ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 47–52
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-47-52

УДК 517.51

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НАИЛУЧШИМИ РАВНОМЕРНЫМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ ФУНКЦИЙ И ИХ ЧЕТНЫМИ И НЕЧЕТНЫМИ ПРОДОЛЖЕНИЯМИ

© 2023 г. **Т. С. МАРДВИЛКО**

Аннотация. В работе изучается связь между наилучшими равномерными полиномиальными приближениями непрерывной на отрезке функции и ее четным и нечетным продолжениями. Рассмотрены примеры, демонстрирующие точность полученных результатов. Аналогичные вопросы обсуждаются также для рациональных приближений.

Ключевые слова: наилучшее равномерное полиномиальное приближение, наилучшее равномерное рациональное приближение, четное продолжение функции, нечетное продолжение функции, неравенство Джексона.

RELATIONSHIPS BETWEEN THE BEST UNIFORM POLYNOMIAL APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS AND THEIR EVEN AND ODD PROLONGATIONS

© 2023 **T. S. MARDVILKO**

Abstract. In this paper, we study the relationships between the best uniform polynomial approximations of a continuous function on an interval and its even and odd prolongations. We consider examples that demonstrate the accuracy of the results obtained. Similar issues are also discussed for rational approximations.

Keywords and phrases: best uniform polynomial approximation, best uniform rational approximation, even continuation of a function, odd continuation of a function, Jackson's inequality.

AMS Subject Classification: 41A10, 41A17, 41A20

1. Введение. Основные результаты. Обозначим через $C([a,b])$ пространство непрерывных действительных функций на отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Для $f\in C([a,b])$ определим стандартную максимумЭ=норму

$$\|f\|_{[a,b]}=\max\left\{|f(x)|:x\in[a,b]\right\}.$$

Через $\mathcal{P}_n, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, обозначим множество алгебраических полиномов над полем $\mathbb{R}$ степени не выше n. Для $f\in C([a,b])$ введем наилучшее равномерное приближение множеством $\mathcal{P}_n$, т.е.

$$E_n\left(f;[a,b]\right)=\inf\{\|f-p\|_{[a,b]}:p\in\mathcal{P}_n\}.$$

Для $f\in C\left([0,1]\right)$ через f^+ и f^- обозначим соответственно четное и нечетное продолжение f на отрезок $[-1,1]$:

$$f^+(x)=f(|x|),\quad f^-(x)=f(|x|)\operatorname{sign}x.$$

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ НАН Беларуси «Конвергенция» 2021–2025 гг.

Ясно, что $f^+ \in C([-1,1])$. При дополнительном условии $f(0)=0$ имеем также $f^- \in C([-1,1])$. Очевидно, что при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеют место неравенства

$$E_n\left(f^{\pm};[-1,1]\right) \geqslant E_n(f;[0,1]). \tag{1}$$

Естественно, для f^- предполагается, что $f(0)=0$. Основным результатом настоящей работы являются теоремы 1 и 2, в которых получены обращения неравенств (1).

Теорема 1. *Пусть $f \in C([0,1])$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$E_n\left(f^+;[-1,1]\right) \leqslant \frac{32\pi}{n}\left\{E_0(f;[0,1]) + \sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} kE_k(f;[0,1])\right\}. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $f \in C([0,1])$, причем $f(0)=0$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$E_n\left(f^-;[-1,1]\right) \leqslant \frac{2^{11}\pi}{n^2}\left\{\sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}} k^3E_k(f;[0,1])\right\}. \tag{3}$$

Из теорем 1 и 2 несложно получить соответственно следствия 1 и **??**.

Следствие 1. *Пусть $f \in C([0,1])$, $\alpha > 0$ и $E_n(f;[0,1]) = O(n^{-\alpha})$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ имеют место соотношения*

(i) $E_n\left(f^+;[-1,1]\right) = O\left(n^{-\alpha/2}\right)$ *при* $0<\alpha<2$;

(ii) $E_n\left(f^+;[-1,1]\right) = O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ *при* $\alpha=2$;

(iii) $E_n\left(f^+;[-1,1]\right) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *при* $\alpha>2$.

Следствие 2. *Пусть $f \in C([0,1])$, причем $f(0)=0$, $\alpha>0$ и $E_n(f;[0,1]) = O(n^{-\alpha})$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ имеют место соотношения*

(i) $E_n\left(f^-;[-1,1]\right) = O\left(n^{-\alpha/2}\right)$ *при* $0<\alpha<4$;

(ii) $E_n\left(f^-;[-1,1]\right) = O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$ *при* $\alpha=4$;

(iii) $E_n\left(f^-;[-1,1]\right) = O\left(n^{-2}\right)$ *при* $\alpha>4$.

