ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS

MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Том 27
№ 138
2022

ISSN 2686-9667
22138>
9 772686 966000

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 27, № 138, 2022

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России (распоряжение от 28 декабря 2018 г. № 90-р) по физико-математическим наукам

Индексируется Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ, Math-Net.Ru, ВИНИТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка»

СОДЕРЖАНИЕ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»
Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Редакторы: М.И. Филатова, Н.А. Михайлова
Редакторы английских текстов: В.В. Клочихин, М.А. Сенина
Компьютерное макетирование Т.Ю. Молчановой
Технический редактор Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. – 2022. – Т. 27, № 138. – 76 с. – https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-138

Подписано в печать 14.06.2022. Дата выхода в свет 06.07.2022
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 9,5. Усл. печ. л. 8,8. Тираж 1000 экз. Заказ № 22388. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 27, no. 138, 2022

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order from December 28, 2018 no. 90-p)

Indexed in Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI, Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka"

CONTENTS

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Derzhavin Tambov State University”
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Subscription index in the catalogue of LLC “Ural-Press” is 83372
Distribution territory: Russian Federation, foreign countries

Editors: M.I. Filatova, N.A. Mikhailova
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Senina
Computer layout by T.Y. Molchanova
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:
Russian Universities Reports. Mathematics. – 2022. – Vol. 27, no. 138. – 76 p. – https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-138

Signed for printing 14.06.2022. Release date 06.07.2022
Format A4 (60×84 1/8). Typeface “Times New Roman”. Printed on risograph.
Pr. sheet 9,5. Conv. pr. sheet 8,8. Copies printed 1000. Order no. 22388. Free price

Publisher: FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”
Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region.
Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 138 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-129-135
УДК 517.927.4

О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка

Гусен Эльдерханович АБДУРАГИМОВ
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»
367025, Российская Федерация, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а

Аннотация. В настоящей статье рассматривается двухточечная краевая задача для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка со слабой нелинейностью на отрезке $[0,1]$ с нулевыми условиями Дирихле на границе. Краевая задача сводится к эквивалентному интегральному уравнения в пространстве непрерывных функций. С помощью специальных топологических средств (использующих геометрические свойства конусов в пространстве непрерывных функций, утверждения о неподвижных точках монотонных и вогнутых операторов) доказано существование единственного положительного решения рассматриваемой задачи. Приведен пример, иллюстрирующий выполнение достаточных условий, обеспечивающую однозначную разрешимость поставленной задачи. Полученные результаты являются продолжением исследований автора (см. [Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2021, т. 194, с. 3–7]), посвященных вопросам существования и единственности положительных решений краевых задач для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение дробного порядка, положительное решение, краевая задача, конус, конусный отрезок

Для цитирования: *Абдурагимов Г.Э.* О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 129–135. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-129-135.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-129-135

On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear functional differential equation of fractional order

Gusen E. ABDURAGIMOV
Dagestan State University
43a M. Hajiyev St., Makhachkala 367025, Russian Federation

Abstract. In this article, we consider a two-point boundary value problem for a nonlinear functional differential equation of fractional order with weak nonlinearity on the interval $[0, 1]$ with zero Dirichlet conditions on the boundary. The boundary value problem is reduced to an equivalent integral equation in the space of continuous functions. Using special topological tools (using the geometric properties of cones in the space of continuous functions, statements about fixed points of monotone and concave operators), the existence of a unique positive solution to the problem under consideration is proved. An example is given that illustrates the fulfillment of sufficient conditions that ensure the unique solvability of the problem. The results obtained are a continuation of the author's research (see [Results of science and technology. Ser. Modern mat. and her appl. Subject. review, 2021, vol. 194, pp. 3–7]) devoted to the existence and uniqueness of positive solutions of boundary value problems for non-linear functional differential equations.

Keywords: functional differential equation of fractional order, positive solution, boundary value, cone, tapered segment

Mathematics Subject Classification: 26A33, 34B18, 34K10.

For citation: Abduragimov G.E. O sushchestvovanii i edinstvennosti polozhitel'nogo resheniya krayevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya drobnogo poryadka [On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear functional differential equation of fractional order]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 129–135. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-129-135. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Вопросам исследования разрешимости краевых задач для нелинейных дробно-дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое число работ. Отметим близкие по тематике данному исследованию работы [1–14], в которых рассмотрены вопросы существования положительных решений, их свойства, асимптотики и т. д., причем естественным инструментом исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании техники нелинейного анализа (теоремы о неподвижной точке, теорема Лере–Шаудера и др.). Однако работ, посвященных непосредственно вопросам существования единственного положительного решения краевой задачи для нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка, мало. Из цитированных выше исследований условия единственности предложены только в статье [2]. В настоящей работе предпринята попытка устранить данный пробел. На основе методов функционального анализа с помощью специальных топологических средств доказывается существование единственного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально–дифференциального уравнения дробного порядка со слабой нелинейностью. Ранее в статье [15] автором были получены достаточные условия разрешимости уравнений с сильной нелинейностью при аналогичных краевых условиях. Полученные здесь результаты дополняют результаты исследований автора, посвященных данной тематике.

