала. Сохраняя принятую выше нумерацию задач, отметим задачи оптимального граничного управления дополнительно верхним индексом «0».

Задача 1^0A. Оптимальное граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.8) и минимизирующие функционал (2.11).

Задача 1^0B. Оптимальное граничное управление колебательным процессом с заданными значениями производной функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.9) и минимизирующие функционал (2.11).

Задача 1^0C. Оптимальное граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания и ее производной в выделенные разные промежуточные моменты времени (2.10) и минимизирующие функционал (2.11).

Сформулируем перечисленные задачи 1^0A, 1^0B, 1^0C оптимального граничного управления с условиями (2.3).

Требуется найти оптимальное граничного управление $\mu^0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (см. (2.3)) под воздействием которого колебания системы (2.2) с условиями сопряжения (2.5) из известного состояния (2.6) в начале отрезка $t = 0$ переходят в состояние (2.7) в конце отрезка $t = T$, обеспечивая минимум функционала (2.11) и выполнение следующих заданных значений:

A. функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_i (см. (2.8));
B. производной функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_j (см. (2.9));
C. функции колебания и ее производной в фиксированные промежуточные значения t_i и t_j (см. (2.10)).

Задача 2^0A. Оптимальное граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.8) и минимизирующие функционал (2.12).

Задача 2^0B. Оптимальное граничное управление колебательным процессом с заданными значениями производной функции колебания в выделенные промежуточные моменты времени (2.9) и минимизирующие функционал (2.12).

Задача 2^0C. Оптимальное граничное управление колебательным процессом с заданными значениями функции колебания и ее производной в выделенные разные промежуточные моменты времени (2.10) и минимизирующие функционал (2.12).

Сформулируем перечисленные задачи 2^0A, 2^0B, 2^0C оптимального граничного управления с условиями (2.4).

Требуется найти такие оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (см. (2.4)), под воздействием которых колебания системы (2.2) с условиями сопряжения (2.5) и граничными условиями из известного состояния (2.6) в начале отрезка $t = 0$ переходит в известное состояние (2.7) в конце отрезка $t = T$, обеспечивая минимум функционала (2.12) и выполнение следующих заданных значений:

A. функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_i (см. (2.8));

B. производной функции колебания в фиксированные промежуточные значения времени t_j (см. (2.9));
C. функции колебания и ее производной в фиксированные промежуточные значения t_i и t_j (см. (2.10)).

Замечание 2. Так как во всех задачах управления и оптимального управления в отдельные промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, \dots, m)$ заданы или только значения функции колебания, или только значения производной функции колебания (значения скоростей точек), то использовать подход поэтапного исследования задач нецелесообразно.

В данной работе для всех перечисленных задач по единой схеме предлагается конструктивный подход решения, в котором учитывается специфика промежуточных условий.

Схема построения решений сформулированных задач включает следующие шаги:

Шаг 1. Задачи сводятся к задачам управления с распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями.

Шаг 2. При помощи метода разделения переменных полученные задачи сводятся к задачам управления и оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и многоточечными промежуточными условиями.

Шаг 3. При помощи методов теории управления и оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями для произвольного числа первых n гармоник строятся граничные управления и оптимальные граничные управления, которые представляются в явном аналитическом виде.

3. Сведение исходных задач к задачам с нулевыми граничными условиями. Для выполнения шага 1 из схемы построения решения перейдем к новой переменной:

$$\xi = \begin{cases} \dfrac{a_2}{a_1}x, & -l_1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \tag{3.1}$$

что позволит реализовать растяжение или сжатие отрезка $-l_1 \leqslant x \leqslant 0$ относительно точки $x = 0$. При этом с учетом (2.1) вместо отрезка $-l_1 \leqslant x \leqslant 0$ будем иметь отрезок $-l \leqslant \xi \leqslant 0$.

Для функции $Q(\xi, t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковое уравнение

$$\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, & -l \leqslant \xi \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, & 0 \leqslant \xi \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \leqslant \xi \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.2}$$

с граничными условиями

$$Q(-l,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.3}$$

$$Q(-l,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.4}$$

начальными условиями

$$Q(\xi,0) = \varphi_0(\xi), \quad \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad -l \leqslant x \leqslant l, \tag{3.5}$$

промежуточными условиями

$$Q(\xi,t_i) = \varphi_i(\xi), \quad -l \leqslant \xi \leqslant l, \quad i = 1, \dots, m, \tag{3.6}$$

$$\left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad -l \leqslant \xi \leqslant l, \quad i = 1, \dots, m, \tag{3.7}$$

$$Q(\xi,t_i) = \varphi_i(\xi), \quad -l \leqslant \xi \leqslant l, \quad i = 2\alpha - 1, \qquad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\Big|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad -l \leqslant \xi \leqslant l, \quad j = 2\alpha, \qquad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2},$$

конечными условиями

$$Q(\xi,T) = \varphi_T(\xi), \quad \frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\Big|_{t=T} = \psi_T(\xi), \quad -l \leqslant \xi \leqslant l, \tag{3.9}$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков:

$$Q(0-0,t) = Q(0+0,t), \quad a_1\rho_1\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0-0} = a_2\rho_2\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0+0}. \tag{3.10}$$

Отметим, что для простоты и удобства после замены переменной (3.1) все обозначения функций сохранены.