Приведенные ниже примеры 1–3 показывают, что теоремы 1 и 2, а также следствия 1 и **??**, довольно хорошо отвечают на поставленный вопрос об обращении неравенств (1).

Пример 1 (см. [1])**.** Пусть $\alpha>0$ и $\varphi_\alpha(x) = x^{\alpha/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения

(i) $E_n(\varphi_\alpha;[0,1]) \asymp n^{-\alpha}$ при $\alpha/2 \notin \mathbb{N}$;
(ii) $E_n\left(\varphi_\alpha^+;[-1,1]\right) \asymp n^{-\alpha/2}$ при $\alpha/4 \notin \mathbb{N}$;
(iii) $E_n\left(\varphi_\alpha^-;[-1,1]\right) \asymp n^{-\alpha/2}$ при $(\alpha+2)/4 \notin \mathbb{N}$.

Пример 2 (см. [3, с. 424, 474])**.** Пусть $\psi(x) = x\ln x$ при $x \in (0,1]$ и $\psi(0)=0$. Тогда для $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ имеют место соотношения

(i) $E_n(\psi;[0,1]) \asymp \dfrac{1}{n^2}$;

(ii) $E_n\left(\psi^+;[-1,1]\right) \asymp \dfrac{\ln n}{n}$.

Пример 3 (см. [3, с. 425, 474])**.** Пусть $\lambda(x) = x^2\ln x$ при $x \in (0,1]$ и $\lambda(0)=0$. Тогда для $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ имеют место соотношения

(i) $E_n(\lambda;[0,1]) \asymp \dfrac{1}{n^4}$;

(ii) $E_n\left(\lambda^-;[-1,1]\right) \asymp \dfrac{\ln n}{n^2}$.

2. Доказательство основных результатов. Приведем сведения, необходимые для доказательства теорем 1 и 2. Обозначим через $L_\infty([a,b])$ пространство Лебега существенно ограниченных функций на отрезке $[a,b]$. Норма функции $f \in L_\infty([a,b])$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{[a,b]} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Очевидно, $C([a,b])$ является подпространством $L_\infty([a,b])$ и для функции $f \in C([a,b])$ ее норма в $L_\infty([a,b])$ совпадает с нормой в $C([a,b])$.

Обозначим через $W^s_\infty([a,b])$, $s \in \mathbb{N}$, пространство Соболева функций на отрезке $[a,b]$. Именно, $f \in W^s_\infty([a,b])$, если f непрерывно дифференцируема $s-1$ раз на $[a,b]$, $f^{(s-1)}$ абсолютно непрерывна и $f^{(s)} \in L_\infty([a,b])$.

Для доказательства теорем 1 и 2 применим теорему типа Джексона в следующей форме.

Теорема 3. *Пусть* $s = 1, 2$ *и* $n \in \mathbb{N}$. *Если* $f \in W^s_\infty([-1,1])$, *то*

$$E_n(f;[-1,1]) \leqslant \frac{\pi}{2n^s}\left\|f^{(s)}\right\|_{[-1,1]}. \tag{4}$$

Неравенство (4) следует из [4, теорема 4.2.5] и известных соотношений для констант Фавара [4, с. 5].

Будем использовать также неравенство Маркова [3, с. 233]. Для $p \in \mathcal{P}_n$, $n \geqslant 1$, справедлива оценка

$$\left\|p'\right\|_{[0,1]} \leqslant 2n^2 \|p\|_{[0,1]}. \tag{5}$$

Доказательство теоремы 1. Так как функция f^+ четная, то ее элемент наилучшего приближения из $\mathcal{P}_1$ также является четной функцией и, следовательно, принадлежит $\mathcal{P}_0$. Таким образом,

$$E_1\left(f^+;[-1,1]\right) = E_0\left(f^+;[-1,1]\right) = E_0(f;[0,1]).$$

Значит, неравенство (2) для $n=1$ выполняется.