1. Постановка задачи и основные результаты

Обозначим через C — пространство $C[0,1]$, через $\mathbb{L}_p$ $(1<p<\infty)$ — пространство $\mathbb{L}_p(0,1)$ и через $\mathbb{W}^2$ — пространство вещественных функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$D^{\alpha}_{0+}x(t)+f\left(t,(Tx)\,(t)\right)=0,\quad 0<t<1, \tag{1.1}$$

$$x(0)=0,\quad x(1)=0, \tag{1.2}$$

где $\alpha\in(1,2]$ — действительное число, D^{α}_{0+} — дробная производная Римана–Лиувилля, $T\colon C\to\mathbb{L}_p$ $(1<p<\infty)$ — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1]\times[0,\infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot,0)\equiv 0$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Под *положительным решением* задачи (1.1),(1.2) будем понимать функцию $x\in\mathbb{W}^2$ положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1.1),(1.2) интегральное уравнение

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)\,(s)\right)\,ds,\quad 0\le t\le 1, \tag{1.3}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-D^{\alpha}_{0+}x(t)$ с краевыми условиями (1.2):

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(t(1-s))^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } 0\le s\le t,\\[2ex] \dfrac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } t\le s\le 1.\end{cases}$$

Предположим, что функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию

$$f(t,u) \leq a(t) + bu^{p/q},$$

где $b > 0$, $a(t) \in \mathbb{L}_q$, $q \in (1,\infty)$. Это условие обеспечивает действие оператора Немыцкого $N\colon \mathbb{L}_p \to \mathbb{L}_q$, определяемого соотношением $(Ny)(t) = f(t, y(t))$ для каждого $y(t) \in \mathbb{L}_p$.

В операторной форме уравнение (1.3) можно переписать в виде

$$x = GNTx,$$

где $G\colon \mathbb{L}_q \to C$, $(Gu)(t) = \displaystyle\int_0^1 G(t,s)u(s)\,ds$ — оператор Грина. Обозначим $A = GNT$. Этот оператор определяется равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right)\,ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций, монотонен, вполне непрерывен [16, с. 161] и оставляет инвариантным нормальный конус $\tilde{K}$ неотрицательных функций пространства C, удовлетворяющих граничным условиям (1.2).

Теорема 1.1. *Предположим, что существуют такие неотрицательные функции* $\upsilon, \omega \in \mathbb{W}^2$, *что справедливы соотношения*

$$\upsilon \leq \omega, \quad \upsilon(0) = 0 \leq \omega(0), \quad \upsilon(1) = 0 \leq \omega(1)$$

и почти всюду на $[0,1]$ *выполнены условия*

$$-D^{\alpha}_{0+}\upsilon(t) \leq f\left(t, (T\upsilon)(t)\right), \quad -D^{\alpha}_{0+}\omega(t) \geq f\left(t, (T\omega)(t)\right).$$

Тогда краевая задача (1.1), (1.2) *имеет по крайней мере одно положительное решение на конусном отрезке* $\langle \upsilon, \omega \rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как несложно убедиться, из соотношений

$$-D^{\alpha}_{0+}\upsilon(t) \leq f\left(t, (T\upsilon)(t)\right), \quad \upsilon(0) = 0, \quad \upsilon(1) \leq 0,$$

следует, что $A\upsilon \geq \upsilon$. Неравенство $A\omega \leq \omega$ получается аналогичным образом.

Тогда, поскольку конус $\tilde{K}$ нормален [17, с. 21] и оператор A, как было выше отмечено, вполне непрерывен, на основании теоремы [17, с. 129] можно заключить, что на $\langle \upsilon, \omega \rangle$ существует по крайней мере одна неподвижная точка оператора A. Последнее в свою очередь равносильно существованию по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи (1.1), (1.2). □

Теорема 1.2. *Предположим, что при* $u > 0$ *и любом* $\tau \in (0,1)$

$$f(t, \tau u) > \tau f(t,u) \quad (t \in (0,1)). \tag{1.4}$$

Тогда при выполнении условий теоремы 1.1 *краевая задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное положительное решение на конусном отрезке* $\langle \upsilon, \omega \rangle$.

Доказательство. Согласно теореме 1.1 краевая задача (1.1), (1.2) имеет положительное решение на конусном отрезке $\langle v, \omega \rangle$. Докажем единственность этого решения.

Вначале покажем, что оператор Грина G обладает следующим свойством: существует такая ненулевая функция $u_0 \in \tilde{K}$, что для каждой ненулевой неотрицательной функции $u \in \mathbb{L}_q$ можно указать такие числа ς_1, ς_2, что выполнены неравенства

$$\varsigma_1 u_0 \leq Gu \leq \varsigma_2 u_0 \tag{1.5}$$

(подобные операторы называют u_0-положительными, см. [17, с. 59]). Для любой ненулевой неотрицательной функции $u \in \mathbb{L}_q$ можно указать множество $\Omega_1 \subset [0,1]$ такое, что $u(t) \geq \mu > 0$, $t \in \Omega_1$. В силу соответствующих свойств [?, с. 498] функции Грина рассматриваемой задачи, получим

$$(Gu)(t) = \int_0^1 G(t,s)u(s)\,ds \geq \int_{\Omega_1} \gamma(s)G(s,s)\,ds \cdot \mu \cdot \varphi(t) \quad (t \in [0,1]),$$

где $\gamma(t)$ — положительная непрерывная функция, $\varphi(t) = \min(t, 1-t)$.