3.1. Сведение неоднородных граничных условий к нулевым граничным условиям. Поскольку граничные условия (3.3), (3.4) неоднородны, будем строить решение уравнения (3.2) в следующем виде:

$$Q(\xi,t) = V(\xi,t) + W(\xi,t), \tag{3.11}$$

где $V(\xi,t)$ — требующая определения функция с однородными граничными условиями

$$V(-l,t) = V(l,t) = 0, \tag{3.12}$$

а $W(\xi,t)$ — решение уравнения (3.2) с неоднородными граничными условиями

$$W(-l,t) = \mu(t), \quad W(l,t) = 0, \tag{3.13}$$

$$W(-l,t) = \mu(t), \quad W(l,t) = \nu(t). \tag{3.14}$$

Функция $W(\xi,t)$ для условий (3.3) и (3.4) представляется в виде

$$W(\xi,t) = \frac{1}{2l}(l-\xi)\mu(t), \tag{3.15}$$

$$W(\xi,t) = \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\mu(t) + (l+\xi)\nu(t)\right]. \tag{3.16}$$

Подстановка (3.11) в (3.2) и учет (3.15), (3.16) дают следующее уравнение для $V(\xi,t)$:

$$\frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial t^2} = a_2^2\frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial \xi^2} + F(\xi,t), \quad -l \leqslant \xi \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.17}$$

где

$$F(\xi,t) = \frac{1}{2l}(\xi-l)\ddot{\mu}(t), \tag{3.18}$$

$$F(\xi,t) = \frac{1}{2l}\left[(\xi-l)\ddot{\mu}(t) - (\xi+l)\ddot{\nu}(t)\right]. \tag{3.19}$$

Функция $V(\xi,t)$ удовлетворяет условию (3.10) в точке $\xi = 0$. Следует отметить, что согласно (3.1) имеем

$$\begin{aligned} &\varphi_0(-l_1) = \varphi_0(-l), \qquad \varphi_i(-l_1) = \varphi_i(-l), \qquad \psi_0(-l_1) = \psi_0(-l),\\ &\psi_j(-l_1) = \psi_j(-l), \qquad \varphi_T(-l_1) = \varphi_T(-l), \qquad \psi_T(-l_1) = \psi_T(-l). \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.2. Сведение начальных, промежуточных и конечных условий к соответствующим условиям для неоднородного уравнения. Учитывая выражения (3.15), (3.16) для функции $W(\xi,t)$ и условия согласования (3.20), из известных начальных (3.5), промежуточных (3.6)–(3.8) и конечных условий (3.9) получим соответствующие условия для функции $V(x,t)$. Для задач граничного управления колебаниями смещением левого конца при закрепленном правом конце, т.е. для функции $V(\xi,t)$, получим следующие условия: начальные

$$V(\xi,0) = \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}(l-\xi)\varphi_0(-l), \quad \frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}(l-\xi)\psi_0(-l), \tag{3.21}$$

промежуточные

$$V(\xi,t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}(l-\xi)\varphi_i(-l), \quad i = 1,\dots,m, \tag{3.22}$$

$$\left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi) - \frac{1}{2l}(l-\xi)\psi_j(-l), \quad j = 1,\dots,m, \tag{3.23}$$

$$V(\xi,t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}(l-\xi)\varphi_i(-l), \quad i = 2\alpha-1, \qquad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2}, \tag{3.24}$$
$$\left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi) - \frac{1}{2l}(l-\xi)\psi_j(-l), \quad j = 2\alpha, \qquad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2},$$

конечные

$$V(\xi,T) = \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}(l-\xi)\varphi_T(-l), \quad \left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}(l-\xi)\psi_T(-l). \tag{3.25}$$

Для задач граничного управления колебаниями смещением двух концов для функции $V(\xi,t)$ получим следующие условия: начальные

$$\begin{aligned} V(\xi,0) &= \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\varphi_0(-l) + (l+\xi)\varphi_0(l)\right], \\ \left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\psi_0(-l) + (l+\xi)\psi_0(l)\right], \end{aligned} \tag{3.26}$$

промежуточные

$$V(\xi,t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\varphi_i(-l) + (l+\xi)\varphi_i(l)\right], \quad i = 1,\dots,m, \tag{3.27}$$

$$\left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\psi_j(-l) + (l+\xi)\psi_j(l)\right], \quad j = 1,\dots,m, \tag{3.28}$$

$$V(\xi,t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\varphi_i(-l) + (l+\xi)\varphi_i(l)\right], \quad i = 2\alpha-1, \qquad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2}, \tag{3.29}$$
$$\left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\psi_j(-l) + (l+\xi)\psi_j(l)\right], \quad j = 2\alpha, \qquad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2},$$

конечные

$$\begin{aligned} V(\xi,T) &= \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\varphi_T(-l) + (l+\xi)\varphi_T(l)\right], \\ \left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=T} &= \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\psi_T(-l) + (l+\xi)\psi_T(l)\right]. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Итак, приходим к задачам управления колебаниями, моделируемыми уравнением (3.17) с однородными граничными условиями (3.12), которые формулируются следующим образом:

Задачи управления с нулевыми граничными условиями.

1. *Смещение левого конца при закрепленном правом конце.* Требуется найти такое граничное управление $\mu(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, которое переводит колебание системы, описываемое уравнением (3.17), (3.18) с граничными условиями (3.12), из известного начального состояния (3.21) в конечное состояние (3.25), обеспечивая выполнение следующих промежуточных условий: A — (3.22); B — (3.23); C — (3.24).

2. *Смещение двух концов.* Требуется найти такие граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, которые переводят колебание системы, описываемое уравнением (3.17), (3.19) с граничными условиями (3.12), из известного начального состояния (3.26) в конечное состояние (3.30), обеспечивая выполнение следующих промежуточных условий: A — (3.27); B — (3.28); C — (3.29).