Считаем далее $n \geqslant 2$. Через m обозначим наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $2^m \leqslant n$. Для $l = 0,1,\dots,m$ через p_l обозначим полином степени не выше 2^l наилучшего приближения f, т.е. $p_l \in \mathcal{P}_{2^l}$ и для него выполняется неравенство

$$\|f - p_l\|_{[0,1]} = E_{2^l}(f;[0,1]) =: \varepsilon_l.$$

Для удобства будем также считать, что p_{-1} — элемент наилучшего приближения из $\mathcal{P}_0$ и

$$\varepsilon_{-1} = E_{2^{-1}}(f;[0,1]) = E_0(f;[0,1]).$$

Для функции f справедливо равенство

$$f = p_{-1} + q_0 + q_1 + \ldots + q_m + r_m, \tag{6}$$

где $q_l = p_l - p_{l-1}$ при $l = 0,1,\dots,m$, а $r_m = f - p_m$. Следовательно,

$$f^+ = p_{-1} + q_0^+ + q_1^+ + \ldots + q_m^+ + r_m^+. \tag{7}$$

Здесь мы учли, что p_{-1} является константой и, значит, $p_{-1}^+ = p_{-1}$. Заметим, что

$$\|r_m^+\|_{[-1,1]} = \|r_m\|_{[0,1]} = \varepsilon_m. \tag{8}$$

Функции $q_0^+, q_1^+, \dots, q_m^+$ четны и принадлежат пространству $W^1_\infty([-1,1])$. Поэтому, применив неравенство Маркова (5), получим

$$\left\|(q_l^+)'\right\|_{[-1,1]} = \left\|q_l'\right\|_{[0,1]} \leqslant 2^{2l+1}\|q_l\|_{[0,1]} = 2^{2l+1}\|(f-p_{l-1}) - (f-p_l)\|_{[0,1]} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2l+1}\left(\|f-p_{l-1}\|_{[0,1]} + \|f-p_l\|_{[0,1]}\right) = 2^{2l+1}(\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l) \leqslant 2^{2l+2}\varepsilon_{l-1}, \quad l = 0,1,\dots,m.$$

Следовательно,

$$\left\|\left(p_{-1} + q_0^+ + q_1^+ + \ldots + q_m^+\right)'\right\|_{[-1,1]} \leqslant 4\sum_{l=0}^{m} 2^{2l}\varepsilon_{l-1} = 16\sum_{l=-1}^{m-1} 2^{2l}\varepsilon_l.$$

Используя равенства (6), (7), (8), последнее неравенство и неравенство типа Джексона (4), получим, что при $n \geqslant 2$ справедлива оценка

$$E_n\left(f^+;[-1,1]\right) \leqslant \|r_m^+\|_{[-1,1]} + E_n\left(p_{-1}^+ + \sum_{k=0}^{m} q_k^+;[-1,1]\right) \leqslant \varepsilon_m + \frac{\pi}{2n}\left\|\left(p_{-1}^+ + \sum_{k=0}^{m} q_k^+\right)'\right\|_{[-1,1]} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_m + \frac{8\pi}{n}\sum_{l=-1}^{m-1} 2^{2l}\varepsilon_l \leqslant \frac{2\pi}{n}\left(E_0\left(f;[0,1]\right) + 4\sum_{l=0}^{m} 2^{2l}E_{2^l}\left(f;[0,1]\right)\right). \quad (9)$$

Здесь мы учли, что

$$\varepsilon_m = \frac{2^{2(m+1)}}{2^{2(m+1)}}\varepsilon_m \leqslant \frac{4\cdot 2^{2m}}{n}\varepsilon_m.$$

Далее для краткости обозначим $E_k = E_k\left(f;[0,1]\right)$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, и учтем, что последовательность $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$ неотрицательна и не возрастает. Тогда для $l \in \mathbb{N}$ получим

$$2^{2l}E_{2^l} \leqslant 2^{l+1}\left(E_{2^{l-1}+1} + E_{2^{l-1}+2} + \ldots E_{2^l}\right) \leqslant 4\sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} kE_k.$$

Из (9) и последнего неравенства следует неравенство (2) для $n \geqslant 2$. □

Доказательство теоремы 2. Пусть n, m, p_l и ε_l такие же, как и при доказательстве теоремы 1. Поскольку $f(0) = 0$, то $|p_l(0)| \leqslant \varepsilon_l$. Положим $u_l = u_l(x) = p_l(x) - p_l(0)$. Тогда

$$\varepsilon_l \leqslant \|f - u_l\|_{[0,1]} = \left\|f^- - u_l^-\right\|_{[-1,1]} \leqslant 2\varepsilon_l. \quad (10)$$

