ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 20–40
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-20-40

УДК 519.218.7

РЕКОНСТРУКЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ТРАЕКТОРИЙ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

© 2023 г. **Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. С. МАЗМАНИШВИЛИ**

Посвящается светлой памяти нашего наставника
академика Национальной академии наук Украины А. И. Ахиезера (1911–2000)

Аннотация. Изучаются характеристические функции $Q_J(-i\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, случайных величин, определяемых значениями квадратичных функционалов $\mathsf{J}[\tilde{x}(t)]$ на пространстве $\mathbb{L}_2[0,T]$ траекторий однородных гауссовских случайных процессов. В работе обоснован метод вычисления таких характеристических функций, названный в работе реконструкцией, применение которой не связано с использованием известного метода Карунена—Лоэва—Пугачева.

Ключевые слова: гауссовский случайный процесс, интеральный квадратичный функционал, корреляционная функция, самосопряженный оператор, характеристическая функция.

RECONSTRUCTION OF CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF QUADRATIC FUNCTIONALS ON TRAJECTORIES OF GAUSSIAN STOCHASTIC PROCESSES

© 2023 **Yu. P. VIRCHENKO, A. S. MAZMANISHVILI**

Abstract. In this paper, we examine the characteristic functions $Q_J(-i\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, of stochastic variables determined by the values of the quadratic functionals $\mathsf{J}[\tilde{x}(t)]$ on the space $\mathbb{L}_2[0,T]$ of trajectories of homogeneous Gaussian stochastic processes. We justify a method for calculating such characteristic functions, called reconstruction in the work, the application of which is not related to the use of the well-known Karhunen–Loeve–Pugachev method.

Keywords and phrases: Gaussian stochastic process, integral quadratic functional, correlation function, self-adjoint operator, characteristic function.

AMS Subject Classification: 60G15

1. Введение. В задачах статистической радиофизики (см. [9]) и квантовой оптики (см. [17]), связанных с приемом сигналов на фоне естественных случайных помех, возникает необходимость вычисления распределения вероятностей случайных величин, которые представляются значениями функционалов $\mathsf{J}[\tilde{x}(t) + \varphi(t)]$ на функциях, представляющих собой сумму реализаций случайного процесса $\{\tilde{x}(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ и «неслучайной» функции $\varphi(t)$. (Здесь и далее мы помечаем знаком «тильда» случайные математические объекты, т.е. элементы некоторого вероятностного пространства.) Для этого процесса математическое ожидание $\mathsf{E}\,\tilde{x}(t)$ равно нулю. Первое слагаемое мы в дальнейшем называем «шумом», а второе — «сигнальной функцией». Для математической определенности, будем считать, что оба слагаемых являются измеримыми, локально квадратично интегрируемыми функциями, т.е. элементами пространства $\mathbb{L}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Функционалы $\mathsf{J}[\cdot]$, которые представляют интерес для задач статистической радиофизики и квантовой оптики, как правило, являются квадратичными. Это связано с тем, что регистрация электромагнитного излучения происходит посредством поглощения его энергии, которая зависит квадратичным образом от амплитуды самого электромагнитного поля. Случайные же процессы $\{\tilde{x}(t); t \in \mathbb{R}\}$, в терминах которых ставятся задачи в указанных областях математической физики, считаются, как правило, гауссовскими (см., например, [14]); более того, они мыслятся как элементарные гауссовское процессы (см. [13]). Моделирование шумовой составляющей посредством гауссовских процессов обусловлено ее малостью в физическом смысле.

Впервые описанный подход к решению некоторых вопросов статистической радиофизики бы осуществлен в [15, 23]. Впоследствии он получил развитие в большом числе работ. Целью в этих работах являлось вычисление распределения вероятностей для соответствующего функционала $\mathsf{J}[\cdot]$. Решение такой задачи состоит из двух частей: вычисления соответствующей характеристической функции $Q_J(-i\lambda)$, что сводится к вычислению интеграла от $\exp(i\lambda\,\mathsf{J}[\tilde{x}(t)])$ в функциональном пространстве $\mathbb{L}_2([0,T])$ при некотором фиксированном значении $T > 0$, и последующего вычисления плотности распределения вероятностей. Вторая задача представляет собой вычисление интеграла в комплексной плоскости параметра λ от аналитической функции. Такое вычисление осуществимо, как правило, лишь приближенно и представляет собой самостоятельную математическую задачу. В случае, если интегральное ядро принадлежит $\mathbb{L}_2([0,T]) \times \mathbb{L}_2([0,T])$, то для вычисления интеграла в функциональном пространстве применяются методы анализа в гильбертовом пространстве. Такой подход был развит рядом авторов [12, 16, 18, 22]. В процессе анализа вычисляется детерминант Фредгольма интегрального оператора с ядром $(\mathsf{KV})(t,t')$, где $K(t,t')$ — корреляционная функция случайного процесса $\{\tilde{x}(t); t \in \mathbb{R}\}$. Этот оператор определяет характеристическую функцию случайной величины $\mathsf{J}[\tilde{x}(t)]$. Для определения же характеристической функции суммарного случайного процесса $\langle \tilde{x}(t) + \varphi(t); t \in [0,T]\rangle$ на конечном интервале $[0,T]$ необходимо решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $(\mathsf{VK})(t,t')$.

В настоящей работе мы даем математическое обоснование метода вычисления характеристических функций $Q_J(-i\lambda)$ квадратичных функционалов, который не связан с методом Карунена—Лоэва—Пугачева (см. [12,16,18]), основанным на вычислении интеграла в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2([0,T])$ посредством разложения траекторий $\tilde{x}(t)$ случайного процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0,T]\}$ по собственным векторам в пространстве $\mathbb{L}_2([0,T])$ над вещественным полем. В настоящей работе анализируется метод, который использует прямые алгебраические методы и свойства аналитической зависимости от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ изучаемых характеристических функций как функций комплексного переменного. При этом мы ограничиваемся только случаем, когда сигнальная составляющая $\varphi(t)$ отсутствует. Кроме того, используем довольно сильное предположение о непрерывной зависимости интегрального ядра $V(t,t')$.

2. Гауссовские случайные процессы. Пусть $\{\tilde{x}(t); t \in [0,T]\}$ — случайный процесс на $[0,T]$, для которого $\mathsf{E}\,\tilde{x}(t) = 0$. Такие процессы мы называем однородными. Здесь и далее функционал E от траекторий рассматриваемого случайного процесса представляет математическое ожидание по его вероятностной мере.

Каждый случайный процесс $\{\tilde{x}(t); t \in [0,T]\}$, обладающий измеримыми с вероятностью 1 траекториями, полностью характеризуется своим характеристическим функционалом

$$\Phi[u(t)] \equiv \mathsf{E}\exp\left(i\int_0^T u(t)\tilde{x}(t)dt\right), \tag{2.1}$$

где $u(t)$ — произвольная непрерывная (пробная) функция на $[0,T]$. Имея в виду цель настоящей работы, дадим следующее определение гауссовского процесса.

Определение 2.1. Случайный процесс $\{\tilde{x}(t); t \in [0,T]\}$, имеющий с вероятностью 1 измеримые по t траектории и нулевое математическое ожидание $\mathsf{E}\,\tilde{x}(t) = 0$ и обладающий ограниченной измеримой корреляционной функцией $K(t_1,t_2) = \mathsf{E}\,\tilde{x}(t_1)\tilde{x}(t_2)$, которая, согласно своему определению, симметрична, будем называть гауссовским, если его характеристический функционал определяется формулой

$$\Phi[u(t)] = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{[0,T]^2} K(t_1,t_2)dt_1dt_2\right). \tag{2.2}$$

Относительно свойств рассматриваемых далее гауссовских процессов сделаем следующие предположения, пожертвовав общностью построений. Мы предположим, что они обладают непрерывными с вероятностью 1 траекториями. Более того, предположим, что корреляционная функция процесса $K(t_1,t_2)$ непрерывна по $\langle t_1,t_2\rangle \in [0,T]^2$. Тогда наверняка все траектории непрерывны с вероятностью 1 и, следовательно, принадлежат $\mathbb{L}_2([0,T])$, т.е.

$$\int\limits_0^T \tilde{x}^2(t)dt < \infty,$$

а симметричная функция $K(t_1,t_2)$ принадлежит $\mathbb{L}_2([0,T]) \times \mathbb{L}_2([0,T])$, ввиду того, что

$$\int\limits_{[0,T]^2} K^2(t_1,t_2)dt_1dt_2 < \infty.$$

В этом случае интегральный оператор K, ядром которого является функция $K(t_1,t_2)$,

$$\big(\mathsf{K}\varphi\big)(t) = \int\limits_0^T K(t,t')\varphi(t')dt',$$

является оператором Гильберта—Шмидта (см. [20]) из операторного пространства с конечной нормой, определяемой формулой

$$\mathsf{N}^2[\mathsf{K}] = \mathrm{Sp}\,\mathsf{K}\mathsf{K}^{\mathrm{T}} = \int\limits_{[0,T]^2} K(t_1,t_2)K(t_2,t_1)dt_2dt_1.$$

Согласно определению (2.1), функция $K(t_1,t_2)$ положительно определена, так как для любой функции $u(t) \in \mathbb{L}_2([0,T])$ имеет место равенство

$$\int\limits_{[0,T]^2} K(t_1,t_2)u(t_1)u(t_2)dt_1dt_2 = \int\limits_{[0,T]^2} \Big(\mathsf{E}\left[\tilde{x}(t_1)\tilde{x}(t_2)\right]\Big)u(t_1)u(t_2)dt_1dt_2 = \mathsf{E}\left|\int\limits_0^T \tilde{x}(t)u(t)dt\right|^2 \geqslant 0,$$

что составляет предмет теоремы Бохнера—Хинчина.

Из определения 2.1 следует, что функционал $\Phi[u(t)]$ обладает вариационными производными любого порядка относительно *пробной* функции $u(t)$ в точке $u(t) \equiv 0$ функционального пространства $\mathrm{C}[0,T]$ непрерывных на $[0,T]$ функций. Вычисляя эти производные, последовательных порядков $n \in \mathbb{N}$, находим, что для выполнимости (2.2), необходимо выполнение равенств

$$\mathsf{E}\,\tilde{x}(t_1)\ldots\tilde{x}(t_{2n-1}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{2.3}$$

$$\mathsf{E}\,\tilde{x}(t_1)\ldots\tilde{x}(t_{2n}) = \sum_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{D}_n}\prod_{\{j,k\}\in\mathfrak{s}} K(t_j,t_k), \tag{2.4}$$

где суммирование производится по классу $\mathfrak{D}_n$ всех парных разбиений $\mathfrak{s}$ множества $\{1,2,\ldots,2n\}$. Равенства (2.3), (2.4) является также достаточным условием для выполнимости формулы (2.2), что следует из ограниченности функции $K(t_1,t_2)$ и комбинаторной формулы

$$|\mathfrak{D}_n| = (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n\,n!}.$$

Таким образом, эти равенства является эквивалентным определением гауссовского процесса $\{\tilde{x}(t);\ t \in [0,T]\}$ при сделанных предположениях относительно его свойств.