Задачи оптимального управления с нулевыми граничными условиями.

1. *Смещение левого конца при закрепленном правом конце.* Требуется найти такое оптимальное граничное управление $\mu^0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, которое переводит колебание системы, описываемое уравнением (3.17), (3.18) с граничными условиями (3.12), из известного начального состояния (3.21) в конечное состояние (3.25), обеспечивая выполнение следующих промежуточных условий: A — (3.22); B — (3.23); C — (3.24), и которое минимизирует функционал (2.11).

2. *Смещение двух концов.* Требуется найти такие оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, которые переводят колебание системы, описываемое уравнением (3.17), (3.19) с граничными условиями (3.12), из известного начального состояния (3.26) в конечное состояние (3.30), обеспечивая выполнение следующих промежуточных условий: A — (3.27); B — (3.28); C — (3.29), и которые минимизируют функционал (2.12).

4. Решение задачи. Применение метода разделения переменных. Перейдем к выполнению шагов 2 и 3. Будем искать решение уравнения (3.17) в виде

$$V(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi. \tag{4.1}$$

Функции $F(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ представим в виде рядов Фурье в базисе $\{\sin(\pi k \xi)/l\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Подставим далее их значения вместе с функцией $V(\xi, t)$ в уравнения (3.17)–(3.19) и в условия (3.21)–(3.30). В результате получим

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a_2 \pi k}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.2}$$

$$F_k(t) = -\frac{a_2}{\lambda_k l} \ddot{\mu}(t), \tag{4.3}$$

$$F_k(t) = \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\ddot{\nu}(t) \left(2(-1)^k - 1\right) - \ddot{\mu}(t)\right]. \tag{4.4}$$

Для задач под номером 1 (смещение одного конца при закрепленном другом конце) начальные, промежуточные и конечные условия запишутся в виде

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \varphi_0(-l), \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \psi_0(-l), \tag{4.5}$$

$$V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \varphi_i(-l), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.6}$$

$$\dot{V}_k(t_j) = \psi_k^{(j)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \psi_j(-l), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} V_k(t_i) &= \varphi_k^{(i)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \varphi_i(-l), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \\ \dot{V}_k(t_j) &= \psi_k^{(j)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \psi_j(-l), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \varphi_T(-l), \quad \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \psi_T(-l). \tag{4.9}$$

Здесь $F_k(t)$, $\varphi_k^{(i)}$ и $\psi_k^{(j)}$ — коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $F(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$.

Для задач под номером 2 (смещение обоих концов) начальные, промежуточные и конечные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} V_k(0) &= \varphi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_0(-l) - \varphi_0(l) \left(2(-1)^k - 1\right)\right], \\ \dot{V}_k(0) &= \psi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\psi_0(-l) - \psi_0(l) \left(2(-1)^k - 1\right)\right], \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_i(-l) - \varphi_i(l) \left(2(-1)^k - 1\right)\right], \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.11}$$

$$\dot{V}_k(t_j) = \psi_k^{(j)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\psi_j(-l) - \psi_j(l) \left(2(-1)^k - 1\right)\right], \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} V_k(t_i) &= \varphi_k^{(i)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_i(-l) - \varphi_i(l) \left(2(-1)^k - 1\right)\right], \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \\ \dot{V}_k(t_j) &= \psi_k^{(j)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\psi_j(-l) - \psi_j(l) \left(2(-1)^k - 1\right)\right], \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, \frac{m}{2}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} V_k(T) &= \varphi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\varphi_T(-l) - \varphi_T(l)\Big(2(-1)^k - 1\Big)\right], \\ \dot V_k(T) &= \psi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l}\left[\psi_T(-l) - \psi_T(l)\Big(2(-1)^k - 1\Big)\right]. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Общее решение уравнения (4.2) имеет вид

$$V_k(t) = V_k(0)\cos\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\dot V_k(0)\sin\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t F_k(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau. \tag{4.15}$$

Учитывая начальные (4.5) (или (4.10)), промежуточные (4.6)–(4.8) (или (4.11)–(4.13)) и конечные (4.9) (или (4.14)) условия, из (4.15) получим, что функции $F_k(\tau)$ для каждого k должны удовлетворять интегральным соотношениям в виде

$$\int\limits_0^T F_k(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau = \tilde C_{1k}(T), \qquad \int\limits_0^T F_k(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau = \tilde C_{2k}(T), \tag{4.16}$$

$$\int\limits_0^{t_i} F_k(\tau)\sin\lambda_k(t_i-\tau)\,d\tau = \tilde C_{1k}(t_i), \quad i = 1,\dots,m, \tag{4.17}$$

$$\int\limits_0^{t_j} F_k(\tau)\sin\lambda_k(t_j-\tau)\,d\tau = \tilde C_{2k}(t_j), \quad j = 1,\dots,m, \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{t_i} F_k(\tau)\sin\lambda_k(t_i-\tau)\,d\tau = \tilde C_{1k}(t_i), \quad i = 2\alpha-1, \quad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2}, \\ &\int\limits_0^{t_j} F_k(\tau)\sin\lambda_k(t_j-\tau)\,d\tau = \tilde C_{2k}(t_j), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} \tilde C_{1k}(T) &= \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k T - \dot V_k(0)\sin\lambda_k T, \\ \tilde C_{2k}(T) &= \dot V_k(T) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k T - \dot V_k(0)\cos\lambda_k T, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\tilde C_{1k}(t_i) = \lambda_k V_k(t_i) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k t_i - \dot V_k(0)\sin\lambda_k t_i, \quad i = 1,\dots,m, \tag{4.21}$$