Поскольку f^- и u_0 — нечетные функции, то из (10) получаем $E_1\left(f^-;[-1,1]\right) \leqslant 2E_1\left(f;[0,1]\right)$. Значит, неравенство (3) заведомо выполняется для $n = 1$. Поэтому далее считаем $n \geqslant 2$. Имеем

$$f^- - u_0 = v_1^- + v_2^- + \ldots + v_m^- + r_m^-, \quad (11)$$

где $v_l = u_l - u_{l-1}$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$ и $r_m = f - u_m$. Здесь мы учли, что $u_0^-(x) = u_0(x)$, $x \in [-1,1]$. Из (10) получаем

$$\|r_m^-\|_{[-1,1]} \leqslant 2\varepsilon_m = 2E_{2^m}\left(f;[0,1]\right), \quad (12)$$

и для всех $l = 1, 2, \ldots, m$ справедливы оценки

$$\|v_l\|_{[0,1]} = \Big\|\,(f - u_{l-1}) - (f - u_l)\,\Big\|_{[0,1]} \leqslant \|f - u_{l-1}\|_{[0,1]} + \|f - u_l\|_{[0,1]} \leqslant 2\varepsilon_{l-1} + 2\varepsilon_l \leqslant 4\varepsilon_{l-1}. \quad (13)$$

Функции $v_1^-, v_2^-, \ldots, v_m^-$ непрерывно дифференцируемы в точке 0, а на отрезках $[-1,0]$ и $[0,1]$ являются полиномами, следовательно, эти функции принадлежат пространству $W_\infty^2\left([-1,1]\right)$. Дважды применив неравенство А. А. Маркова (5), с учетом (13) получим

$$\left\|\left(v_l^-\right)''\right\|_{[-1,1]} = \left\|(v_l)''\right\|_{[0,1]} \leqslant 16\cdot 2^{4l}\varepsilon_{l-1}, \quad l = 1, 2, \ldots, m. \quad (14)$$

Из неравенства Джексона (4) для $s = 2$, равенства (11) и неравенств (12) и (14) получаем

$$E_n\left(f^-;[-1,1]\right) \leqslant \left\|r_m^-\right\|_{[-1,1]} + E_n\left(\sum_{l=2}^{m} v_l^-;[-1,1]\right) \leqslant 2\varepsilon_m + \frac{\pi}{2n^2}\left\|\left(\sum_{l=2}^{m} v_l^-\right)''\right\|_{[-1,1]} \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon_m + \frac{\pi}{2n^2}\sum_{l=2}^{m} 16\cdot 2^{4l}\varepsilon_{l-1} = 2\varepsilon_m + \frac{\pi}{n^2}2^7\sum_{l=1}^{m-1} 2^{4l}\varepsilon_l \leqslant \frac{2^7\pi}{n^2}\left(\sum_{l=1}^{m} 2^{4l}\varepsilon_l\right). \quad (15)$$

Здесь учтено, что

$$\varepsilon_m = \frac{2^{4(m+1)}}{2^{4(m+1)}}\varepsilon_m \leqslant \frac{2^4\cdot 2^{4m}}{n^2}\varepsilon_m.$$

В силу неотрицательности и невозрастания $E_k = E_k(f;[0,1])$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$2^{4l} E_{2^l} \leqslant 2^{3l+1}\left(E_{2^{l-1}+1} + E_{2^{l-1}+2} + \ldots + E_{2^l}\right) \leqslant 2^4 \sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} k^3 E_k.$$

Из (15) и последней оценки следует (3). □

3. Рациональная аппроксимация четного и нечетного продолжения функции. Вопросы, обсуждаемые в данной статье, естественным образом возникли при изучении вопросов рациональной аппроксимации четного и нечетного продолжений непрерывных функций.

Обозначим через $\mathcal{R}_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ множество алгебраических рациональных функций степени не выше n с действительными коэффициентами. Для $f \in C[a,b]$ будем рассматривать наилучшие равномерные рациональные приближения

$$R_n(f;[a,b]) := \inf\left\{\|f-r\|_{[a,b]} : r \in \mathcal{R}_n\right\}.$$

Очевидно, что для наилучшего рационального приближения $f \in C([0,1])$ и ее четного и нечетного продолжений на $[-1,1]$ справедливы неравенства

$$R_n\left(f^{\pm};[-1,1]\right) \geqslant R_n(f;[0,1]), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{16}$$

Здесь для f^- предполагается, что $f(0)=0$. В [2] доказана следующая теорема для наилучших рациональных приближений четного продолжения непрерывной функции.