Введем обозначения

$$\Psi(A) = \mathsf{E}\left(\prod_{j\in A}\tilde{x}(t_j)\right), \quad A \subset I_m = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Тогда из (2.3), (2.4) следует рекуррентное соотношение

$$\Psi(I_{m+2}) = K(t_{m+1}, t_{m+2})\Psi(I_m) + \sum_{\substack{\langle j,k\rangle\in I_m^2,\\ j\neq k}} K(t_j, t_{m+1})K(t_l, t_{m+2})\Psi(I_m \setminus \{j,k\})|.$$

Оно эквивалентно равенствам (2.3) и (2.4), что устанавливается индукцией по m на основе условий $\Psi(\{1\}) = \mathsf{E}\,\tilde{x}(t_1) = 0$, $\Psi(\{1,2\}) = \mathsf{E}\,\tilde{x}(t_1)\tilde{x}(t_2) = K(t_1, t_2)$. Из равенств (2.3), (2.4) вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ — полином от $x_1, \ldots, x_n$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathsf{E}\,\tilde{x}(t_{n+1})P(\tilde{x}(t_1), \ldots, \tilde{x}(t_n)) = \sum_{j=1}^{n} K(t_j, t_{n+1})\,\mathsf{E}\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)_{x_k=\tilde{x}(t_k)}. \tag{2.5}$$

Доказательство следует из линейности функционала $\mathsf{E}(\cdot)$ и формул (2.3) и (2.4).

Следствие 2.1. *Имеет место формула*

$$\Psi(I_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n} K(t_j, t_{n+1})\Psi(I_n \setminus \{j\}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Формула (2.6) получается из (2.5) при $P(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$. □

Следствие 2.2. *Имеет место формула*

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\,\tilde{x}(t_{m+2})\tilde{x}(t_{m+1})P\big(\tilde{x}(t_1), \ldots, \tilde{x}(t_m)\big) = \\ &= K(t_{m+2}, t_{m+1})P(\tilde{x}(t_1), \ldots, \tilde{x}(t_m)) + \sum_{\substack{\langle j,k\rangle\in I_m^2,\\ j\neq k}} K(t_{m+2}, t_j)K(t_{m+1}, t_k)\,\mathsf{E}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k}\right)_{x_l=\tilde{x}(t_l)}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Доказательство. Подставим $n = m + 1$ в (2.5) и заменим функцию $P(x_1, \ldots, x_n)$ на $x_{m+1}P(x_1, \ldots, x_m)$; после отделения слагаемого с $j = m + 1$ в правой части получившегося равенства повторно применим формулу (2.5) к каждому слагаемому с $j = 1, \ldots, m$. □

Следствие 2.3. *Из формулы* (2.6) *следует равенство* (2.4).

Доказательство. Заменим $n = m + 1$ в формуле (2.6),

$$\Psi(I_{m+2}) = \sum_{j=1}^{m+1} K(t_j, t_{m+2})\Psi(I_{m+1} \setminus \{j\}).$$

Затем применим формулу (2.6) к каждому из слагаемых, стоящих в правой части, с $j \neq m + 1$:

$$\Psi(I_{m+1} \setminus \{j\}) = \sum_{\substack{k=1:\\ k\neq j}}^{m} K(t_k, t_{m+1})\Psi(I_m \setminus \{j,k\}).$$

Отделив слагаемое с $j = m + 1$ в правой части, находим

$$\Psi(I_{m+2}) = K(t_{m+1}, t_{m+2})\Psi(I_m) + \sum_{j=1}^{m} K(t_j, t_{m+2}) \sum_{\substack{k=1:\\ k\neq j}}^{m} K(t_k, t_{m+1})\Psi(I_m \setminus \{j,k\}). \qquad \square$$

Следствие 2.4. *Для того чтобы выполнялись равенства* (2.3) *и* (2.4) *при условии* $\mathsf{E}\,\tilde{x}(t) = 0$, $\mathsf{E}\,\tilde{x}(t_1)\tilde{x}(t_2) = K(t_1, t_2)$, *необходимо и достаточно чтобы при тех же условиях имело место равенство* (2.6).

Доказательство. Необходимость справедливости утверждения дает следствие 2.1. Достаточность получается рассуждением индукцией по m на основании следствия 2.3: применяем формулу (2.6), переходя от значения m к значению $m + 2$, стартовав на начальном шаге от условий $\mathsf{E}\,\tilde{x}(t) = 0$ при нечетном m, либо $\mathsf{E}\,\tilde{x}(t_1)\tilde{x}(t_2) = K(t_1, t_2)$ при m четном. □

3. Комплексификация гауссовского процесса. Этот и следующий разделы посвящены обоснованию предлагаемого в работе метода расчета характеристических функций случайных величин, которые определяются значениями функционалов $\mathsf{J}[\tilde{x}(t)]$ от траекторий $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, T]$. Здесь мы переформулируем определение гауссовоского процесса, данное в предыдущем разделе, таким образом, чтобы можно было оперировать его траекториями как элементами гильбертова пространства $\mathbb{L}_2[0, T]$ над полем комплексных чисел. Такая переформулировка основана на комплексификации процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$, т.е. на переходе от этого процесса к эквивалентному ему комплекснозначному гауссовскому случайному процессу $\{\tilde{z}(t); t \in [0, T]\}$.

Введем, на основе процесса $\{\tilde{x}(t);\ t \in [0, T]\}$ комплекснозначный случайный процесс $\{\tilde{z}(t);\ t \in [0, T]\}$ с траекториями $\tilde{z}(t) = \tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t)$, где случайный процесс $\{\tilde{y}(t);\ t \in [0, T]\}$ статистически эквивалентен процессу $\{\tilde{x}(t);\ t \in [0, T]\}$, то есть является гауссовским с нулевым средним значением $\mathsf{E}\,\tilde{y}(t) = 0$ и с той же самой корреляционной функцией $K(t_1, t_2)$. Кроме того, потребуем чтобы процесс $\{\tilde{y}(t);\ t \in [0, T]\}$ был статистически независим от процесса $\{\tilde{x}(t);\ t \in [0, T]\}$.

На основе свойств процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$, выражаемых равенствами (2.3), (2.4), доказываются следующие свойства процесса $\{\tilde{z}(t); t \in [0, T]\}$ (см. [21]), которые определяют его однозначным образом. С точки зрения квантовой теории поля и/или квантовой статистической механики эти равенства имеют смысл так называемых *правил Вика* в применении к гауссовскому случайному процессу (см. [21]).

Теорема 3.1. *Для математических ожиданий случайного процесса* $\{\tilde{z}(t);\ t \in [0, T]\}$ *справедливы формулы*

$$\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_1)\ldots\tilde{z}(t_m)\tilde{z}^*(t'_1)\ldots\tilde{z}^*(t'_n) = 0, \quad m \neq n,\ m, n \in \mathbb{N}; \tag{3.1}$$

$$\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_1)\ldots\tilde{z}(t_n)\tilde{z}^*(t'_1)\ldots\tilde{z}^*(t'_n) = \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n}\prod_{j=1}^{n}\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_j)\tilde{z}^*(t'_{\mathsf{P}j}), \tag{3.2}$$

где суммирование производится по всем подстановкам P *группы подстановок* $\mathbb{P}_n$.

Доказательство. Доказательство состоит из трех частей.

I. Сначала установим равенство

$$\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_1)\ldots\tilde{z}(t_m) = 0.$$

Воспользовавшись тем, что $\mathsf{E}\,\tilde{z}(t) = \mathsf{E}\,\big(\tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t)\big) = 0$, запишем

$$\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_1)\ldots\tilde{z}(t_m)\tilde{z}(t_{m+1}) = \mathsf{E}\,\tilde{z}(t_1)\ldots\tilde{z}(t_m)\tilde{x}(t_{m+1}) + i\,\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_1)\ldots\tilde{z}(t_m)\tilde{y}(t_{m+1}). \tag{3.3}$$

Ввиду статистической независимости процессов $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ и $\{\tilde{y}(t); t \in [0, T]\}$ математические ожидания по ним допустимо производить независимо: $\mathsf{E}(\cdot) = \mathsf{E}_x(\cdot)\,\mathsf{E}_y(\cdot)$. Применим формулу (2.5) поочередно к каждому из слагаемых. Первое математическое ожидание дает

$$\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_1)\ldots\tilde{z}(t_m)\tilde{x}(t_{m+1}) = \mathsf{E}_x\,P_x(\tilde{x}(t_1), \ldots, \tilde{x}(t_m))\tilde{x}(t_{m+1}) = \sum_{j=1}^{m} K(t_j, t_m)\,\mathsf{E}_x\left(\frac{\partial P_x}{\partial x_j}\right)_{x_k = \tilde{x}(t_k)},$$

где $P_x(x(t_1), \ldots, x(t_m)) = \mathsf{E}_y\,\tilde{z}(t_1)\ldots\tilde{z}(t_m)$, и поэтому

$$\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_1)\ldots\tilde{z}(t_m)\tilde{x}(t_{m+1}) = \sum_{j=1}^{m} K(t_j, t_m)\,\mathsf{E}_x\,\mathsf{E}_y\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{m}\tilde{z}(t_k) = \sum_{j=1}^{m} K(t_j, t_m)\,\mathsf{E}\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{m}\tilde{z}(t_k).$$

Точно так же, второе математическое ожидание дается формулой

$$\mathsf{E}\,\tilde z(t_1)\dots\tilde z(t_m)\tilde y(t_{m+1}) = \mathsf{E}_y\,P_y(\tilde y(t_1),\dots,\tilde y(t_m))\tilde y(t_{m+1}) = \sum_{j=1}^{m} K(t_j,t_m)\,\mathsf{E}_y\left(\frac{\partial P_y}{\partial y_j}\right)_{y_k=\tilde y(t_k)},$$

где $P_y(y(t_1),\dots,y(t_m)) = \mathsf{E}_x\,\tilde z(t_1)\dots\tilde z(t_m)$, и поэтому

$$\mathsf{E}\,\tilde z(t_1)\dots\tilde z(t_m)\tilde y(t_{m+1}) = i\sum_{j=1}^{m} K(t_j,t_m)\,\mathsf{E}_y\,\mathsf{E}_x\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{m}\tilde z(t_k) = i\sum_{j=1}^{m} K(t_j,t_m)\,\mathsf{E}\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{m}\tilde z(t_k).$$

Подстановка при $m\geqslant 1$ полученных выражений в (3.3) дает

$$\mathsf{E}\,\tilde z(t_1)\dots\tilde z(t_m)\tilde z(t_{m+1}) = \sum_{j=1}^{m}(K(t_j,t_m)-K(t_j,t_m))\,\mathsf{E}\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{m}\tilde z(t_k) = 0.$$

II. Положим, теперь, для определенности, что $m>n$ в формуле (3.1) и докажем ее справедливость методом спуска по n от значения $n=m-1$ к значению $n=0$. Преобразуем математическое ожидание таким же образом, как это было сделано выше:

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= \mathsf{E}\,\tilde z(t_1)\dots\tilde z(t_m)\tilde z^*(t_1')\dots\tilde z^*(t_{n-1})\tilde z^*(t_n') = \\ &= \mathsf{E}\left[\tilde z(t_1)\dots\tilde z(t_m)\tilde z^*(t_1')\dots\tilde z^*(t_{n-1})\tilde x(t_n')\right] - i\,\mathsf{E}\left[\tilde z(t_1)\dots\tilde z(t_m)\tilde z^*(t_1')\dots\tilde z^*(t_{n-1})\tilde y(t_n')\right] = \\ &= \mathsf{E}_x\,P_x\big(\tilde x(t_1),\dots,\tilde x(t_m),\tilde x(t_1'),\dots,\tilde x(t_{n-1})\big)\tilde x(t_n') - \\ &\qquad - i\,\mathsf{E}_y\,P_y\big(\tilde y(t_1),\dots,\tilde y(t_m),\tilde y(t_1'),\dots,\tilde y(t_{n-1}')\big)\tilde y(t_n'), \end{aligned} \tag{3.4}$$