С другой стороны, поскольку $G(t,s) \leq \dfrac{\varphi^{\alpha-1}(t)}{\Gamma(\alpha)}$, имеем

$$(Gu)(t) = \int_0^1 G(t,s)u(s)\,ds \leq \frac{\varphi^{\alpha-1}(t)}{\Gamma(\alpha)}\|u\|_{\mathbb{L}_q} \leq \frac{\|u\|_{\mathbb{L}_q}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \varphi(t) \quad (t \in [0,1]).$$

Из полученных неравенств следуют соотношения (1.5) с $u_0(t) \equiv \varphi(t)$, т. е. оператор G является u_0-положительным.

Несложно видеть, что u_0-положительность оператора G обеспечивает u_0-положительность оператору A.

С учетом (1.4) имеем

$$\int_0^1 G(t,s)\big[f(t, \tau\,(Tx)\,(s)) - \tau f(t, (Tx)\,(s))\big]\,ds \geq \beta_1 u_0(t) \quad (t \in [0,1]),$$

где $\beta_1 > 0$. В то же время

$$\int_0^1 G(t,s)f(t, (Tx)\,(s))\,ds \leq \beta_2 u_0(t) \quad (t \in [0,1]).$$

Поэтому

$$\int_0^1 G(t,s)f(t, \tau\,(Tx)\,(s))\,ds \geq \tau\left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_2 \tau}\right)\int_0^1 G(t,s)f(t, (Tx)\,(s))\,ds \quad (t \in [0,1]).$$

Полученное неравенство совпадает с условием u_0-вогнутости оператора A (см. [17, с. 197]), что позволяет воспользоваться теоремой 6.3 из [17, с. 200]. Согласно этой теореме оператор A не может иметь в конусе $\tilde{K}$ две различные неподвижные точки. Следовательно, краевая задача (1.1), (1.2) имеет на конусном отрезке $\langle v, \omega \rangle$ единственное решение. □

П р и м е р 1.1. Рассмотрим краевую задачу

$$D_{0+}^{3/2}x(t) + \frac{4\cdot 3^{0,1}}{\pi} t \left(\int_0^1 x(s)\,ds\right)^{0,1} = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1.6}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \tag{1.7}$$

Выбрав

$$\upsilon(t) = 0, \quad \omega(t) = 1 - t^2, \quad t \in [0,1],$$

нетрудно проверить выполнение условий вышеприведенных теорем. Таким образом, можно утверждать, что краевая задача (1.6), (1.7) в пределах указанных выше границ конусного отрезка имеет единственное положительное решение.

Заметим, что точным положительным решением задачи (1.6), (1.7) является функция $x(t) = \sqrt{t} - t^2$.

References

[1] X. Xu, D. Jiang, C. Yuan, "Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **71**:10 (2009), 4676–4688.

[2] S. Sun, Y. Zhao, Z. Han, M. Xu, "Uniqueness of positive solutions for boundary value problems of singular fractional differential equations", *Inverse Problems in Science and Engineering*, **20**:3 (2012), 299–309.

[3] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, W. Feng, "Positive solutions for a coupled system of nonlinear differential equations of mixed fractional orders", *Advances in Difference Equations*, 2011, № 1, 1–13.

[4] T. Qiu, Z. Bai, "Existence of positive solutions for singular fractional differential equations", *Electronic Journal of Differential Equations*, **2008(2008)**:146 (2008), 1–9.

[5] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, Q. Li, "Positive solutions to boundary value problems of nonlinear fractional differential equations", *Abstract and Applied Analysis*, **2011**:217 (2011), 6950–6958.

[6] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, Q. Li, "The existence of multiple positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**:4 (2011), 2086–2097.

[7] B. Ahmad, R. P. Agarwal, "Some new versions of fractional boundary value problems with slit-strips conditions", *Boundary Value Problems*, **175** (2014), 1–12.

[8] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, Y. L, "The iterative solutions of nonlinear fractional differential equations", *Applied Mathematics and Computation*, **219**:9 (2013), 4680–4691.

[9] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, "Existence results for multiple positive solutions of nonlinear higher order perturbed fractional differential equations with derivatives", *Applied Mathematics and Computation*, **219**:4 (2012), 1420–1433.

[10] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, "Multiple positive solutions of a singular fractional differential equation with negatively perturbed term", *Mathematical and Computer Modelling*, **55**:3–4 (2012), 1263–1274.

[11] Y. Wang, L. Liu, Y. Wu, "Positive solutions for a nonlocal fractional differential equation", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **74**:11 (2011), 3599–3605.

[12] Z. Bai, H. Lu, "Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **311**:2 (2005), 495–505.

[13] S. Zhang, "Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations", *Electronic Journal of Differential Equations*, **2006(2006)**:36 (2006), 1–12.