$$\tilde C_{2k}(t_j) = \dot V_k(t_j) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k t_j - \dot V_k(0)\cos\lambda_k t_j, \quad j = 1,\dots,m, \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} \tilde C_{1k}(t_i) &= \lambda_k V_k(t_i) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k t_i - \dot V_k(0)\sin\lambda_k t_i, \quad i = 2\alpha-1, \quad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2}, \\ \tilde C_{2k}(t_j) &= \dot V_k(t_j) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k t_j - \dot V_k(0)\cos\lambda_k t_j, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1,\dots,\frac{m}{2}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Отметим, что задачам управления и оптимального управления с условиями A соответствуют интегральные соотношения (4.16), (4.17), задачам с условиями B — соотношения (4.16), (4.18), а задачам с условиями C — соотношения (4.16), (4.19). Приведем дальнейшее построение решения (шаг 3 схемы) для задач граничного управления колебаниями, выделяя построение смещением левого конца при закрепленном правом конце и смещением двух концов.

4.1. Построение решения задач граничного управления колебаниями смещением левого конца при закрепленном правом конце. Подставляя выражение функции $F_k(t)$ из (4.3) в соотношения (4.16)–(4.19) и интегрируя по частям с учетом условий согласования (2.13), получим из (4.16) следующие соотношения:

$$\int_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau = C_{1k}(T), \quad \int_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau = C_{2k}(T), \tag{4.24}$$

а из (4.17), (4.18) и (4.19) получим следующие соотношения:

$$\int_0^T \mu(\tau)h_{1k}^{(1)}(\tau)d\tau = C_{1k}(t_1), \quad \int_0^T \mu(\tau)h_{1k}^{(m)}(\tau)d\tau = C_{1k}(t_m), \tag{4.25}$$

$$\int_0^T \mu(\tau)h_{2k}^{(1)}(\tau)d\tau = C_{2k}(t_1), \quad \int_0^T \mu(\tau)h_{2k}^{(m)}(\tau)d\tau = C_{2k}(t_m), \tag{4.26}$$

$$\begin{gathered}\int_0^T \mu(\tau)h_{1k}^{(i)}(\tau)d\tau = C_{1k}(t_i), \quad i = 2\alpha-1, \quad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2},\\ \int_0^T \mu(\tau)h_{2k}^{(j)}(\tau)d\tau = C_{2k}(t_j), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2},\end{gathered} \tag{4.27}$$

где

$$C_{1k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k}\right], \quad C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k}\right],$$

$$C_{1k}(t_i) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)}\right], \quad i = 1,\ldots,m;$$

$$C_{2k}(t_j) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)}\right], \quad j = 1,\ldots,m,$$

а также

$$\begin{aligned}X_{1k} &= \lambda_k\varphi_T(-l) - \psi_0(-l)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(-l)\cos\lambda_k T,\\ X_{2k} &= \psi_T(-l) - \psi_0(-l)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(-l)\sin\lambda_k T,\\ X_{1k}^{(i)} &= \lambda_k\varphi_i(-l) - \psi_0(-l)\sin\lambda_k t_i - \lambda_k\varphi_0(-l)\cos\lambda_k t_i,\\ X_{2k}^{(j)} &= \psi_j(-l) - \psi_0(-l)\cos\lambda_k t_j + \lambda_k\varphi_0(-l)\sin\lambda_k t_j,\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$h_{1k}^{(i)}(\tau) = \begin{cases}\sin\lambda_k(t_i-\tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant t_i,\\ 0, & t_i < \tau \leqslant T,\end{cases} \qquad h_{2k}^{(j)}(\tau) = \begin{cases}\cos\lambda_k(t_j-\tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant t_j,\\ 0, & t_j < \tau \leqslant T.\end{cases} \tag{4.29}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\bar{H}_k^{(a)}(\tau) &= \begin{pmatrix} \sin\lambda_k(T-\tau) & \cos\lambda_k(T-\tau) & h_{1k}^{(1)}(\tau) & \ldots & h_{1k}^{(m)}(\tau)\end{pmatrix}^T,\\ C_k^{(a)} &= \begin{pmatrix} C_{1k}(T) & C_{2k}(T) & C_{1k}(t_1) & \ldots & C_{1k}(t_m)\end{pmatrix}^T,\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}\bar{H}_k^{(b)}(\tau) &= \begin{pmatrix} \sin\lambda_k(T-\tau) & \cos\lambda_k(T-\tau) & h_{2k}^{(1)}(\tau) & \ldots & h_{2k}^{(m)}(\tau)\end{pmatrix}^T,\\ C_k^{(b)} &= \begin{pmatrix} C_{1k}(T) & C_{2k}(T) & C_{2k}(t_1) & \ldots & C_{2k}(t_m)\end{pmatrix}^T,\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}\bar{H}_k^{(c)}(\tau) &= \begin{pmatrix} \sin\lambda_k(T-\tau) & \cos\lambda_k(T-\tau) & h_{1k}^{(1)}(\tau) & h_{2k}^{(2)}(\tau) & \ldots & h_{1k}^{(m-1)}(\tau) & h_{2k}^{(m)}(\tau)\end{pmatrix}^T,\\ C_k^{(c)} &= \begin{pmatrix} C_{1k}(T) & C_{2k}(T) & C_{1k}(t_1) & C_{2k}(t_2) & \ldots & C_{1k}(t_{m-1}) & C_{2k}(t_m)\end{pmatrix}^T.\end{aligned} \tag{4.32}$$

Тогда, с учетом введенных обозначений (4.30)–(4.32), соотношения (4.24)–(4.27) запишутся следующим образом:

$$\int_0^T \bar{H}_k^{(\delta)}(\tau)\mu^{(\delta)}(\tau)d\tau = C_k^{(\delta)}, \quad \delta = a, b, c; \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.33}$$

Здесь в верхнем индексе $\delta = a, b, c$ обозначения соответствуют задачам со смещением левого конца при закрепленном правом конце с условиями A, B и C.