где полиномы P_x и P_y определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_x\big(\tilde x(t_1),\dots,\tilde x(t_m),\tilde x(t_1')\dots\tilde x(t_{n-1}')\big) &= \mathsf{E}_y\left[\tilde z(t_1)\dots\tilde z(t_m),\tilde z^*(t_1')\dots\tilde z^*(t_{n-1}')\right], \\ P_y\big(\tilde y(t_1),\dots,\tilde y(t_m),\tilde y(t_1')\dots\tilde y(t_{n-1}')\big) &= \mathsf{E}_x\left[\tilde z(t_1)\dots\tilde z(t_m),\tilde z^*(t_1')\dots\tilde z^*(t_{n-1}')\right]. \end{aligned}$$

Согласно (2.5) первое слагаемое равно

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}_x\,P_x\big(\tilde x(t_1),\dots,\tilde x(t_m),\tilde x(t_1'),\dots,\tilde x(t_{n-1}')\big)\tilde x(t_n') = \\ &\quad= \sum_{j=1}^{m} K(t_j,t_n')\,\mathsf{E}_x\left[\left(\frac{\partial P_x}{\partial x_j}\right)_{\substack{x_k=\tilde x(t_k),\\ x_k'=\tilde x(t_k')}}\right] + \sum_{j=1}^{n-1} K(t_j',t_n')\,\mathsf{E}_x\left[\left(\frac{\partial P_x}{\partial x_j'}\right)_{\substack{x_k=\tilde x(t_k),\\ x_k'=\tilde x(t_k')}}\right] = \\ &= \sum_{j=1}^{m} K(t_j,t_n')\,\mathsf{E}\left[\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{m}\tilde z(t_k)\right]\left[\prod_{k=1}^{n-1}\tilde z^*(t_k')\right] + \sum_{j=1}^{n-1} K(t_j',t_n')\,\mathsf{E}\left[\prod_{k=1}^{m}\tilde z(t_k)\right]\left[\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{n-1}\tilde z^*(t_k')\right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Точно так же получается выражение для математического ожидания

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}_y\,P_y\big(\tilde y(t_1),\dots,\tilde y(t_m),\tilde y(t_1'),\dots,\tilde y(t_{n-1}')\big)\tilde y(t_n') = \\ &= \sum_{j=1}^{m} K(t_j,t_n')\,\mathsf{E}\left[\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{m}\tilde z(t_k)\right]\left[\prod_{k=1}^{n-1}\tilde z^*(t_k')\right] - i\sum_{j=1}^{n-1} K(t_j',t_n')\,\mathsf{E}\left[\prod_{k=1}^{m}\tilde z(t_k)\right]\left[\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{n-1}\tilde z^*(t_k')\right]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Правые части формул (3.5) и (3.6) определяются математическими ожиданиями вида $E_{n-1,m}$. Последовательно повторяя описанные построения, для выражений $E_{n-1,m}$, $E_{n-2,m}$, ..., на j-м шаге получим

$$
\begin{aligned}
E_{n-j,m} &= \mathsf{E}\,\tilde z(t_1)\ldots\tilde z(t_m)\tilde z^*(t'_1)\ldots\tilde z^*(t'_{n-j}) = \\
&= \mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{m}\tilde z(t_j)\right]\left[\prod_{j=1}^{n-j-1}\tilde z^*(t'_j)\right]\tilde x(t'_{n-j}) - i\,\mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{m}\tilde z(t_j)\right]\left[\prod_{j=1}^{n-j-1}\tilde z^*(t'_j)\right]\tilde y(t'_{n-j}) = \\
&= \mathsf{E}_x\,P_x\big(\tilde x(t_1),\ldots,\tilde x(t_m),\tilde x(t'_1),\ldots,\tilde x(t'_{n-j-1})\big)\tilde x(t'_{n-j}) - \\
&\qquad - i\,\mathsf{E}_y\,P_y\big(\tilde y(t_1),\ldots,\tilde y(t_m),\tilde y(t'_1),\ldots,\tilde y(t'_{n-j-1})\big)\tilde y(t'_{n-j}), \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

где полиномы P_x и P_y определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
P_x\big(\tilde x(t_1),\ldots,\tilde x(t_m),\tilde x(t'_1)\ldots\tilde x(t'_{n-j-1})\big) &= \mathsf{E}_y\left[\tilde z(t_1)\ldots\tilde z(t_m),\tilde z^*(t'_1)\ldots\tilde z^*(t'_{n-j-1})\right],\\
P_y\big(\tilde y(t_1),\ldots,\tilde y(t_m),\tilde y(t'_1)\ldots\tilde y(t'_{n-j-1})\big) &= \mathsf{E}_x\left[\tilde z(t_1)\ldots\tilde z(t_m),\tilde z^*(t'_1)\ldots\tilde z^*(t'_{n-j-1})\right].
\end{aligned}
$$

Здесь первое слагаемое равно

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}_x\,P_x\big(\tilde x(t_1),\ldots,\tilde x(t_m),\tilde x(t'_1),\ldots,\tilde x(t'_{n-j-1})\big)\tilde x(t'_{n-j}) = \\
&= \sum_{j=1}^{m}K(t_j,t'_{n-j})\,\mathsf{E}_x\left[\Big(\frac{\partial P_x}{\partial x_j}\Big)_{\substack{x_k=\tilde x(t_k),\\ x'_k=\tilde x(t'_k)}}\right] + \sum_{j=1}^{n-j-1}K(t'_j,t'_{n-j})\,\mathsf{E}_x\left[\Big(\frac{\partial P_x}{\partial x'_j}\Big)_{\substack{x_k=\tilde x(t_k),\\ x'_k=\tilde x(t'_k)}}\right] = \\
&= \sum_{j=1}^{m}K(t_j,t'_{n-j})\,\mathsf{E}\left[\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{m}\tilde z(t_k)\right]\left[\prod_{k=1}^{n-j-1}\tilde z^*(t'_k)\right] + \sum_{j=1}^{n-j-1}K(t'_j,t'_{n-j})\,\mathsf{E}\left[\prod_{k=1}^{m}\tilde z(t_k)\right]\left[\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{n-j-1}\tilde z^*(t'_k)\right].
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Аналогично,

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}_y\,P_y\big(\tilde y(t_1),\ldots,\tilde y(t_m),\tilde y(t'_1),\ldots,\tilde y(t'_{n-j-1})\big)\tilde y(t'_{n-j}) = \\
&= \sum_{j=1}^{m}K(t_j,t'_{n-j})\,\mathsf{E}\left[\prod_{k=1:j\neq k}^{m}\tilde z(t_k)\right]\left[\prod_{k=1}^{n-j-1}\tilde z^*(t'_k)\right] - i\sum_{j=1}^{n-j-1}K(t'_j,t'_{n-j})\,\mathsf{E}\left[\prod_{k=1}^{m}\tilde z(t_k)\right]\left[\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{n-j-1}\tilde z^*(t'_k)\right].
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Таким образом, математическое ожидание $E_{n-j,m}$ выражается через математические ожидания типа $E_{n-j-1,m}$. Тогда при $j = n-1$ математическое ожидание принимает вид

$$
\begin{aligned}
E_{1,m} &= \mathsf{E}\,\tilde z(t_1)\ldots\tilde z(t_m)\tilde z^*(t'_1) = \mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{m}\tilde z(t_j)\right]\tilde x(t'_1) - i\,\mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{m}\tilde z(t_j)\right]\tilde y(t'_1) = \\
&= \mathsf{E}_x\,P_x\big(\tilde x(t_1),\ldots,\tilde x(t_m)\big)\tilde x(t'_1) - i\,\mathsf{E}_y\,P_y\big(\tilde y(t_1),\ldots,\tilde y(t_m)\big)\tilde y(t'_1), \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

с полиномами

$$
P_x\big(\tilde x(t_1),\ldots,\tilde x(t_m)\big) = \mathsf{E}_y\left[\tilde z(t_1)\ldots\tilde z(t_m),\right], \quad P_y\big(\tilde y(t_1),\ldots,\tilde y(t_m)\big) = \mathsf{E}_x\left[\tilde z(t_1)\ldots\tilde z(t_m)\right].
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}_x\,P_x\big(\tilde x(t_1),\ldots,\tilde x(t_m)\big)\tilde x(t'_1) = \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{m}K(t_j,t'_1)\,\mathsf{E}_x\left[\Big(\frac{\partial P_x}{\partial x_j}\Big)_{\substack{x_k=\tilde x(t_k),\\ x'_k=\tilde x(t'_k)}}\right] = \sum_{j=1}^{m}K(t_j,t'_1)\,\mathsf{E}\left[\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{m}\tilde z(t_k)\right];
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

аналогично,

$$\mathsf{E}_y\, P_y\big(\tilde{y}(t_1),\ldots,\tilde{y}(t_m)\big) = \sum_{j=1}^{m} K(t_j,t_1')\,\mathsf{E}\left[\prod_{\substack{k=1:\\ j\neq k}}^{m}\tilde{z}(t_k)\right]. \tag{3.12}$$

Математические ожидания в (3.11) и (3.12) равны нулю, согласно доказанному в п. I. Тогда, согласно (3.10), равно нулю математическое ожидание $E_{1,m}$. На основе этого равенства получаем, что $E_{2,m}=0$, $E_{3,m}=0$, ..., последовательно шаг за шагом находим, что равны нулю математические ожидания, которые являются множителями в слагаемых, входящих в суммы (3.8), (3.9). Поэтому согласно (3.7) имеем $E_{n-j,m}=0$, что на шаге с $j=1$ приводит к равенству математических ожиданий, которые являются множителями в суммах (3.5), (3.6) и, следовательно, согласно (3.4), имеем $E_{n,m}=0$.