[14] S. Liang, J. Zhang, "Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **71**:11 (2009), 5545–5550.

[15] Г. Э. Абдурагимов, "О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка", *Материалы Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXX». Воронеж, 3–9 мая 2019 г. Часть 5*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **194**, ВИНИТИ РАН, М., 2021, 3–7. [G. E. Abduragimov, "On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear functional-differential equation of fractional order", *Proceedings of the Voronezh spring mathematical school "Modern methods of the theory of boundary-value problems. Pontryagin readings – XXX". Voronezh, May 3-9, 2019. Part 5*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **194**, VINITI, Moscow, 2021, 3–7 (In Russian)].

[16] С. Г. Крейн, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972. [S. G. Krein, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

[17] М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений*, Физматгиз, М., 1962; англ. пер.:M. A. Krasnosel'skii, *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff, Groningen, 1964.

Информация об авторе

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики. Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Российская Федерация. E-mail: gusen_e@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7095-932X

Поступила в редакцию 17.02.2022 г.
Поступила после рецензирования 20.05.2022 г.
Принята к публикации 09.06.2022 г.

Information about the author

Gusen E. Abduragimov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department. Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation. E-mail: gusen_e@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7095-932X

Received 17.02.2022
Reviewed 20.05.2022
Accepted for press 09.06.2022

Том 27, № 138 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-136-142
УДК 517.938

О взаимоотношении движений динамических систем

Александр Петрович АФАНАСЬЕВ[1,2,3], **Сергей Михайлович ДЗЮБА**[4]

[1] ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича» Российской академии наук
127051, Российская Федерация, г. Москва, Большой Каретный переулок, 19

[2] ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

[3] ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

[4] ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»
170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. В более ранних статьях авторов [А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, «О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем», *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 5–14] и [А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, «Новые свойства рекуррентных движений и предельных множеств динамических систем», *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 5–15] фактически установлено взаимоотношение движений динамических систем в компактных метрических пространствах. Целью данной работы является распространение этих результатов на случай динамических систем в произвольных метрических пространствах.

Именно, пусть Σ – произвольное метрическое пространство. В настоящей статье, прежде всего, установлено новое важнейшее свойство, связывающее в таком пространстве произвольные и рекуррентные движения. Далее, на основании этого свойства показано, что если положительная (отрицательная) полутраектория некоторого движения $f(t,p)$, расположенного в Σ, относительно компактна, то ω- (α-) предельное множество данного движения – компактное минимальное множество. Из этого следует, что в пространстве Σ любое нерекуррентное движение является или положительно (отрицательно) уходящим, или положительно (отрицательно) асимптотическим по отношению к соответствующему минимальному множеству.

Ключевые слова: динамические системы в метрических пространствах, взаимоотношение движений

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00347_а), РНФ (проект № 22-11-00317).

Для цитирования: *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* О взаимоотношении движений динамических систем // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 136–142. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-136-142.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-136-142

On the interrelation of motions of dynamical systems

Aleksandr P. AFANAS'EV[1,2,3], **Sergei M. DZYUBA**[4]

[1] Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences
19 Bolshoy Karetny per., Moscow 127051, Russian Federation

[2] Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation

[3] Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklouho-Maclay St., Moscow 117198, Russian Federation

[4] Tver State Technical University
22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. In the earlier articles by the authors [A. P. Afanasiev, S. M. Dzyuba, "On new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 5–14] and [A. P. Afanasiev, S. M. Dzyuba, "New properties of recurrent motions and limit motions sets of dynamical systems", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 5–15], there was actually established the interrelation of motions of dynamical systems in compact metric spaces. The goal of this paper is to extend these results to the case of dynamical systems in arbitrary metric spaces.

Namely, let Σ be an arbitrary metric space. In this article, first of all, a new important property is established that connects arbitrary and recurrent motions in such a space. Further, on the basis of this property, it is shown that if the positive (negative) semitrajectory of some motion $f(t,p)$ located in Σ is relatively compact, then ω- (α-) limit set of the given motion is a compact minimal set. It follows, that in the space Σ, any nonrecurrent motion is either positively (negatively) outgoing or positively (negatively) asymptotic with respect to the corresponding minimal set.

Keywords: dynamical systems in metric spaces, interrelation of motions

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00347_a), Russian Science Foundation (project no. 22-11-00317).

Mathematics Subject Classification: 37B20, 37B25.

For citation: Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M. O vzaimootnoshenii dvizheniy dinamicheskikh sistem [On the interrelation of motions of dynamical systems]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 136–142. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-136-142. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В своей знаменитой книге [1] Дж. Биркгоф полно и подробно изложил основы общей теории динамических систем, которые по сей день во многом определяют развитие нелинейной динамики и ее приложений.

Конечной целью общей теории динамических систем является «качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями» (см. [1, с. 194]).

Важнейшим из всех типов движений, как известно, является рекуррентное. Одна из главных заслуг Дж. Биркгофа состоит в том, что он фактически показал, что в метрическом пространстве Σ из существования движения $f(t,p)$, расположенного в компактном множестве $E \subset \Sigma$, следует существование рекуррентного движения $f(t,q)$, расположенного в компактном минимальном множестве $M \subset E$.