Теорема 4. *Для любой функции $f \in C([0,1])$ и любых $n, s \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$R_{2n}\left(f^+;[-1,1]\right) \leqslant \frac{c(s)}{n^s}\left[\sum_{k=0}^{n} \sqrt[s]{R_k(f;[0,1])}\right]^s,$$

где $c(s)$ — некоторая положительная величина, зависящая от s.

Отметим, что в [2] теорема 4 получена не только для отрезка, но и для функций, непрерывных на расширенной полуоси $[0,+\infty]$ и продолженной четным образом на расширенную числовую прямую.

Рассматривая случай, когда наилучшие рациональные приближения имеют порядок стремления к нулю не выше степенного, из неравенства (16) и теоремы 4, получаем интересное следствие.

Следствие 3. *Пусть $f \in C([0,1])$ и $\alpha \in (0,+\infty)$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ справедлива эквивалентность*

$$R_n\left(f^+;[-1,1]\right) = O\left(n^{-\alpha}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad R_n(f;[0,1]) = O\left(n^{-\alpha}\right).$$

В качестве примера, демонстрирующего применение теоремы 4, рассмотрим следующие функции с логарифмическими особенностями:

$$h_{\nu\beta}(x) = \left(\ln_{(\nu)} \frac{a}{x}\right)^{-\beta}, \quad 0 < x \leqslant 1; \quad h_{\nu\beta}(0) = 0.$$

Здесь $\nu \in \mathbb{N}$ означает порядок итерации логарифма, т.е. $\ln_{(1)}(\cdot) = \ln(\cdot)$ и $\ln_{(\nu)}(\cdot) = \ln(\ln_{(\nu-1)}(\cdot))$ при $\nu \geqslant 2$. Число $\beta > 0$; $a > 1$ и достаточно велико, чтобы функция $\ln_{(\nu)}(a/x)$ была положительна при $x \in (0,1]$. Именно, $a > 1$ при $\nu = 1$, $a > e$ при $\nu = 2$, $a > e^e$ при $\nu = 3$ и т. д.

Для наилучших рациональных приближений функций $h_{\nu\beta}$ при указанных значениях ν, β и α справедливы следующие порядковые оценки:

$$R_n(h_{1\beta};[0,1]) \asymp R_n\left(h_{1\beta}^+;[-1,1]\right) \asymp \frac{1}{n^{1+\beta}}, \quad n \geqslant 1; \tag{17}$$

$$R_n(h_{\nu\beta};[0,1]) \asymp R_n\left(h_{\nu\beta}^+;[-1,1]\right) \asymp \frac{1}{n\left(\ln_{(\nu-1)} n\right)^{\beta}}, \quad \nu \geqslant 2, \quad n \geqslant n(\nu). \tag{18}$$

Исследованием наилучших рациональных приближений функций $h_{\nu\beta}$ занимались А. А. Гончар, А. П. Буланов, А. А. Пекарский и др. (см. подробнее [2]). В [2] найдены также точные порядки наилучших рациональных приближений нечетного продолжения функций $h_{\nu\beta}$:

$$R_n\left(h^-_{1\beta};[-1,1]\right) \asymp \frac{1}{n^\beta}, \quad n \geqslant 1;$$
$$R_n\left(h^-_{\nu\beta};[-1,1]\right) \asymp \frac{1}{\left(\ln_{(\nu-1)} n\right)^\beta} \quad \text{при} \quad \nu \geqslant 2, \quad n \geqslant n(\nu).$$

Из этих соотношений видно, что обращение неравенства (16) для f^- без потери скорости стремления к нулю последовательности $\{R_n\,(f^-;[-1,1])\}_{n=1}^\infty$ по сравнению с $\{R_n\,(f;[0,1])\}_{n=1}^\infty$ невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов И. И.* О наилучшем приближении многочленами функций $[ax+b|x|]|x|^s$ на отрезке $[-1,1]$// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1950. — *14*, № 5. — С. 405–412.
2. *Мардвилко Т. С., Пекарский А. А.* Применение действительного пространства Харди—Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций// Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2022. — С. 16–36.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функции действительного переменного. — М.: ГИФМЛ, 1960.
4. *Bustamante J.* Algebraic Approximation: A Guide to Past and Current Solutions. — Basel AG: Springer, 2012.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ НАН Беларуси «Конвергенция» 2021–2025 гг.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Мардвилко Татьяна Сергеевна
Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь
E-mail: mardvilko@gmail.com