III. Рассмотрим, наконец, математические ожидания в формуле (3.2). Докажем эту формулу индукцией по $n\in\mathbb{N}$. При $n=1$ эта формула представляет собой тождество. При этом, ввиду статистических независимости и эквивалентности процессов $\{\tilde{x}(t);t\in[0,T]\}$ и $\{\tilde{y}(t);t\in[0,T]\}$, составляющих процесс $\{\tilde{z}(t);t\in[0,T]\}$, с учетом условия $\mathsf{E}\,\tilde{x}(t)=\mathsf{E}\,\tilde{y}(t)=0$, находим

$$\mathsf{E}\,\tilde{z}(t)\tilde{z}^*(t') = \mathsf{E}\Big(\tilde{x}(t)\tilde{x}(t')+\tilde{y}(t)\tilde{y}(t')+i\big[\tilde{x}(t)\tilde{y}(t')-\tilde{y}(t)\tilde{x}(t')\big]\Big) = 2K(t,t'). \tag{3.13}$$

Построим индукционный шаг от значения n в (3.2) к значению $n+1$. Введем полиномы

$$P_x\big(\tilde{x}(t_1),\ldots,\tilde{x}(t_n),\tilde{x}(t_{n+1}),\tilde{x}(t_1'),\ldots,\tilde{x}(t_n)\big) = \mathsf{E}_y\left[\prod_{l=1}^{n+1}\tilde{z}(t_l)\right]\left[\prod_{l'=1}^{n}\tilde{z}^*(t_{l'}')\right]\tilde{x}(t_{n+1}'),$$

$$P_y\big(\tilde{y}(t_1),\ldots,\tilde{y}(t_n),\tilde{y}(t_{n+1}),\tilde{y}(t_1'),\ldots,\tilde{y}(t_n)\big) = \mathsf{E}_x\left[\prod_{l=1}^{n+1}\tilde{z}(t_l)\right]\left[\prod_{l'=1}^{n}\tilde{z}^*(t_{l'}')\right]\tilde{y}(t_{n+1}').$$

Выполним следующие преобразования, используя формулу (2.5):

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_1)\ldots\tilde{z}(t_n)\tilde{z}(t_{n+1})\tilde{z}^*(t_1')\ldots\tilde{z}^*(t_n)\tilde{z}^*(t_{n+1}') = \\
&\quad= \mathsf{E}\left[\prod_{l=1}^{n+1}\tilde{z}(t_l)\right]\left[\prod_{l'=1}^{n}\tilde{z}^*(t_{l'}')\right]\tilde{x}(t_{n+1}') - i\,\mathsf{E}\left[\prod_{l=1}^{n+1}\tilde{z}(t_l)\right]\left[\prod_{l'=1}^{n}\tilde{z}^*(t_{l'}')\right]\tilde{y}(t_{n+1}') = \\
&\quad= \mathsf{E}_x\left[K(t_{n+1},t_{n+1}')\frac{\partial P_x}{\partial x_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n}\left(K(t_j,t_{n+1}')\frac{\partial P_x}{\partial x_j} + K(t_j',t_{n+1}')\frac{\partial P_x}{\partial x_j'}\right)\right]_{\substack{x_k=\tilde{x}(t_k),\\ x_k'=\tilde{x}(t_k')}} - \\
&\quad - i\,\mathsf{E}_y\left[K(t_{n+1},t_{n+1}')\frac{\partial P_y}{\partial y_{n+1}} + \sum_{j=1}^{n}\left(K(t_j,t_{n+1}')\frac{\partial P_y}{\partial y_j} + K(t_j',t_{n+1}')\frac{\partial P_y}{\partial y_j'}\right)\right]_{\substack{x_k=\tilde{x}(t_k),\\ x_k'=\tilde{x}(t_k')}} = \\
&\quad= 2K(t_{n+1},t_{n+1}')\,\mathsf{E}\left[\prod_{l=1}^{n}\tilde{z}(t_l)\right]\left[\prod_{l'=1}^{n}\tilde{z}^*(t_{l'}')\right] + 2\sum_{j=1}^{n}K(t_j,t_{n+1}')\,\mathsf{E}\left[\prod_{\substack{l=1:\\ l\neq j}}^{n+1}\tilde{z}(t_l)\right]\left[\prod_{l'=1}^{n}\tilde{z}^*(t_{l'}')\right],
\end{aligned}$$

где слагаемые с производными $\mathsf{E}_x\left(\partial P_x/\partial x_j'\right)$ и $\mathsf{E}_y\left(\partial P_y/\partial y_j'\right)$, $j=1,\ldots,n$, взаимно скомпенсировали друг друга. Приняв во внимание формулу (3.13), получим окончательно следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathsf{E}\left[\prod_{l=1}^{n+1}\tilde{z}(t_l)\right]\left[\prod_{l'=1}^{n+1}\tilde{z}^*(t_{l'}')\right] = \sum_{j=1}^{n+1}\big[\,\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_j)\tilde{z}^*(t_{n+1}')\big]\,\mathsf{E}\left[\prod_{l=1:l\neq j}^{n+1}\tilde{z}(t_l)\right]\left[\prod_{l'=1}^{n}\tilde{z}^*(t_{l'}')\right], \tag{3.14}$$

в правой части которого находятся математические ожидания с n сомножителями $\tilde{z}(t_l)$ и с таким числом сомножителей $\tilde{z}^*(t_{l'})$. Тогда, исходя из предположения, что формула (3.2) выполняется для такого числа сомножителей, запишем

$$\mathsf{E}\left[\prod_{l=1:l\neq j}^{n+1}\tilde{z}(t_l)\right]\left[\prod_{l'=1}^{n}\tilde{z}^*(t'_{l'})\right]=\sum_{\langle l_1,\ldots,l_n\rangle\in\mathbb{P}_n^{(j)}}\prod_{k=1}^{n}\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_{l_k})\tilde{z}^*(t'_k),\tag{3.15}$$

где наборы $\langle l_k;\, k=1,\ldots,n+1,\, k\neq j\rangle$ — элементы группы $\mathbb{P}_n^{(j)}$ подстановок из номеров $I_{n+1}\setminus\{j\}$. Так как группа $\mathbb{P}_{n+1}$ подстановок из номеров I_{n+1} представляется в виде объединения непересекающихся классов подстановок $\mathbb{P}_n^{(j)}$, т.е. $\mathbb{P}_{n+1}=\bigcup\limits_{j=1}^{n+1}\mathbb{P}_n^{(j)}$, справедлива формула суммирования

$$\sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_{n+1}}\prod_{k=1}^{n+1}\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_k)\tilde{z}^*(t'_{\mathsf{P}\,k})=\sum_{j=1}^{n+1}\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_j)\tilde{z}^*(t'_{n+1})\sum_{\langle l_1,\ldots,l_n\rangle\in\mathbb{P}_n^{(j)}}\prod_{k=1}^{n}\mathsf{E}\,\tilde{z}(t_{l_k})\tilde{z}^*(t'_k).$$

Вместе с (3.14), (3.15), она завершает доказательство формулы (3.2). □

Справедливо обратное утверждение.

Теорема 3.2. *Равенства* (2.3) *и* (2.4), *выражающие свойства случайного процесса* $\{\tilde{x}(t);\, t\in[0,T]\}$, *эквивалентны равенствам* (3.1) *и* (3.2), *которые выражают свойства случайного процесса* $\{\tilde{z}(t);\, t\in[0,T]\}$ *с траекториями* $\tilde{z}(t)=\tilde{x}(t)+i\tilde{y}(t)$, *состоящими из траекторий статистически независимых процессов* $\{\tilde{x}(t);\, t\in[0,T]\}$ *и* $\{\tilde{y}(t);\, t\in[0,T]\}$ *с нулевым математическим ожиданием. При этом вещественная корреляционная функция для обоих процессов одинакова и равна* $K(t,t')$.

Доказательство. Согласно теореме 3.1 достаточно доказать, что из равенств (3.1) и (3.2) следуют равенства (2.3) и (2.4). Пусть $\tilde{z}(t)=\tilde{x}(t)+i\tilde{y}(t)$ — траектории случайного процесса $\{\tilde{z}(t);\, t\in[0,T]\}$ на $[0,T]$, для математических ожиданий которого справедливы формулы (3.1) и (3.2). Введем характеристический функционал пары случайных процессов $\{\tilde{x}(t);\, t\in[0,T]\}$ и $\{\tilde{y}(t);\, t\in[0,T]\}$:

$$\Phi[u,v]=\mathsf{E}\exp\left[i\int_0^T\big(u(t)\tilde{x}(t)+v(t)\tilde{y}(t)\big)dt\right]=\mathsf{E}\exp\left[\frac{i}{2}\int_0^T\big(w(t)\tilde{z}(t)+w^*(t)\tilde{z}^*(t)\big)dt\right],$$

определенный для пар непрерывных на $[0,T]$ пробных функций $u(t)$ и $v(t)$. Здесь мы ввели комплекснозначную функцию $w(t)=u(t)-iv(t)$. Справедливы следующие преобразования, использующие (3.1) и (3.2):

$$\Phi[u,v]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n n!}\int\limits_{[0,T]^n}\mathsf{E}\prod_{j=1}^{n}\big(w(t_j)\tilde{z}(t_j)+w^*(t_j)\tilde{z}^*(t_j)\big)dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n n!}\sum_{A\subset I_n}\int\limits_{[0,T]^n}\left[\prod_{j\in A}w(t_j)\right]\left[\prod_{j'\in I_n\setminus A}w^*(t_{j'})\right]\mathsf{E}\left[\prod_{j\in A}\tilde{z}(t_j)\right]\left[\prod_{j'\in I_n\setminus A}\tilde{z}^*(t_{j'})\right]dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n n!}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\int\limits_{[0,T]^n}\left[\prod_{j=1}^{l}w(t_j)\right]\left[\prod_{j'=l+1}^{n}w^*(t_{j'})\right]\mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{l}\tilde{z}(t_j)\right]\left[\prod_{j'=l+1}^{n}\tilde{z}^*(t_{j'})\right]dt_1\ldots dt_n=$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} \int\limits_{[0,T]^{2m}} \left[\prod_{j=1}^{m} w(t_j)w^*(t'_j)\right] \mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{m} \tilde{z}(t_j)\tilde{z}^*(t'_j)\right] dt_1 \ldots dt_m dt'_1 \ldots dt'_m =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_m} \int\limits_{[0,T]^{2m}} \left[\prod_{j=1}^{m} w(t_j)w^*(t'_j)\right] \prod_{j=1}^{m} \mathsf{E}\left[\tilde{z}(t_j)\tilde{z}^*(t'_{\mathsf{P}\,j})\right] dt_1 \ldots dt_m dt'_1 \ldots dt'_m. \quad (3.16)$$

Сходимость ряда, определяющего функцию $\Phi[u,v]$, при условии достаточной малости $\max\{|w(t)|; t \in [0,T]\}$, обеспечивается условиями непрерывности корреляционной функции $K(t,t')$ и ее ограниченности, благодаря которой

$$\left|\mathsf{E}\left[\prod_{j\in A} \tilde{z}(t_j)\right]\left[\prod_{j\in I_n\setminus A} \tilde{z}^*(t_j)\right]\right| \leqslant \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_m} \left|\prod_{j=1}^{m} \mathsf{E}\left[\tilde{z}(t_j)\tilde{z}^*(t'_{\mathsf{P}\,j})\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant m!\, 2^m \max\left\{|K(t,t')|; \langle t,t'\rangle \in [0,T]^2\right\},$$

что обосновывает перестановочность операции $\mathsf{E}(\cdot)$ с операциями суммирования $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\cdot)$ и интегрирования $\int\limits_{[0,T]^n} (\cdot) dt_1 \ldots dt_n$ при получении выражения (3.16).