На практике, как правило, выбираются несколько первых n гармоник колебаний и решается задача синтеза управлений, используя методы теории управления конечномерными системами. Поэтому

$$H_n^{(\delta)}(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{H}_1^{(\delta)}(\tau) & \bar{H}_2^{(\delta)}(\tau) & \ldots & \bar{H}_n^{(\delta)}(\tau) \end{pmatrix}^T, \quad \eta_n^{(\delta)} = \begin{pmatrix} C_1^{(\delta)} & C_2^{(\delta)} & \ldots & C_n^{(\delta)} \end{pmatrix}^T \tag{4.34}$$

с размерностями $H_n^{(\delta)}(\tau) - (n(m+2)\times 1)$, $\eta_n^{(\delta)} - (n(m+2)\times 1)$ при всех $\delta = a, b, c$.

Для первых n гармоник соотношение (4.33), с учетом (4.34), запишется в виде

$$\int_0^T H_n^{(\delta)}(\tau)\,\mu_n^{(\delta)}(\tau)d\tau = \eta_n^{(\delta)}, \quad \delta = a, b, c. \tag{4.35}$$

Из (4.35) вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Первые n гармоник системы* (4.2), (4.3) *с условиями* (4.5)–(4.9) *вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора $\eta_n^{(\delta)}$* (4.34) *можно найти управление $\mu_n^{(\delta)}(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию* (4.35).

Для произвольного числа первых n гармоник управляющее воздействие $\mu_n^{(\delta)}(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (4.35), имеет вид (см. [6, 20])

$$\mu_n^{(\delta)}(t) = \left(H_n^{(\delta)}(t)\right)^T \left(S_n^{(\delta)}\right)^{-1} \eta_n^{(\delta)} + f_n^{(\delta)}(t), \quad \delta = a, b, c, \tag{4.36}$$

где $\left(H_n^{(\delta)}(t)\right)^T$ — транспонированная матрица, $f_n^{(\delta)}(t)$ — такая вектор-функция, что

$$\int_0^T H_n^{(\delta)}(t) f_n^{(\delta)}(t)dt = 0, \quad S_n^{(\delta)} = \int_0^T H_n^{(\delta)}(t)\left(H_n^{(\delta)}(t)\right)^T dt, \quad \delta = a, b, c.$$

Здесь $S_n^{(\delta)}$ — известная матрица размерностью $(n\,(m+2)\times n\,(m+2))$, $\det S_n^{(\delta)} \neq 0$ при $\delta = a, b, c$.

Из формулы (4.36) следует, что существует множество управляющих функций, решающих задачи граничных управлений.

Учитывая обозначения (4.29), функции управления $\mu_n^{(\delta)}(t)$ представляются в виде

$$\mu_n^{(\delta)}(t) = \begin{cases} \mu_n^{(\delta)1}(t), & 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \mu_n^{(\delta)2}(t), & t_1 < t \leqslant t_2, \\ \quad\vdots \\ \mu_n^{(\delta)m}(t), & t_{m-1} < t \leqslant t_m, \\ \mu_n^{(\delta)m+1}(t), & t_m < t \leqslant T. \end{cases} \tag{4.37}$$

Подставляя из (4.36) (или из (4.37)) управление $\mu_n^{(\delta)}(t)$ в (4.3), а найденное для $F_k^{(\delta)}(t)$ выражение — в (4.15), получим функцию $V_k^{(\delta)}(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (4.1) будем иметь

$$V_n^{(\delta)}(\xi, t) = \sum_{k=1}^{n} V_k^{(\delta)}(t) \sin\frac{\pi k}{l}\xi,$$

где

$$V_k^{(\delta)}(t) = V_k(0)\cos\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\dot{V}_k(0)\sin\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t F_k^{(\delta)}(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau, \tag{4.38}$$

а функция колебания $Q_n^{(\delta)}(\xi,t)$, $-l \leqslant \xi \leqslant l$, для первых n гармоник запишется в виде

$$Q_n^{(\delta)}(\xi,t) = V_n^{(\delta)}(\xi,t) + W_n^{(\delta)}(\xi,t), \quad W_n^{(\delta)}(\xi,t) = \frac{1}{2l}(l-\xi)\mu_n^{(\delta)}(t), \quad \delta = a,b,c. \tag{4.39}$$

Учитывая обозначения (3.1), функция $Q_n^{(\delta)}(x,t)$ при $-l_1 \leqslant x \leqslant l$ представляется в виде:

$$Q_n^{(\delta)}(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} V_k^{(\delta)}(t)\sin\dfrac{\pi k}{l_1}x + \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x}{l_1}\right)\mu_n^{(\delta)}(t), & -l_1 \leqslant x \leqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} V_k^{(\delta)}(t)\sin\dfrac{\pi k}{l}x + \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)\mu_n^{(\delta)}(t), & 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \quad \delta = a,b,c. \tag{4.40}$$