Хорошо известно, что каждое рекуррентное движение устойчиво по Пуассону (см., например, [2, с. 402]). Дж. Биркгоф допускал, что существуют устойчивые по Пуассону нерекуррентные движения. Однако, ни примеров, ни критериев существования таких движений он не привел (см. [1, гл. VII]). Более того, до недавнего времени эта ситуация оставалась неизменной (см., например, [3, с. 1–4]).

Заметим теперь, что в работе [4] показано, что в компактном метрическом пространстве Σ устойчивость по Пуассону является лишь характеристическим свойством рекуррентности движений. Это позволяет установить взаимоотношение движений в произвольном метрическом пространстве Σ: *каждое нерекуррентное движение, расположенное в* Σ, *является или положительно (отрицательно) уходящим, или положительно (отрицательно) асимптотическим по отношению к соответствующему минимальному множеству.*

Основной целью настоящей работы является доказательство данного утверждения.

1. Произвольные и рекуррентные движения

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}\times\Sigma \to \Sigma$ и положим

$$f(t,p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

(a) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R}\times\Sigma$;

(b) для всех $p \in \Sigma$

$$g^0 p = p;$$

(c) для всех $t, s \in \mathbb{R}$

$$g^{t+s} = g^t g^s.$$

Тогда, следуя [2, с. 347], будем говорить, что группа преобразований g^t — *динамическая система*, а для любого $p \in \Sigma$ функция $t \to f(t,p)$ — *движение*.

Приведем определение рекуррентного движения, которое прочно устоялось в современных источниках (см., например, [2, с. 402]).

О п р е д е л е н и е 1.1. Движение $f(t,p)$ называется *рекуррентным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $T_\varepsilon > 0$, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ дуга

$$K_{\tau,T_\varepsilon} = \{f(t,p)\colon\ t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]\}$$

траектории

$$K = \{f(t,p):\ t \in \mathbb{R}\}$$

этого движения аппроксимирует всю траекторию K с точностью ε, т. е. при заданном ε и соответствующем ему T_ε для всех $s \in \mathbb{R}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ найдется такое $t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]$, что

$$d(f(s,p), f(t,p)) < \varepsilon.$$

Напомним, что множество $M \subset \Sigma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами (см., например, [2, с. 400]). Кроме того, заметим, что в полном пространстве Σ замыкание $\bar{K}$ траектории K рекуррентного движения $f(t,p)$ является компактным минимальным множеством M, а каждое движение $f(t,p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M, рекуррентно (см. [2, с. 402, 404]).

Как известно, в метрическом пространстве Σ любое непустое компактное инвариантное множество M_1 содержит компактное минимальное множество M (см., например, [2, с. 401]). Это фундаментальное утверждение дополняет следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если для заданного $p \in \Sigma$ положительная полутраектория*

$$K^+(p) = \{f(t,p):\ t \geq 0\}$$

некоторого движения $f(t,p)$ относительно компактна, то для каждого положительного числа T из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что в ω-предельном множестве Ω движения $f(t,p)$ расположено рекуррентное движение $f(t,q)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) *равномерно на каждом из отрезков $[a,b] \subset \mathbb{R}$*

$$\lim_{l\to+\infty} f(t + (N_{k_l} - 1)T, p) = f(t,q);$$

(ii) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$*

$$\lim_{l\to+\infty} f(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T, q) = f(t,q).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как полутраектория $K^+(p)$ относительно компактна, то ω-предельное множество Ω движения $f(t,p)$ непусто и компактно. Более того, для всех $t_0 \in \mathbb{R}$ полутраектория

$$K_{t_0}(p) = \{f(t,p):\ t \geq t_0\}$$

движения $f(t,p)$ также относительно компактна. Отсюда в силу теоремы 1 работы [5] следует справедливость утверждения теоремы 1.1. □

З а м е ч а н и е 1.1. Вообще говоря, в условиях теоремы 1.1 выбор числа T не зависит от выбора последовательности $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и обратно. Более того, действуя как и выше, несложно показать, что имеет место следующее дополнение к теореме 1.1.

Если при заданном $p \in \Sigma$ отрицательная полутраектория

$$K^-(p) = \{f(t,p):\ t \leq 0\}$$

некоторого движения $f(t,p)$ *относительно компактна, то для каждого положительного числа* T *из любой последовательности натуральных чисел* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ *можно выбрать такую ее подпоследовательность* $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, *что в* α*-предельном множестве* A *движения* $f(t,p)$ *расположено рекуррентное движение* $f(t,r)$, *удовлетворяющее следующим условиям:*

(iii) *равномерно на каждом из отрезков* $[a,b]\subset\mathbb{R}$

$$\lim_{l\to+\infty} f(t-(N_{k_l}-1)T,p) = f(t,r);$$

(iv) *равномерно на всей оси* $\mathbb{R}$

$$\lim_{l\to+\infty} f(t-(N_{k_{l+1}}-N_{k_l})T,r) = f(t,r).$$

Теорема 1.1, вообще говоря, определяет все последующие построения. Основное ее значение состоит в том, что из нее вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Если положительная полутраектория* $K^+(p)$ *некоторого движения* $f(t,p)$ *относительно компактна, то* ω*-предельное множество* Ω *этого движения — компактное минимальное множество.*