В каждом слагаемом суммы по $\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n$ произведем замену переменных интегрирования $t'_{\mathsf{P}\,j} \Rightarrow t'_j$, и заметим, что

$$\prod_{j=1}^{m} w^*(t'_{\mathsf{P}^{-1}\,j}) = \prod_{j=1}^{m} w^*(t'_j),$$

так как каждая подстановка P является автоморфизмом I_n,

$$\Phi[u,v] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}m!} \int\limits_{[0,T]^{2m}} \prod_{j=1}^{m} \mathsf{E}\Big[w(t_j)\tilde{z}(t_j)w^*(t'_j)\tilde{z}^*(t'_j)\Big] dt_1 \ldots dt_m dt'_1 \ldots dt'_m =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}m!} \left[\int\limits_{[0,T]^2} \mathsf{E}\Big[w(t)\tilde{z}(t)w^*(t')\tilde{z}^*(t')\Big] dtdt'\right]^m =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{4} \int\limits_{[0,T]^2} w(t)w^*(t')\, \mathsf{E}\Big[\tilde{z}(t)\tilde{z}^*(t')\Big] dtdt'\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_{[0,T]^2} K(t,t')\big[u(t)u(t') + v(t)v(t')\big] dtdt'\right), \quad (3.17)$$

где $\mathsf{E}\left[\tilde{z}(t)\tilde{z}^*(t')\right] = 2K(t,t')$ — симметричная корреляционная функция, общая для процессов $\{\tilde{x}(t);\ t \in [0,T]\}$ и $\{\tilde{y}(t);\ t \in [0,T]\}$. Полученное выражение продолжается аналитически по параметру $\max\{|u(t)|, |v(t)|; t \in [0,T]\}$ на все возможные его значения. В результате согласно (2.2) получаем, что $\Phi[u,v] = \Phi[u]\Phi[v]$, что означает, что процессы $\{\tilde{x}(t); t \in [0,T]\}$ и $\{\tilde{y}(t); t \in [0,T]\}$ гауссовские, статистически независимые и эквивалентные. $\square$

4. Алгебра $\mathfrak{A}([0,T])$. Введем в рассмотрение бесконечномерную коммутативную алгебру над полем комплексных чисел, элементами которой являются последовательности

$$\mathsf{f} = \langle f_n(t_1,\ldots,t_n);\ n \in \mathbb{N}_+\rangle, \quad \mathbb{N}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$$

симметричных комплекснозначных функций от наборов $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle \in [0,T]^n$, где каждая из этих функций непрерывна на $[0,T]^n$, $n \in \mathbb{N}$, и $f_0 \in \mathbb{C}$. Обстоятельное изложение свойств алгебр такого типа дано нами в [3].

Рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{L}([0,T])$, состоящее из последовательностей f, указанного типа, к которым применяются естественные операции покомпонентного сложения последовательностей и умножения их компонент на какое-либо комплексное число $\alpha \in \mathbb{C}$. Дополнительно, потребуем, чтобы для компонент каждого из элементов $\mathsf{f} \in \mathfrak{L}([0,T])$ выполнялась такая оценка $|f_n(t_1,\ldots,t_n)| \leqslant M_n$, $n \in \mathbb{N}$, что для последовательности $\langle M_n; n \in \mathbb{N}\rangle$ положительных чисел суммируем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \frac{\zeta^n}{n!}$$

при достаточно малых $\zeta > 0$. Введем в этом пространстве бинарную операцию, применяемую к парам последовательностей из $\mathfrak{L}([0,T])$, которую будем обозначать знаком $*$ и называть умножением. Результатом применения этой операции к паре $\langle \mathsf{f}^{(1)}, \mathsf{f}^{(2)}\rangle$ последовательностей $\mathsf{f}^{(k)} = \langle f_n^{(k)}(t_1,\ldots,t_n); n \in \mathbb{N}_+\rangle$, которым соответствуют такие последовательности $\langle M_n^{(k)}; n \in \mathbb{N}\rangle$, что

$$\left|f_n^{(k)}(t_1,\ldots,t_n)\right| < M_n^{(k)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} M_m^{(k)} \frac{\zeta^n}{n!} < \infty, \quad k \in \{1,2\},$$

является последовательность $\mathsf{g} = \langle g_n(t_1,\ldots,t_n); n \in \mathbb{N}_+\rangle$ с компонентами

$$g_n(t(I_n)) = \left(\mathsf{f}^{(1)} * \mathsf{f}^{(2)}\right)_n(t(I_n)) = \sum_{A \subset I_n} f^{(1)}_{|A|}(t(A)) f^{(2)}_{|I_n \setminus A|}(t(I_n \setminus A)), \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

где введено обозначение $t(A) = \langle t_{j_1}, \ldots, t_{j_m}\rangle$ для любого подмножества $A = \{j_1,\ldots,j_m\} \subset I_n = \{1,\ldots,n\}$, $|A| = m$. В частности, при $n = 0$ выполняется $f_0^{(1)} f_0^{(2)}$. При этом последовательность g, очевидным образом, состоит из симметричных функций, и для ее компонент имеет место оценка

$$|g_n(t(I_n))| \leqslant \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n}{l} M_l^{(1)} M_{n-l}^{(2)}, \quad M_0^{(k)} = |f_0^{(k)}|,$$

и поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \max\{|g_n(t(I_n))|\} < \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\zeta^l}{l!} M_l^{(1)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{m!} M_m^{(2)}.$$

Следовательно, последовательность $\mathsf{g} = \mathsf{f}^{(1)} * \mathsf{f}^{(2)}$ является элементом из $\mathfrak{L}([0,T])$.

Очевидно, операция $*$ коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна по отношению к сложению последовательностей. Таким образом, линейное пространство $\mathfrak{L}([0,T])$, снабженное операцией $*$, превращается в коммутативную алгебру, которую мы будем обозначать посредством $\mathfrak{A}([0,T])$. Единицей в этой алгебре является последовательность $\mathsf{e} = \langle \delta_{n,0}; n \in \mathbb{N}_+\rangle$. Степень элемента f порядка n будем обозначать f_*^n.

Обратный элемент $\mathsf{g} \equiv \mathsf{f}_*^{-1}$ для последовательности f определяется уравнением $\mathsf{g} * \mathsf{f} = \mathsf{e}$. Из этого определения следует система уравнений для компонент последовательности $\mathsf{g} = \langle g_m(t(I_m)); m \in \mathbb{N}\rangle$:

$$g_0 f_0 = 1, \quad g_1(t_1) f_0 + g_0 f_1(t_1) = 0, \quad \ldots,$$
$$g_{n+1}(t(I_{n+1})) f_0 + \sum_{A \subset I_n} g_{|A|}(t(A)) f_{n+1-|A|}(t(I_{n+1} \setminus A)) = 0, \ldots.$$

Система уравнений однозначно разрешима и, следовательно, существование обратного элемента f_*^{-1} в алгебре $\mathfrak{A}([0,T])$ возможно тогда и только тогда, когда $f_0 \neq 0$.

Предположив, что $|g_m(t(I_m))| < N_m$ при $m \leqslant n$, находим, что

$$\left|g_{n+1}(t(I_{n+1}))\right| < N_{n+1} \equiv N_0 \sum_{m=0}^{n} \binom{n+1}{m} N_m M_{n+1-m}, \quad N_0 = |f_0|^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Эта оценка дает

$$G(\zeta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{n+1}}{(n+1)!} N_{n+1} < N_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{m!} N_m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\zeta^{n+1-m}}{(n+1-m)!} M_{n+1-m} =$$

$$= N_0 (N_0 + G(\zeta)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1},$$

откуда следует, что

$$G(\zeta) < N_0 \left[N_0^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} \right]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}.$$

Следовательно, на основании этого неравенства, $G(\zeta)$ сходится при достаточно малых ζ, и поэтому элемент g принадлежит $\mathfrak{A}([0,T])$.

В алгебре $\mathfrak{A}([0,T])$ допустимо введение экспоненциального отображения $\exp_* \mathsf{f}$, определяемого рядом

$$\exp_* \mathsf{f} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \mathsf{f}_*^m. \tag{4.1}$$

Так как для m-й степени всякого элемента $f \in \mathfrak{L}_0([0,T]) \equiv \{\mathsf{f} \in \mathfrak{L}([0,T]) \, : \, f_0 = 0\} \subset \mathfrak{L}([0,T])$ имеет место равенство $(\mathsf{f}_*^m)_l(t(I_l)) = 0$ при $l > m$, то индукцией по $m \in \mathbb{N}$ можно доказать, что для компонент всякого элемента $\mathsf{f} \in \mathfrak{L}([0,T]) \, : \, f_0 = 0\}$ справедливо представление

$$\big(\exp_* \mathsf{f} \big)(t(I_n)) = \sum_{\mathfrak{R}_n} \prod_{A \in \mathfrak{R}_n} f_{|A|}(t(A)), \tag{4.2}$$

в котором суммирование производится по всем дизъюнктным разложениям

$$\mathfrak{R}_n = \big\{ \varnothing \neq A_j \subset I_n : \ j = 1, \dots, s \big\} \bigcup_{j=1}^{s} A_j = I_n, \quad A_j \cap A_k = \varnothing, \quad j \neq k, \quad s = 1, \dots, n,$$

множества I_n. Если для компонент элемента f имеет место оценка

$$|f_n(t(I_n))| < M^n, \quad M > 0,$$

то

$$\big| \big(\mathsf{f}_*^m \big)_n (t(I_n)) \big| < (mM)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и поэтому

$$N_n^* \equiv \big| \big(\exp_* \mathsf{f} \big)_n (t(I_n)) \big| < \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \big| \big(\mathsf{f}_*^m \big)_n (t(I_n)) \big| < \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(mM)^n}{m!},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} N_n^* \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(mM)^n}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp(mM)^n}{m!} = \exp\big(\zeta e^M\big). \tag{4.3}$$

Следовательно, образ экспоненциального отображения принадлежит $\mathfrak{A}([0,T])$.

На основе представления (4.2) индукцией по n можно доказать, что экспоненциальное отображение осуществляет биекцию между линейными пространствами $\mathfrak{L}_0([0,T])$ и $\mathfrak{L}([0,T])$ в алгебре $\mathfrak{A}([0,T])$. Обратное отображение из $\mathfrak{L}([0,T])$ в $\mathfrak{L}_0([0,T])$, обозначаемое $\ln_*(1+\mathsf{g})$, определяется рядом

$$\ln_*(1+\mathsf{g}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} g_*^m.$$

Введем линейный функционал $\mathsf{F}(u;\mathsf{f})$ от $\mathsf{f} = \langle f_n(t_1, \dots, t_n); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ на линейном пространстве $\mathfrak{L}_0([0,T])$, порождаемый непрерывной функцией $u(t)$ на $[0,T]$:

$$\mathsf{F}(u;\mathsf{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{[0,T]^n} \left(\prod_{j=1}^{n} u(t_j) \right) f_n(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n. \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathsf{f} \in \mathfrak{L}_0([0,T])$. *Справедлива формула*

$$\mathsf{F}(u; \exp_* \mathsf{f}) = \exp(\mathsf{F}(u;\mathsf{f})). \tag{4.5}$$

Доказательство. Из определения произведения элементов $\mathsf{f}^{(1)}$ и $\mathsf{f}^{(2)}$ следует, что

$$\mathsf{F}(u;\mathsf{f}^{(1)} * \mathsf{f}^{(2)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{[0,T]^n} \left(\prod_{j=1}^{n} u(t_j) \right) \sum_{A \subset I_n} f^{(1)}_{|A|}(t(A)) f^{(2)}_{|I_n \setminus A|}(t(I_n \setminus A)) dt_1 \dots dt_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{[0,T]^n} \left(\prod_{j=1}^{n} u(t_j) \right) \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} f^{(1)}_{l}(t(I_l)) f^{(2)}_{n-l}(t(I_n \setminus I_l)) dt_1 \dots dt_n =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int\limits_{[0,T]^l} \left(\prod_{j=1}^{l} u(t_j) \right) f^{(1)}_{l}(t(I_l)) dt_1 \dots dt_l \times$$

$$\times \sum_{n=l}^{\infty} \frac{1}{(n-l)!} \int\limits_{[0,T]^{n-l}} \left(\prod_{j=l+1}^{n} u(t_j) \right) f^{(2)}_{n-l}(t(I_n \setminus I_l)) dt_{l+1} \dots dt_n = \mathsf{F}(u;\mathsf{f}^{(1)})\mathsf{F}(u;\mathsf{f}^{(2)}), \tag{4.6}$$