4.2. Построение решения задач граничного управления колебаниями смещением двух концов. Подставим значение функции $F_k(t)$ в виде (4.4) в соотношения (4.16)–(4.19). Интегрируя их по частям с учетом условий согласования (2.11)–(2.13), из (4.16) получим, что функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для каждого k должны удовлетворять интегральным соотношениям в виде

$$\begin{gathered} \int\limits_0^T \mu(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau = C_{1k}(T), \\ \int\limits_0^T \mu(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau = C_{2k}(T), \end{gathered} \tag{4.41}$$

а из (4.17), (4.18) и (4.19) получим следующие интегральные соотношения:

$$\int\limits_0^T \mu(\tau)h_k^{(i)}(\tau)d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k h_k^{(i)}(\tau)d\tau = C_{1k}(t_i), \tag{4.42}$$

$$\int\limits_0^T \mu(\tau)g_k^{(j)}(\tau)d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k g_k^{(j)}(\tau)d\tau = C_{2k}(t_j), \tag{4.43}$$

$$\begin{gathered} \int\limits_0^T \mu(\tau)h_k^{(i)}(\tau)d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k h_k^{(i)}(\tau)d\tau = C_{1k}(t_i), \qquad i = 2\alpha-1, \quad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2}, \\ \int\limits_0^T \mu(\tau)g_k^{(j)}(\tau)d\tau - \int\limits_0^T \nu(\tau)(-1)^k g_k^{(j)}(\tau)d\tau = C_{2k}(t_j), \qquad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1,\ldots,\frac{m}{2}, \end{gathered} \tag{4.44}$$

где

$$C_{1k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} - (-1)^k Y_{1k}\right], \qquad C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} - (-1)^k Y_{2k}\right],$$

$$C_{1k}(t_i) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} - (-1)^k Y_{1k}^{(i)}\right], \qquad C_{2k}(t_j) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{2a}\tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)} - (-1)^k Y_{2k}^{(j)}\right],$$

$$h_k^{(i)}(\tau) = \begin{cases} \sin\lambda_k(t_i-\tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant t_i, \\ 0, & t_i < \tau \leqslant T, \end{cases} \qquad g_k^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \cos\lambda_k(t_j-\tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant t_j, \\ 0, & t_j < \tau \leqslant T, \end{cases} \tag{4.45}$$

$$Y_{1k}=\lambda_k\varphi_T(l)-\psi_0(l)\sin\lambda_kT-\lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_kT,\qquad Y_{2k}=\psi_T(l)-\psi_0(l)\cos\lambda_kT+\lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_kT,$$
$$Y_{1k}^{(i)}=\lambda_k\varphi_i(l)-\psi_0(l)\sin\lambda_kt_i-\lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_kt_i,\qquad Y_{2k}^{(j)}=\psi_j(l)-\psi_0(l)\cos\lambda_kt_j+\lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_kt_j.$$

Отметим, что выражения для $\tilde C_{1k}(T)$, $\tilde C_{2k}(T)$, $\tilde C_{1k}(t_i)$, $\tilde C_{2k}(t_j)$ совпадают с приведенными в формулах (4.20)–(4.23), а выражения для X_{1k}, X_{2k}, $X_{1k}^{(i)}$, $X_{2k}^{(j)}$ приведены в (4.28).

Введем следующие обозначения:

$$\bar H_k^{(2a)}(\tau)=\begin{pmatrix}\sin\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\sin\lambda_k(T-\tau)\\ \cos\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\cos\lambda_k(T-\tau)\\ h_k^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_k^{(1)}(\tau)\\ \cdots & \cdots\\ h_k^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_k^{(m)}(\tau)\end{pmatrix},\quad C_k^{(2a)}(t_1,\ldots,t_m,T)=\begin{pmatrix}C_{1k}(T)\\ C_{2k}(T)\\ C_{1k}(t_1)\\ \vdots\\ C_{1k}(t_{m-1})\end{pmatrix},\tag{4.46}$$

$$\bar H_k^{(2b)}(\tau)=\begin{pmatrix}\sin\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\sin\lambda_k(T-\tau)\\ \cos\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\cos\lambda_k(T-\tau)\\ g_k^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1}g_k^{(1)}(\tau)\\ \cdots & \cdots\\ g_k^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1}g_k^{(m)}(\tau)\end{pmatrix},\quad C_k^{(2b)}(t_1,\ldots,t_m,T)=\begin{pmatrix}C_{1k}(T)\\ C_{2k}(T)\\ C_{2k}(t_1)\\ \vdots\\ C_{2k}(t_m)\end{pmatrix},\tag{4.47}$$

$$\bar H_k^{(2c)}(\tau)=\begin{pmatrix}\sin\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\sin\lambda_k(T-\tau)\\ \cos\lambda_k(T-\tau) & (-1)^{k+1}\cos\lambda_k(T-\tau)\\ h_k^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_k^{(1)}(\tau)\\ g_k^{(2)}(\tau) & (-1)^{k+1}g_k^{(2)}(\tau)\\ \cdots & \cdots\\ h_k^{(m-1)}(\tau) & (-1)^{k+1}h_k^{(m-1)}(\tau)\\ g_k^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1}g_k^{(m)}(\tau)\end{pmatrix},\quad C_k^{(2c)}(t_1,\ldots,t_m,T)=\begin{pmatrix}C_{1k}(T)\\ C_{2k}(T)\\ C_{1k}(t_1)\\ C_{2k}(t_2)\\ \vdots\\ C_{1k}(t_{m-1})\\ C_{2k}(t_m)\end{pmatrix},\tag{4.48}$$

$$U^{(\delta)}(\tau)=\begin{pmatrix}\mu^{(\delta)}(\tau)\\ \nu^{(\delta)}(\tau)\end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом введенных обозначений (4.46)–(4.48) соотношения (4.41)–(4.44) запишутся следующим образом:

$$\int_0^T\bar H_k^{(2\delta)}(\tau)U^{(\delta)}(\tau)d\tau=C_k^{(2\delta)}(t_1,\ldots,t_m,\,T),\quad \delta=a,b,c;\quad k=1,2,\ldots.\tag{4.49}$$

Здесь через $U^{(\delta)}(\tau)$, $\delta=a,b,c$, обозначены вектор-функции управления и оптимального управления для задач смещением двух концов, т.е. для задач 2A, 2B, 2C и 2^0A, 2^0B, 2^0C соответственно.