Доказательство. Для всех $N=0,1,\ldots$ обозначим через P_N — множество функций

$$t\to f(t+N+l,p),\quad l=0,1,\ldots,$$

определенных на отрезке $[0,1]$. Пусть $\bar P_N$ — замыкание множества P_N. Положим

$$P=\bigcap_{N\ge 0}\bar P_N.$$

Очевидно, что

$$\bar P_0\supset \bar P_1\supset\ldots\supset\bar P_N\supset\ldots$$

Значит, для каждой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$

$$P=\bigcap_{k\ge 1}\bar P_{N_k}. \tag{1.1}$$

Поскольку полутраектория $K^+(p)$ относительно компактна, то каждое из множеств P_N равностепенно непрерывно (см., например, [6, с. 313]). Поэтому, действуя как и в [7, с. 105], несложно показать, что множество P непусто, компактно в топологии равномерной сходимости и инвариантно. Следовательно, P содержит компактное в топологии равномерной сходимости минимальное множество M.

В силу теоремы 1.1 и равенства (1.1) несложно заметить, что P — объединение компактных в топологии равномерной сходимости минимальных множеств. Теперь, действуя как и при доказательстве теоремы 2.2 работы [8], несложно показать, что M не является собственной частью P, т. е. что P — минимальное множество.

Заметим теперь, что по определению

$$\Omega=\bigcap_{t\ge 0}\overline{\bigcup_{s\ge t} f(s,p)}.$$

Поэтому Ω — компактное минимальное множество. □

Замечание 1.2. Очевидно, что утверждение, аналогичное теореме 1.2, справедливо также для α-предельного множества A движения $f(t,p)$, если отрицательная полутраектория $K^-(p)$ этого движения относительно компактна (см. замечание 1.1).

2. Взаимоотношение движений

Напомним, что движение $f(t,p)$ называется *положительно асимптотическим* по отношению к своему ω-предельному множеству Ω, если $p \notin \Omega$ (см., например, [2, с. 363]). Аналогичным образом, движение $f(t,p)$ называется *отрицательно асимптотическим* по отношению к своему α-предельному множеству A, если $p \notin \mathrm{A}$.

Будем говорить, что $f(t,p)$ — *положительно уходящее движение*, если его ω-предельное множество или пусто, или не компактно. Аналогичным образом, будем говорить, что $f(t,p)$ — *отрицательно уходящее движение*, если его α-предельное множество или пусто, или не компактно. Тогда, согласно теореме 1.2 и замечанию 1.2, взаимоотношение движений в пространстве Σ устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Любое нерекуррентное движение $f(t,p)$, расположенное в метрическом пространстве Σ, является или положительно (отрицательно) уходящим, или положительно (отрицательно) асимптотическим по отношению к компактному ω-предельному множеству Ω, совпадающему с минимальным множеством M^+ (соответственно, к компактному α-предельному множеству A, совпадающему с минимальным множеством M^-).*

Следствие 2.1. *Если пространство Σ компактно, то каждое нерекуррентное движение $f(t,p)$, расположенное в Σ, является как положительно, так и отрицательно асимптотическим по отношению к множествам $\Omega = M^+$ и $\mathrm{A} = M^-$.*

References

[1] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].

[2] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[3] D. N. Cheban, *Asymptotically Almost Periodic Solutions of Differential Equations*, HPC Publ., New York, 2009.

[4] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 5–14. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 5–14 (In Russian)].

[5] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “Обобщенно-периодические движения неавтономных систем”, *Дифференц. уравнения*, **53**:1 (2017), 3–9; англ. пер.:A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “Generalized-periodic motions of nonautonomous systems”, *Differential Equations*, **53**:1 (2017), 1–7.

[6] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, *Периодические и другие устойчивые по Пуассону движения динамических систем*, ВГУИТ, Воронеж, 2021. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, *Periodic and Others Poisson-stable Motions of Dynamical Systems*, VGUIT Publ., Voronezh, 2021 (In Russian)].

[7] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984. [J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Mir Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].

[8] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “Новые свойства рекуррентных движений и предельных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 5–15. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “New properties of recurrent motions and limit sets of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 5–15 (In Russian)].

Информация об авторах

Афанасьев Александр Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий центром распределенных вычислений, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук; профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; профессор, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: apa@iitp.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4171-5745

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем. Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Дзюба Сергей Михайлович
E-mail: sdzyuba@mail.ru

Поступила в редакцию 15.03.2022 г.
Поступила после рецензирования 01.06.2022 г.
Принята к публикации 09.06.2022 г.