где выполнена замена переменных интегрирования $t(A)$ на $t(I_l)$ и $t(I_n \setminus A)$ на $t(I_n \setminus I_l)$. Сходимость рядов и перестановочность суммирований обеспечивается тем, что компоненты элементов f алгебры $\mathfrak{L}_0([0,T])$ ограничены $|f_n(t(I_n))| < M_n$, так что

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{\zeta^n}{n!} < \infty.$$

Воспользовавшись линейностью функционала F и применив формулу (4.6) к каждому слагаемому определяющего его ряда (4.1),

$$\mathsf{F}(u; \exp_* \mathsf{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathsf{F}(u; \mathsf{f}^n_*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathsf{F}^n(u;\mathsf{f}) = \exp(\mathsf{F}(u;\mathsf{f})),$$

получаем формулу (4.5). Перестановочность суммы по n с суммированием в определении (4.4) функционала F обеспечивается оценкой (4.3). □

Замечание 4.1. Доказанная теорема аналогична теореме о приведении к связанным диаграммам в рамках правил Вика в формализмах квантовой теории поля и статистической механики.

Теперь докажем ключевые утверждения, которые позволяют применить алгебру $\mathfrak{A}([0,T])$ для вычисления характеристической функции $Q_J(-i\lambda)$. Рассмотрим группы $\mathbb{P}_n$ подстановок множеств I_n, $n \in \mathbb{N}$. Подмножество $A \subset I_n$ назовем инвариантным относительно подстановки $\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n$, если $\mathsf{P}\,A = A$.

Определение 4.1. Подстановку $\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n$ назовем эргодической, если для нее не существует собственного инвариантного подмножества $A \subset I_n$.

Теорема 4.2. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *в группе* $\mathbb{P}_n$ *имеется а точности* $(n-1)!$ *эргодических подстановок.*

Доказательство. Пусть $\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n$ — эргодическая подстановка и пусть образом ее действия на $I_n = \langle 1, 2, \dots, n \rangle$ является последовательность $\langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle$. Поставим в соответствие последовательности $\langle j_1, j_2, \dots, j_n \rangle$ последовательность $\langle 1, k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \rangle$, в которой $\mathsf{P}\,1 = k_1 \equiv j_1$, $\mathsf{P}\,k_l = k_{l+1}$, $l = 1, \dots, n-1$. Так как подстановка P эргодическая, то в этой последовательности нет совпадающих номеров. Таким образом, каждой эргодической подстановке соответствует такая подстановка P' номеров $\langle 2, 3, \dots, n \rangle$ из $\mathbb{P}_{n-1}$, что $\mathsf{P}'\langle 2, 3, \dots, n \rangle = \langle k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \rangle$. Обратно, каждой такой подстановке соответствует эргодическая подстановка P группы $\mathbb{P}_n$, построенная по описанной схеме, откуда следует утверждение теоремы, так как $|\mathbb{P}_{n-1}| = (n-1)!$. □

Теорема 4.3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ любой подстановке $\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n$ соответствует такое дизъюнктное разложение $\mathfrak{R}_n$ множества I_n, что эта подстановка представляется в виде*

$$\mathsf{P} = \bigotimes_{A \in \mathfrak{R}_n} \mathsf{P}^{(A)},$$

где каждая из подстановок $\mathsf{P}^{(A)}$, $A \in \mathfrak{R}_n$ является сужением P на множество $A \in \mathfrak{R}_n$ и является эргодической подстановкой из группы $\mathbb{P}^{(A)}_{|A|}$ подстановок множества номеров из A.

Доказательство. Зафиксируем подстановку $\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n$. Докажем, что имеется подмножество $A_1 \subset I_n$, которое содержит 1, инвариантное относительно P, и которое не содержит в себе инвариантного собственного подмножества. Рассмотрим образ $\mathsf{P}\,1$. Если $\mathsf{P}\,1 = 1$, то искомым множеством является $\{1\}$. Если $\mathsf{P}\,1 = j_1^{(1)} \neq 1$ и при $\mathsf{P}\,j_1^{(1)} = 1$ получаем искомое множество $A_1 = \{1, j_1^{(1)}\}$. Если $\mathsf{P}\,j_1^{(1)} = j_2^{(1)} \neq 1$, то найдем номер $\mathsf{P}\,j_2^{(1)}$ и будем поступать каждый раз так, пока на каком-либо шаге s_1 получим, что $\mathsf{P}\,j^{(1)}_{s_1-1} \in \{1, j_1^{(1)} \ldots, j^{(1)}_{s_1-1}\}$. В результате, получим, что $\mathsf{P}\,j^{(1)}_{s_1-1} = 1$ и искомым инвариантным множеством является набор $A_1 = \{1, j_1^{(1)}, \ldots, j^{(1)}_{s_1-1}\}$. Сужение подстановки P на множество A_1 обозначим как $\mathsf{P}^{(A_1)}$. По построению эта подстановка является эргодической на A_1.

Заметив, что $I_n \setminus A_1$ также является инвариантным подмножеством по отношению к подстановке P, найдем в нем минимальный номер $j_0^{(2)}$ и применим к нему описанный выше алгоритм, результатом которого будет инвариантное по отношению к подстановке P множество $A_2 = \{j_0^{(2)}, j_1^{(2)}, \ldots, j^{(2)}_{s_2-1}\}$, причем сужение $\mathsf{P}^{(A_2)}$ этой подстановки на A_2 является эргодической подстановкой. Продолжая описанный процесс построения множеств A_k, каждое очередное из которых является подмножеством в $I_n \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} A_l$, в конце концов на некотором шаге m исчерпаем все множество номеров I_n. Таким образом, построим дизъюнктное разложение $\mathfrak{R}_n = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, каждый элемент которого инвариантен относительно подстановки P и при этом сужение $\mathsf{P}^{(A_l)}$ подстановки P на соответствующее множество A_l, $l = 1, \ldots, m$ является эргодической подстановкой. Прямое произведение всех таких подстановок дает подстановку P. $\square$

Докажем утверждение, позволяющее вычислить характеристическую функцию $Q_J(-i\lambda)$.

Теорема 4.4. *Последовательность симметричных функций $\mathsf{g} = \langle \mathsf{g}_n(t_1, \ldots, t_n);\ n \in \mathbb{N}_+ \rangle$, которые определяются формулой*

$$g_n(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n} \prod_{j=1}^{n} D(t_j, t_{\mathsf{P}\,j}), \quad f_0 = 0. \tag{4.7}$$

где $D(t, t')$ — непрерывная функция на $[0, T]^2$, принадлежит алгебре $\mathfrak{A}([0, T])$, причем имеет место соотношение

$$f_n(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n}^{*} \prod_{j=1}^{n} D(t_j, t_{\mathsf{P}\,j}), \tag{4.8}$$

где $\mathsf{f} = \ln_*(1 + \mathsf{g})$ и суммирование производится по всем эргодическим подстановкам из $\mathbb{P}_n$.

Доказательство. Для доказательства нужно проверить наличие связи $g_n(t(I_n)) = \big(\exp_* \mathsf{f}\big)_n(t(I_n))$. Ввиду теоремы 4.3, для каждой подстановки $\mathsf{P} \in \mathbb{P}_n$ существует единственное дизъюнктное разбиение $\mathfrak{R}_n$ множества I_n, используя которое, согласно (4.8), запишем

$$\prod_{j=1}^{n} D(t_j, t_{\mathsf{P}\,j}) = \prod_{A \in \mathfrak{R}_n} \prod_{j \in A} D(t_j, t_{\mathsf{P}^{(A)}\,j}). \tag{4.9}$$

Так как все подстановки распределяются по классам эквивалентности, каждый из которых содержит подстановки, соответствующие одному и тому же разложению $\mathfrak{R}_n$, и эти подстановки являются эргодическими, то сумма по всем подстановкам представляется в следующем виде. Сначала производится суммирование по подстановкам в каждом из таких классов, а затем суммирование по всем возможным классам, т.е. по $\mathfrak{R}_n$. Суммирование же по подстановкам, принадлежащих фиксированному классу, который связан с разложением $\mathfrak{R}_n$, представляется суммированием по эргодическим подстановкам в каждой из подгрупп подстановок $\mathbb{P}(A)$ подмножества $A \in \mathfrak{R}_n$ последовательно, согласно какому-либо упорядочению множеств A из $\mathfrak{R}_n$. Таким образом, имеет место формула

$$\sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n} \dots = \sum_{\mathfrak{R}_n} \left(\prod_{A\in\mathfrak{R}_n} \sum^{*}_{\mathsf{P}^{(A)}\in\mathbb{P}(A)} \right) \dots . \tag{4.10}$$

Из (4.9), (5.1) следует, что

$$g_n(t(I_n)) = \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n} \prod_{j=1}^{n} D(t_j, t_{\mathsf{P}\,j}) = \sum_{\mathfrak{R}_n} \left(\prod_{A\in\mathfrak{R}_n} \sum^{*}_{\mathsf{P}^{(A)}\in\mathbb{P}(A)} \right) \prod_{A\in\mathfrak{R}_n} \prod_{j\in A} D(t_j, t_{\mathsf{P}^{(A)}\,j}) =$$

$$= \sum_{\mathfrak{R}_n} \prod_{A\in\mathfrak{R}_n} \sum^{*}_{\mathsf{P}^{(A)}\in\mathbb{P}(A)} \prod_{j\in A} D(t_j, t_{\mathsf{P}^{(A)}\,j}).$$

Согласно (4.2) получаем, что

$$g_n(t(I_n)) = \big(\exp_* \mathsf{f}\big)_n(t(I_n)),$$

где $f_n(t(I_n))$ определяется (4.8). □

5. Характеристическая функция случайной величины $\mathsf{J}[\tilde{x}(t)]$.

Пусть

$$\mathsf{J}[x(t)] = \int_0^T V(t_1, t_2) x(t_1) x(t_2) dt_1 dt_2 \tag{5.1}$$

— квадратичный функционал на $\mathbb{L}_2([0, T])$, где $V(t_1, t_2)$ — непрерывная симметричная функция из $\mathbb{L}_2([0, T]) \times \mathbb{L}_2([0, T])$. В этом случае существует случайная величина, определяемая значениями этого функционала на траекториях процесса $\{\tilde{x}(t); t \in [0, T]\}$ и, следовательно, определена ее характеристическая функция

$$Q_J(-i\lambda) = \mathsf{E} \exp\Big(i\lambda\, \mathsf{J}[\tilde{x}(t)]\Big). \tag{5.2}$$

Применение развиваемого в этой работе метода к вычислению характеристических функций таких квадратичных функционалов становится возможным, если функция $V(t, t')$ определяет непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathrm{C}[0, T]$, применяемый к непрерывной функции $K(t', t)$.