Таким образом, для поиска функции $U^{(\delta)}(\tau)$, $\tau\in[0,T]$, для всех перечисленных задач получили бесконечные интегральные соотношения, которые представлены в единой записи (4.49). Введем для первых n гармоник следующие обозначения блочных матриц:

$$H_n^{(2\delta)}(\tau)=\begin{pmatrix}\bar H_1^{(2\delta)}(\tau)\\ \bar H_2^{(2\delta)}(\tau)\\ \vdots\\ \bar H_n^{(2\delta)}(\tau)\end{pmatrix},\quad \eta_n^{(2\delta)}=\begin{pmatrix}C_1^{(2\delta)}(t_1,\ldots,t_m,T)\\ C_2^{(2\delta)}(t_1,\ldots,t_m,T)\\ \vdots\\ C_n^{(2\delta)}(t_1,\ldots,t_m,T)\end{pmatrix}\tag{4.50}$$

размерностей $(n\,(m+2)\times 2)$ и $(n\,(m+2)\times 1)$ соответственно. Для первых n гармоник с учетом (4.50) соотношение (4.49) запишется в виде

$$\int\limits_0^T H_n^{(2\delta)}(\tau)\,U_n^{(\delta)}(\tau)d\tau = \eta_n^{(2\delta)}. \tag{4.51}$$

Из (4.51) следует утверждение, аналогичное теореме 1: первые n гармоник системы (4.2), (4.4) с условиями (4.10)–(4.14) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора $\eta_n^{(2\delta)}$ из (4.50) можно найти управление $U_n^{(\delta)}(t)$, $t\in[0,T]$, удовлетворяющее условию (4.51).

Для произвольного числа первых n гармоник управляющее воздействие $U_n^{(\delta)}(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (4.51), имеет вид (см. [6, 20])

$$U_n^{(\delta)}(t) = \left(H_n^{(2\delta)}(t)\right)^T \left(S_n^{(2\delta)}\right)^{-1}\eta_n^{(2\delta)} + f_n^{(2\delta)}(t), \quad \delta = a,b,c, \tag{4.52}$$

где $\left(H_n^{(2\delta)}(t)\right)^T$ — транспонированная матрица, $f_n^{(2\delta)}(t)$ — такая вектор-функция, что

$$\int\limits_0^T H_n^{(2\delta)}(t)f_n^{(2\delta)}(t)dt = 0, \quad S_n^{(2\delta)} = \int\limits_0^T H_n^{(2\delta)}(t)\left(H_n^{(2\delta)}(t)\right)^T dt, \quad \delta = a,b,c. \tag{4.53}$$

Здесь $H_n^{(2\delta)}(t)\left(H_n^{(2\delta)}(t)\right)^T$ — внешнее произведение, $S_n^{(2\delta)}$ — известная матрица размерности $(n\,(m+2)\times n\,(m+2))$, для которой предполагается, что $\det S_n^{(2\delta)}\neq 0$, при $\delta = a,b,c$.

Здесь также из формулы (4.52) следует, что для задач 2A, 2B, 2C существует множество управляющих функций, решающих задачи граничных управлений.

Подставляя из (4.52) величины $\mu_n^{(2\delta)}(t)$ и $\nu_n^{(2\delta)}(t)$ в (4.4), а найденное для $F_k^{(2\delta)}(t)$ выражение — в (4.15), получим функцию $V_k^{(2\delta)}(t)$, $t\in[0,T]$. Далее, из формулы (4.1) будем иметь

$$V_n^{(2\delta)}(\xi,t) = \sum_{k=1}^n V_k^{(2\delta)}(t)\sin\frac{\pi k}{l}\xi,$$

где

$$V_k^{(2\delta)}(t) = V_k(0)\cos\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\dot V_k(0)\sin\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t F_k^{(2\delta)}(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau, \tag{4.54}$$

а функция колебания $Q_n^{(2\delta)}(\xi,t)$, $-l\leqslant\xi\leqslant l$ для первых n гармоник запишется в виде

$$Q_n^{(2\delta)}(\xi,t) = V_n^{(2\delta)}(\xi,t) + W_n^{(2\delta)}(\xi,t), \quad W_n^{(2\delta)}(\xi,t) = \left[\nu_n^{(2\delta)}(t) - \mu_n^{(2\delta)}(t)\right]\frac{\xi}{l} + \mu_n^{(2\delta)}(t), \qquad \delta = a,b,c. \tag{4.55}$$

Учитывая обозначения (3.1), представим функцию колебания $Q_n^{(2\delta)}(x,t)$ при $-l_1\leqslant x\leqslant l$ в следующем виде:

$$Q_n^{(2\delta)}(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^n V_k^{(2\delta)}(t)\sin\frac{\pi k}{l_1}x + \frac12\left[\left(1-\frac{x}{l_1}\right)\mu_n^{(2\delta)}(t) + \left(1+\frac{x}{l_1}\right)\nu_n^{(2\delta)}(t)\right], \\ \qquad\qquad -l_1\leqslant x\leqslant 0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^n V_k^{(2\delta)}(t)\sin\frac{\pi k}{l}x + \frac12\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_n^{(2\delta)}(t) + \left(1+\frac{x}{l}\right)\nu_n^{(2\delta)}(t)\right], \\ \qquad\qquad 0\leqslant x\leqslant l, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \end{cases} \tag{4.56}$$