Information about the authors

Aleksandr P. Afanas'ev, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Center for Distributed Computing, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences; Professor, Lomonosov Moscow State University; Professor, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation. E-mail: apa@iitp.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4171-5745

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department. Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Sergei M. Dzyuba
E-mail: sdzyuba@mail.ru

Received 15.03.2022
Reviewed 01.06.2022
Accepted for press 09.06.2022

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 138 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-143-149
УДК 517.977

Вложение гомотета в выпуклый компакт: алгоритм и его сходимость

Максим Викторович БАЛАШОВ
ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Рассматривается задача покрытия данного выпуклого компакта гомотетичным образом другого выпуклого компакта с заданным центром гомотетии, вычисляется коэффициент гомотетии. Задача имеет старую историю и тесно связана с вопросами о чебышевском центре, задачах о транслятах и другими задачами вычислительной геометрии. Методы аппроксимации многогранниками и другие аппроксимационные методы не работают в пространстве уже умеренной размерности (более 5 на ПК).

Мы предлагаем подход, основанный на применении метода проекции градиента, который гораздо слабее чувствителен к размерности, чем аппроксимационные методы. Мы выделяем классы множеств, для которых удается доказать линейную скорость сходимости градиентного метода, т. е. сходимость со скоростью геометрической прогрессии с положительным знаменателем строго меньше 1. Эти множества должны быть сильно выпуклыми и обладать в определенном смысле гладкостью границы.

Ключевые слова: метод проекции градиента, сильная выпуклость, равномерная гладкость, опорная функция, невыпуклая оптимизация

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00042).

Для цитирования: *Балашов М.В.* Вложение гомотета в выпуклый компакт: алгоритм и его сходимость // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 143–149. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-143-149.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-143-149

Embedding of a homothete in a convex compactum: an algorithm and its convergence

Maxim V. BALASHOV

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. The problem of covering of a given convex compact set by a homothetic image of another convex compact set with a given homothety center is considered, the coefficient of homothety is calculated. The problem has an old history and is closely related to questions about the Chebyshev center, problems about translates, and other problems of computational geometry. Polyhedral approximation methods and other approximation methods do not work in a space of already moderate dimension (more than 5 on a PC).

We propose an approach based on the application of the gradient projection method, which is much less sensitive to dimension than the approximation methods. We select classes of sets for which we can prove the linear convergence rate of the gradient method, i. e. convergence with the rate of a geometric progression with a positive ratio strictly less than 1. These sets must be strongly convex and have, in a certain sense, smoothness of the boundary.

Keywords: gradient projection method, strong convexity, uniform smoothness, supporting function, nonconvex optimization

Acknowledgements: The work was supported by Russian Science Foundation (project no. 22-11-00042).

Mathematics Subject Classification: Primary: 49J53, 90C26. Secondary: 52A20, 46N10.

For citation: Balashov M.V. Vlozheniye gomoteta v vypuklyy kompakt: algoritm i ego skhodimost' [Embedding of a homothete in a convex compactum: an algorithm and its convergence]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 143–149. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-143-149. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Для $t \geq 0$ определим многозначное отображение $\mathcal{R}(t) = t\mathcal{R}$, где $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Таким образом, $\mathcal{R}(t)$ есть гомотетия $\mathcal{R}$ с центром в нуле и коэффициентом $t \geq 0$. Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \operatorname{int} \mathcal{M}$, является выпуклым компактом. Предположим, что $\mathcal{R}(T) \not\subset \mathcal{M}$ для $T > 0$. Мы хотим решить следующий вопрос:

$$\text{Верно ли включение } \mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M} \text{ для данного } t \in [0, T]\,? \tag{0.1}$$

Предполагается обсудить алгоритм решения задачи (0.1). Во многих задачах при работе с компактными выпуклыми подмножествами типичным считается информация об опорной функции этих подмножеств, т. е. $s(p, \mathcal{R}) = \max_{x \in \mathcal{R}}(p, x)$ и $s(p, \mathcal{M})$ для всех $p \in \mathbb{R}^n$. Здесь (p, x) — скалярное произведение векторов p и x. В дальнейшем будем считать известными функции $s(p, \mathcal{R})$ и $s(p, \mathcal{M})$.

Вопрос (0.1) есть вопрос о покрытии выпуклого компакта гомотетичным образом другого выпуклого компакта с фиксированным центром гомотетии. Этот вопрос очень близок к задаче вычисления чебышевского радиуса (см. [1]). Предположим, что центр гомотетии есть ноль и $\mathcal{M}$ — выпуклое компактное подмножество с нулем в своей внутренности. Мы хотим найти решение задачи

$$\min_{\tau \geq 0} \tau \qquad \mathcal{R} \subset \tau\mathcal{M}.$$

Полагая $t = \tau^{-1}$, получаем эквивалентную переформулировку: для $\mathcal{R}(t) = t \cdot \mathcal{R}$ найти

$$\max_{t \geq 0} t \qquad \mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}. \tag{0.2}$$

Зафиксируем $t \in [0, T]$. Положим $f_t(p) = s(p, \mathcal{M}) - t \cdot s(p, \mathcal{R})$. Таким образом, на языке опорных функций требуется решить задачу

$$\min_{\|p\|=1} f_t(p) = J. \tag{0.3}$$

Если $J \geq 0$, то $s(p, \mathcal{M}) \geq s(p, t\mathcal{R})$ для всех p и значит по теореме об отделимости $t\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$. Если $J < 0$, то $t\mathcal{R} \not\subset \mathcal{M}$. Меняя (уменьшая) t, можно пытаться найти решение (0.2).