В этом разделе мы докажем утверждение, которое является основой для вычисления характеристической функции $Q_J(-i\lambda)$. Причем предлагаемый метод вычисления, который мы называем *реконструкцией*, позволяет избежать привлечения метода Карунена—Лоэва—Пугачева. Такая реконструкция характеристической функции применялась ранее в различных работах, посвященных приложениям в статистической радиофизике (см., например, [4,5,9]). В нашей интерпретации ее обоснование существенно основано на комплексификации случайных гауссовских процессов, описанной в предыдущем разделе.

Функция $V(t, t')$ порождает ограниченный интегральный оператор V,

$$(\mathsf{V}\varphi)(t) = \int_0^T V(t, t')\varphi(t')dt', \quad \varphi(t) \in \mathbb{L}_2[0, T].$$

Далее будем полагать, что нулевое пространство этого оператора тривиально, т.е. у него не существует ни одной собственной функции $\mathsf{e}(t)$ с нулевым собственным числом. В противном случае функции из нулевого пространства можно исключить из теории, так как

$$\mathsf{J}[\tilde{z}(t)] = \mathsf{J}\left[\tilde{z}(t) - \tilde{z}_0 \mathsf{e}(t)\right],$$

где $\tilde{z}(t) - \tilde{z}_0 \mathsf{e}(t)$ — проекция случайной реализации на нулевое пространство оператора V.

Согласно условию непрерывности, наложенному на корреляционную функцию $K(t,t')$ в разделе 2, эта функция является ограниченной на $[0,T]$, и поэтому симметричный интегральный оператор K не только является самосопряженным неотрицательным оператором Гильберта—Шмидта, но, более того, он является *ядерным*, так как его собственные числа $\varkappa_n$, $n\in\mathbb{N}$, неотрицательны и совпадают с его *сингулярными числами* (см. [1]). В то же время, используя суммируемость ряда, составленного из собственных чисел и условие полноты соответствующего ортонормированного базиса $\{\varphi_n(t);\, n\in\mathbb{N}\}$ собственных функций оператора K в пространстве $\mathbb{L}_2[0,T]$, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(t),(\mathsf{K}\varphi_n)(t))\equiv \operatorname{Sp}\mathsf{K}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\varphi_n(t)dt\int_0^T K(t,t')\varphi_n(t')dt'=$$
$$=\int_0^T dt\int_0^T K(t,t')\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)\varphi_n(t')dt'=\int_0^T dt\int_0^T K(t,t')\delta(t-t')dt'=\int_0^T K(t,t)dt<\infty,$$

где полнота базиса $\{\varphi_n(t); n\in\mathbb{N}\}$ выражена посредством δ-функции Дирака

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)\varphi_n(t')dt'=\delta(t-t')$$

с использованием непрерывности функции $K(t,t')$. Ввиду того, что произведение ядерного оператора на ограниченный оператор снова является ядерным оператором (см. [1]), в принятых нами ограничениях на функцию $V(t,t')$ интегральный оператор VK является ядерным.

Неотрицательный самосопряженный оператор K имеет положительный корень $\mathsf{K}^{1/2}$. Рассмотрим ограниченный самосопряженный оператор $\mathsf{D}=\mathsf{K}^{1/2}\mathsf{V}\mathsf{K}^{1/2}$. Тогда сумма диагональных элементов оператора $\mathsf{K}^{1/2}\mathsf{V}\mathsf{K}^{1/2}$ в базисе $\{\varphi_n(t); n\in\mathbb{N}\}$ конечна:

$$\operatorname{Sp}\mathsf{D}=\sum_{n=1}^{\infty}\big(\varphi_n(t),\big(\mathsf{K}^{1/2}\mathsf{V}\mathsf{K}^{1/2}\varphi_n\big)(t)\big)=\sum_{n=1}^{\infty}\big(\mathsf{K}^{1/2}\varphi_n(t),\big(\mathsf{V}\mathsf{K}^{1/2}\varphi_n\big)(t)\big)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_n\big(\varphi_n(t),(\mathsf{V}\varphi_n)(t)\big)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_n\big|\big(\varphi_n(t),(\mathsf{V}\varphi_n)(t)\big)\big|\leqslant\|\mathsf{V}\|\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_n<\infty.$$

Отсюда следует, что оператор D ядерный (см. [1]). Рассмотрим матрицу этого оператора в ортонормированном базисе $\{\psi_n(t);\, n\in\mathbb{N}\}$ его собственных функций с собственными числами μ_n, $n\in\mathbb{N}$. При этом $\mu_n\neq 0$, так как для собственной функции $\mathsf{e}(t)$ с таким собственным числом выполняется $\mathsf{K}^{1/2}\mathsf{V}\mathsf{K}^{1/2}\mathsf{e}(t)=0$, $\mathsf{V}\mathsf{K}^{1/2}\mathsf{e}(t)=0$ и, следовательно, функция $\mathsf{K}^{1/2}\mathsf{e}(t)$ является собственной с нулевым собственным числом для оператора V, что мы исключили из рассмотрения.

В силу независимости суммы $\operatorname{Sp}\mathsf{D}$ от выбора ортонормированного базиса (см. [1]) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ абсолютно сходится. Отсюда следует, что для любого $\lambda\in\mathbb{C}$ сходится бесконечное произведение

$$\prod_{m=1}^{\infty}\big(1+\lambda\mu_m\big)=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\ln(1+\lambda\mu_m)\right), \tag{5.3}$$

где значения функции $\ln(\cdot)$ берутся на главном листе бесконечнолистной функции комплексного аргумента $\lambda\in\mathbb{C}$, исключая точки ветвления $\lambda=-\mu_n^{-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда, вводя матрицы $\mathcal{D}^{(n)}$ порядка $n\in\mathbb{N}$ с матричными элементами $(\mathcal{D}^{(n)})_{l,m}=\mu_m\delta_{lm}$, $\langle l,m\rangle=1,\ldots,n$, и применив известную формулу для детерминанта

$$\det(1+\lambda\mathcal{D}^{(n)})=\exp\operatorname{Sp}\ln\big(1+\lambda\mathcal{D}^{(n)}\big)$$

(см. [6]), определим детерминант оператора $1+\lambda\mathsf{D}$:

$$\prod_{m=1}^{\infty}\big(1+\lambda\mu_m\big)=\lim_{n\to\infty}\exp\Big(\operatorname{Sp}\ln(1+\lambda\mathcal{D}^{(n)})\Big)=\lim_{n\to\infty}\det(1+\mathcal{D}^{(n)})\equiv\det(1+\lambda\mathsf{D}). \tag{5.4}$$

Таким образом, из этой формулы следует, что введенный детерминант оператора $1+\lambda\mathsf{D}$ является целой функцией от $\lambda \in \mathbb{C}$. Возможность представления ее в виде бесконечного произведения (5.4) указывает на то, что для нее имеет место разложение Адамара (см. [11]). Такое разложение возможно в том и только в том случае, если порядок роста целой функции $\det(1+\lambda\mathsf{D})$ меньше 1.

Ввиду возможности циклической перестановки операторов под знаком Sp и того факта, что произведение ядерных операторов является ядерным оператором, имеем

$$\operatorname{Sp}\mathsf{D}^m = \operatorname{Sp}(\mathsf{VK})^m < \infty, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Благодаря сходимости ряда в показателе экспоненты в формуле (5.4), при $|\lambda| < |\mu_1|^{-1}$ сходится ряд

$$\operatorname{Sp}\ln(1+\lambda\mathsf{D}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}\lambda^m \operatorname{Sp}\mathsf{D}^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}\lambda^m \operatorname{Sp}(\mathsf{VK})^m = \det(1+\lambda\mathsf{VK}).$$

Таким образом, получаем следующую формулу для детерминанта (5.4):

$$\det(1+\lambda\mathsf{VK}) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}\lambda^m \int\limits_0^T (\mathsf{VK})^m(t,t)dt\right). \tag{5.5}$$

Точно такая же формула справедлива для оператора KV.

Суммируем проведенный анализ в виде следующего утверждения.

Теорема 5.1. *Если функции $K(t,t')$ и $V(t,t')$ непрерывны на $[0,T]^2$ и нулевое пространство оператора V тривиально, то операторы VK и KV ядерные и для них существуют детерминанты $\det(1+\lambda\mathsf{VK})$ и $\det(1+\lambda\mathsf{KV})$, определяемые разложением Адамара (5.3), которые являются целыми аналитическими функциями с порядком роста, меньшим 1, не равные нулю внутри круга с радиусом $\|\mathsf{VK}\|$.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только заключительная часть утверждения. Его справедливость следует из того, что собственные числа операторов VK и KV являются одновременно собственными числами оператора $\mathsf{K}^{1/2}\mathsf{VK}^{1/2}$ и вследствии того, что для любой собственной функции $\psi_n(t)$ последнего оператора имеет место соотношение

$$\mu_n = \big(\mathsf{VK}\psi_n(t), \psi_n(t)\big) \leqslant \|\mathsf{VK}\|,$$

а нули $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ аналитических функций $\det(1+\lambda\mathsf{VK})$ и $\det(1+\lambda\mathsf{KV})$ определяются равенством $\lambda_n = -\mu_n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. □

Для того чтобы обосновать метод вычисления характеристической функции $Q_J(-i\lambda)$, докажем формулу связи функции $Q_J(-i\lambda)$ с $\det(1+\lambda\mathsf{D})$. Это доказательство основано на применении комплекснозначного случайного процесса $\{\tilde z(t);\ t \in [0,T]\}$ и, как следствие, на свойствах алгебры $\mathfrak{A}([0,T])$. Рассмотрим квадратичный функционал $\mathsf{J}_c[\tilde z(t)]$, порождаемый интегральным ядром $V(t,t')$, от траекторий комплекснозначного гауссовского процесса $\{\tilde z(t);\ t \in [0,T]\}$, введенного в разделе 2,

$$\mathsf{J}_c[\tilde z(t)] = \int\limits_0^T V(t,t')\tilde z(t)\tilde z^*(t')dtdt'. \tag{5.6}$$

Его значения вещественны ввиду свойства симметрии $V(t,t') = V(t',t)$. Рассмотрим характеристическую функцию $Q(-i\lambda) = \mathsf{E}\exp(i\lambda\,\mathsf{J}_c[\tilde z(t)])$ этой случайной величины.

Лемма 5.1. *Имеет место формула*

$$Q(-i\lambda) = Q_J^2(-i\lambda). \tag{5.7}$$

Доказательство. Из определения (5.6), используя симметрию функции $V(t,t')$, получаем, что

$$\mathsf{J}_c[\tilde z(t)] = \mathsf{J}[\tilde x(t)] + \mathsf{J}[\tilde y(t)],$$

где $\tilde{z}(t) = \tilde{x}(t) + i\tilde{y}(t)$, $t \in [0,T]$. Тогда

$$\exp(i\lambda\, \mathsf{J}[\tilde{x}(t)]) \cdot \exp(i\lambda\, \mathsf{J}[\tilde{y}(t)]) = \exp(i\lambda\, \mathsf{J}_c[\tilde{z}(t)]).$$

Формула (5.7) является следствием того факта, что случайные процессы $\{\tilde{x}(t); t \in [0,T]\}$ и $\{\tilde{y}(t); t \in [0,T]\}$ стохастически независимы и эквивалентны. □

Вид характеристической функции $Q(-i\lambda)$ определяется следующим утверждением.