4.3. О дальнейшем построении решения задач оптимального граничного управления колебаниями. В ходе построения решения задач оптимального граничного управления колебаниями, для первых n гармоник в случае управления смещением левого конца при закрепленном правом конце получено интегральные соотношения в виде (4.35), а в случае управления смещением двух концов — интегральные соотношения (4.51). Ясно, что левая часть соотношения (4.35) или (4.51) — линейная операция, порожденная функцией управления на промежутке времени $[0, T]$, а функционалы (2.11) или (2.12) являются нормой соответствующего нормированного пространства L_2.

Таким образом, задачу оптимального управления с интегральными условиями (4.35) при функционале (2.11) или с интегральными условиями (4.51) при функционале (2.12) можно рассматривать как проблему моментов, а решение этих задач следует строить с помощью алгоритма решения проблемы моментов (см. [10]).

5. Заключение. Используя методы разделения переменных, теории управления и оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями, предложен конструктивный подход построения граничного управления и оптимального управления неоднородной колебательной системой с заданными значениями функции колебания и производной функции колебания в разные промежуточные моменты времени. Предложенный для одномерного неоднородного волнового уравнения подход можно распространить на другие одномерные и неодномерные колебательные системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барсегян В. Р.* Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости// Диффер. уравн. процессы управл. — 2022. — № 2. — С. 41–54.
2. *Барсегян В. Р.* Оптимальное граничное управление распределенной неоднородной колебательной системой с заданными состояниями в промежуточные моменты времени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2023. — *63*, № 1. — С. 74–84.
3. *Бутковский А. Г.* методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975.
4. *Егоров А. И., Знаменская Л. Н.* Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2011. — *17*, № 1. — С. 85–92.
5. *Зверева М. Б., Найдюк Ф. О., Залукаева Ж. О.* Моделирование колебаний сингулярной струны// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2014. — № 2. — С. 111–119.
6. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
7. *Ильин В. А.* Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 159–163.
8. *Ильин В. А.* О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков// Докл. РАН. — 2010. — *435*, № 6. — С. 732–735.
9. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II// Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2011. — *19*, № 1. — С. 62–70.
10. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
11. *Кулешов А. А.* Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 5. — С. 594–597.
12. *Львова Н. Н.* Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой// Автомат. телемех. — 1973. — № 10. — С. 22–32.
13. *Провоторов В. В.* Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн// Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Прикл. мат. Информ. Процессы управл. — 2012. — *1*. — С. 62–71.
14. *Рогожников А. М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами// Докл. РАН. — 2012. — *444*. — С. 488–491.
15. *Amara J. Ben, Beldi E.* Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients// SIAM J. Control Optim. — 2019. — *57*, № 5. — P. 3360–3387.

16. *Amara J. Ben, Bouzidi H.* Null boundary controllability of a one-dimensional heat equation with an internal point mass and variable coefficients// J. Math. Phys. — 2018. — *59*, № 1. — P. 1–22.
17. *Barseghyan V. R.* Control problem of string vibrations with inseparable multipoint conditions at intermediate points in time// Mech. Solids. — 2019. — *54*, № 8. — P. 1216–1226.
18. *Barseghyan V. R.* The problem of boundary control of displacement at two ends by the process of oscillation of a rod consisting of two sections of different density and elasticity// Mech. Solids. — 2023. — *58*, № 2. — P. 483–491.
19. *Barseghyan V. R.* On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure// Proc. Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (Moscow, June 1-3, 2016), 2016. — P. 1–3.
20. *Barseghyan V. R., Barseghyan T. V.* On an approach to the problems of control of dynamic system with nonseparated multipoint intermediate conditions// Automat. Remote Control. — 2015. — *76*, № 4. — P. 549–559.
21. *Barseghyan V., Solodusha S.* On the optimal control problem for vibrations of the rod/string consisting of two non-homogeneous sections with the condition at an intermediate iime// Mathematics. — 2022. — *10*, № 23. — P. 4444.
22. *Barseghyan V., Solodusha S.* Control of string vibrations by displacement of one end with the other end fixed, given the deflection form at an intermediate moment of time// Axioms. — 2022. — *11*, № 4. — P. 157.
23. *Barseghyan V., Solodusha S.* Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time// Lect. Notes Comp. Sci. — 2021. — *12755*. — P. 299–313.
24. *Barseghyan V., Solodusha S.* On one problem in optimal boundary control for string vibrations with a given velocity of points at an intermediate moment of time// Proc. International Russian Automation Conference (RusAutoCon) (Sochi, September 5-11, 2021). — Sochi, 2021. — P. 343–349.
25. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time// J. Phys. Conf. Ser. — 2021.
26. *Mercier D., Regnier V.* Boundary controllability of a chain of serially connected Euler–Bernoulli beams with interior masses// Collect. Math. — 2009. — *60*, № 3. — P. 307–334.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барсегян Ваня Рафаелович (Barseghyan Vanya Rafayelovich)
Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения;
Ереванский государственный университет
(Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences
of the Republic of Armenia, Yerevan, Armenia;
Yerevan State University, Yerevan, Armenia)
E-mail: `barseghyan@sci.am`