Теорема 5.2. *Пусть $Q(-i\lambda)$ — характеристическая функция случайной величины $\mathsf{J}_c[\tilde{z}(t)]$. Тогда функция $Q^{-1}(-i\lambda)$ является целой аналитической с $Q^{-1}(0) = 1$ с порядком роста, меньшим 1, и для нее имеет место формула*

$$Q(-i\lambda) = \big[\det(1 - 2i\lambda \mathsf{VK})\big]^{-1}. \tag{5.8}$$

При этом $Q(-i\lambda)$ является мероморфной аналитической характеристической функцией. Она полностью определяется расположением множества своих полюсов, равных $(2i\mu_n)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, и таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n| < \infty.$$

Доказательство. Согласно определению характеристической функции $Q(-i\lambda)$ имеем

$$\mathsf{E}\exp\Big(i\lambda\, \mathsf{J}_c[\tilde{z}(t)]\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!}\, \mathsf{E}\,\mathsf{J}_c^n[\tilde{z}(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \int\limits_{[0,T]^{2n}} \mathsf{E}\prod_{j=1}^{n} \tilde{z}(t)\tilde{z}^*(t'_j) \prod_{j=1}^{n} V(t_j, t'_j)dt_j dt'_j.$$

Используя (3.2), а затем (3.13), находим

$$\begin{aligned}
Q(-i\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \int\limits_{[0,T]^{2n}} \left[\prod_{j=1}^{n} V(t'_j, t_j)\right] \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n} \left[\prod_{j=1}^{n} \mathsf{E}\,\tilde{z}(t'_j)\tilde{z}^*(t_{\mathsf{P}\,j})\right] \prod_{j=1}^{n} dt_j dt'_j = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n!} \int\limits_{[0,T]^{2n}} \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n} \left[\prod_{j=1}^{n} K(t'_j, t_{\mathsf{P}\,j})\right] \prod_{j=1}^{n} V(t'_j, t_j)dt_j dt'_j = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n!} \int\limits_{[0,T]^{n}} \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n} \left[\prod_{j=1}^{n} \big(\mathsf{VK}\big)(t_j, t_{\mathsf{P}\,j})\right] \prod_{j=1}^{n} dt_j = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n!} \int\limits_{[0,T]^{n}} \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n} \left[\prod_{j=1}^{n} D(t_j, t_{\mathsf{P}\,j})\right] \prod_{j=1}^{n} dt_j = \mathsf{F}(u(t); \mathsf{g}),
\end{aligned}$$

где $u(t) = 1$ и g определяется формулой (4.7) с $D(t,t') = \big(\mathsf{VK}\big)(t,t')$. Тогда, согласно (4.5),

$$\begin{aligned}
Q(-i\lambda) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n!} \int\limits_{[0,T]^{n}} \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n}^{*} \left[\prod_{j=1}^{n} D(t_j, t_{\mathsf{P}\,j})\right] \prod_{j=1}^{n} dt_j\right) = \\
&= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n!} \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n}^{*} \int\limits_{[0,T]^{n}} \left[\prod_{j=1}^{n} D(t_j, t_{\mathsf{P}\,j})\right] \prod_{j=1}^{n} dt_j\right),
\end{aligned}$$

где учтено, что $D_0 = 0$. Положив $t = t_1$, производя замену переменных интегрирования $t_{\mathsf{P}j}$ на t_j, $j = 1, \ldots, n$, и учитывая, что число всех эргодических подстановок равно $(n-1)!$, находим

$$Q(-i\lambda) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n!} \sum_{\mathsf{P}\in\mathbb{P}_n}^{*} \int\limits_{[0,T]} (\mathsf{D}^n)(t,t)dt\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i\lambda)^n}{n} \int\limits_{[0,T]} (\mathsf{VK})^n(t,t)dt\right).$$

Сравнивая полученное выражение с (5.5), в котором λ заменим на $-2i\lambda$, находим, что при достаточно малых $|\lambda|$, определяемых условием сходимости степенного ряда в показателе экспоненты, выполняется (5.8). Так как в этом случае, согласно теореме 4.4, $Q^{-1}(-2i\lambda)$ — такая целая аналитическая функция от $\lambda \in \mathbb{C}$, что $Q^{-1}(0) = 1$, то характеристическая функция $Q(-i\lambda)$ является аналитической (см., например, [19]) мероморфной функцией. Она голоморфна в круге с радиусом, не меньшим, чем $(2\|\mathsf{VK}\|)^{-1}$. Поэтому формула (5.8) допускает аналитическое продолжение на всю плоскость $\lambda \in \mathbb{C}$, за исключением точек $\lambda = -i/2\mu_m$, $m \in \mathbb{N}$, в которых $\det(1 - 2i\lambda\mathsf{D}) = 0$. □

Следствие 5.1. *Характеристическая функция $Q_J(-i\lambda)$ определяется формулой*

$$Q_J(-i\lambda) = \Big[\det(1 - 2i\lambda\mathsf{VK})\Big]^{-1/2}, \tag{5.9}$$

где $\det(1 - 2i\lambda\mathsf{VK})$ — *целая функция от $\lambda \in \mathbb{C}$ с порядком роста, меньшим* 1.

Формула (5.9) выявляет смысл применения комплексификации случайного процесса $\{\tilde{x}(t);\ t \in [0,T]\}$. Такой подход позволяет избежать появления точек ветвления в процессе вычисления характеристической функции и, в конце концов, свести ее построение к использованию разложения Адамара.

6. Заключение. Главный результат проведенного в настоящей работе исследования сформулирован в теоремах 5.1 и 5.2 и следствии 5.1. Из него вытекает, что функция $Q_J^{-1}(-i\lambda)$ однозначно, с точностью до постоянного множителя, определяется своими нулями $\{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. В сочетании с условием нормировки $Q(0) = 1$ это позволяет однозначно найти вид характеристической функции, если построена какая-либо целая аналитическая функция с порядком роста, меньшим единицы, которая обращается в нуль в том и только в том случае, когда $\lambda_n = -i/2\mu_n$, где $\{\mu_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ — собственные числа интегрального оператора с ядром $(\mathsf{VK})(t,t')$. Тогда эта функция может отличаться от $Q_J^{-1}(-i\lambda)$ только лишь постоянным множителем, который находится из условия $Q(0) = 1$. Указанный метод установления характеристической функции случайной величины $\mathsf{J}[\tilde{x}(t)]$ посредством установления уравнения для нулей функции $Q^{-1}(-i\lambda)$ мы называем *методом реконструкции.* Он применялся при решении различных прикладных задач (см., например, [4, 5, 9]).

Несмотря на то, что исследование, проведенное в настоящей работе, основано на предположении о непрерывности функции $V(t,t')$, в прикладных задачах приходится использовать функции $V(t,t')$, которые являются обобщенными функциями над пространством $\mathrm{C}[0,T]$ непрерывных на $[0,T]$ основных функций. Таковы, например, функционалы, возникающие в задачах статистической радиофизики:

$$\mathsf{J}[\tilde{x}(t)] = \alpha \int\limits_0^T \tilde{x}^2(t)dt$$

(см. [15, 23]) при $V(t,t') = \alpha\delta(t-t')$,

$$\mathsf{J}[\tilde{x}(t)] = \alpha \int\limits_0^T \tilde{x}(t)\tilde{x}(T-t)dt$$

(см. [4,5]) при $V(t,t') = \alpha\delta(t + t' - T)$,

$$\mathsf{J}[\tilde{x}(t)] = \alpha \int_0^T (\tilde{x}(t)\tilde{x}(t+\Delta) + \tilde{x}(t)\tilde{x}(t-\Delta))dt, \quad \Delta > 0$$

при $V(t,t') = \alpha\big(\delta(t' - t - \Delta) + \delta(t' - t + \Delta)\big)$ и $t \in [-\Delta, T + \Delta]$ с положительной постоянной $\alpha > 0$. В дальнейшем важно дать обоснование методу реконструкции, применяемому при вычислении характеристических функций для такого рода функционалов от гауссовских случайных процессов. Кроме того, заметим, что метод реконструкции, которому было дано обоснование в настоящей работе, переносится на многомерный случай, т.е. для вычисления характеристических функций квадратичных функционалов от гауссовских полей на $\mathbb{R}^n$. При обосновании такого подхода, следуя плану настоящей работы, почти все доказательства, по-видимому, могут быть повторены почти дословно при комплексификации случайного поля. Такая математическая работа, по нашему мнению, важна с прикладной точки зрения (см. по этому поводу, например, [10]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
2. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин С. А.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
3. *Вирченко Ю. П., Данилова Л. П.* Графы и симметрические функции// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *174*. — С. 20–36.
4. *Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С.* Статистические свойства функционала-свертки от нормального марковского процесса// Докл. АН УССР. — 1988. — № 1. — С. 14–16.
5. *Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С.* Распределение вероятностей случайного функционала-свертки от нормального марковского процесса// Пробл. передачи информ. — 1990. — *26*, № 3. — С. 96–101.
6. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ в задачах. — М.: Наука, 1969.
7. *Клячко А. А., Солодянников Ю. В.* Вычисление распределения свертки винеровского процесса// Пробл. передачи информ. — 1985. — *21*, № 4. — С. 41–48.
8. *Клячко А. А., Солодянников Ю. В.* Вычисление характеристических функций некоторых функционалов от винеровского процесса и броуновского моста// Теор. вер. примен. — 1986. — *31*, № 3. — С. 569–573.
9. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Радио и связь, 1989.
10. *Мазманишвили А. С.* Интегральные квадратичные функционалы, основанные на марковском нормальном двумерном поле, и их статистика// Изв. вузов. Радиофизю — 2000. — *43*, № 6. — С. 564–572.
11. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
12. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М.: Физматлит, 1960.
13. *Arato M.* Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach. — Berlin: Springer-Verlag, 1982.
14. *Ibragimov I. A., Rozanov Yu. A.* Gaussian Random Processes. — New York: Springer-Verlag, 1978.
15. *Kac M., Ziegert A. J. F.* On the theory of noise in radio recievers with square law detector// J. Appl. Phys. — 1947. — *18*, № 4. — P. 383–397.
16. *Karhunen K.* Über linearen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. — 1947. — № 37.
17. *Lax M.* Fluctuation and Coherence Phenomena in Classical and Quantum Physics. — New York: Gordon and Breach, 1968.
18. *Loéve M.* Probability Theory. — Princeton, New Jersey: Van Nostrand, 1955.
19. *Lukacs E.* Characteristic Functions. — New York: Hafner, 1970.
20. *Ruelle D.* Statistical Mechanics. Rigorous Results. — New York–Amsterdam: W.A.Benjamin, 1969.
21. *Simon B.* The $P(\varphi)_2$ Euclidian (Quantum) Field Theory. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1974.
22. *Simon B.* Functional Integration and Quantum Physics. — New York: Academic Press, 1979.

23. *Slepian D.* Fluctuation of random noise power// Bell Syst. Techn. J. — 1958. — *37*, № 1. — P. 163–184.
24. *Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S.* On the theory of Brownian motion// Phys. Rev. — 1930. — *36*. — P. 823–841.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Вирченко Юрий Петрович
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Мазманишвили Александр Сергеевич
Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
E-mail: mazmanishvili@gmail.ru