Первая естественная идея — попытка аппроксимировать в задаче $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}$ многогранниками и решить приближенную задачу методами линейного программирования. Однако разумное приближение в метрике Хаусдорфа для выпуклых компактов может быть получено лишь в небольшой размерности, не более 5 для современного ПК (см. [2, таблица 1]).

Кроме того, задача (0.3) является невыпуклой задачей условной минимизации. Функция $f_t(p)$ невыпукла в общем случае, как разность выпуклых опорных функций, при этом минимизируется $f_t(p)$ на единичной евклидовой сфере. Последнее множество хоть и не выпукло, но обладает простой геометрией.

Решить с удовлетворительной точностью задачу (0.3) в размерности $n \geq 5$ бесперспективно как с помощью аппроксимаций, так и методов нулевого порядка (где участвует лишь значение функции).

Для того, чтобы применить методы первого порядка, необходима дифференцируемость в окрестности единичной сферы функции f_t по p, а значит и опорных функций $s(p, \mathcal{M})$, $s(p, \mathcal{R})$. Кроме того, хорошо известно (см. [3]), что существует широкий класс сходящихся методов с липшицево дифференцируемой функцией. Таким образом, хотелось бы выделить класс множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{R}$, для которых опорная функция была бы липшицево дифференцируемой в окрестности единичной сферы.

1. Обозначения и вспомогательные факты

Пусть $\|x\|^2 = (x,x)$, $B_r(a)$ — замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром $a \in \mathbb{R}^n$.

Выпуклое компактное множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ называется *сильно выпуклым с радиусом* $R > 0$, если множество $\mathcal{M}$ можно представить как пересечение замкнутых шаров радиуса R.

Хорошо известно, что опорная функция $s(p,\mathcal{M})$ компактного подмножества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ непрерывна по Липшицу с константой Липшица $L = \|\mathcal{M}\| = \max\limits_{x\in\mathcal{M}} \|x\|$. Обозначим $\mathcal{M}(p) = \{x \in \mathcal{M} \ : \ (p,x) = s(p,\mathcal{M})\}$ для $p \in \mathbb{R}^n$ и выпуклого компакта $\mathcal{M}$. Множество $\mathcal{M}(p)$ называется опорным подмножеством множества $\mathcal{M}$ для вектора p, оно является субдифференциалом опорной функции в точке p в смысле выпуклого анализа.

Суммой множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называется множество

$$\mathcal{M} + \mathcal{N} = \{x + y \ : \ x \in \mathcal{M}, \ y \in \mathcal{N}\}.$$

Расстоянием в метрике Хаусдорфа между выпуклыми компактами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называется

$$h(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \sup_{\|p\|=1} |s(p,\mathcal{M}) - s(p,\mathcal{N})|.$$

Через $P_{\mathcal{M}}x$ обозначим метрическую проекцию точки x на замкнутое множество $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M}$ дополнительно выпукло, то множество $P_{\mathcal{M}}x$ одноточечно. Определим $\varrho(x,\mathcal{M}) = \inf\limits_{y\in\mathcal{M}} \|x - y\|$.

П р е д л о ж е н и е 1.1. [4, теоремы 2.6, 4.1] *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое компактное множество. Следующие свойства эквивалентны*
1) $\mathcal{M}$ сильно выпукло с радиусом $R > 0$;
2) существует выпуклый компакт $\mathcal{N}$ такой, что $\mathcal{M} + \mathcal{N} = B_R(0)$;
3) для любого единичного вектора $p \in \mathbb{R}^n$ выполнено включение $\mathcal{M} \subset B_R(\mathcal{M}(p) - Rp)$;
4) для любых единичных векторов $p, q \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $\|\mathcal{M}(p) - \mathcal{M}(q)\| \leq R\|p - q\|$.

Будем называть выпуклый компакт $\mathcal{M}$ *равномерно гладким* с константой $r > 0$, если $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + B_r(0)$ и $\mathcal{M}_0 \subset \mathbb{R}^n$ также выпуклый компакт. Данное свойство рассматривалось ранее в работе [5, Definition 2.1].

Следующее предложение дает скорость убывания за один шаг алгоритма метода проекции градиента для липшицево дифференцируемой функции с константой Липшица $L_1 > 0$.

П р е д л о ж е н и е 1.2. [6, Lemma 2] *Рассмотрим задачу $\min_{\mathcal{M}} f(x)$ в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\mathcal{M}$ — замкнутое множество, f' — липшицева функция с константой L_1. Зафиксируем $0 < \lambda \leq \frac{1}{L_1}$. Пусть $x_0 \in \mathcal{M}$ и $y_0 \in P_{\mathcal{M}}(x_0 - \lambda f'(x_0))$. Тогда*

$$f(x_0) - f(y_0) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - L_1\right)\|x_0 - y_0\|^2. \tag{1.1}$$

При этом, для доказательства формулы (1.1) условие Липшица с константой L_1 для f' важно на отрезке $[x_0, y_0]$, см. доказательство [7, Proposition 2.2].

Лемма 1.1. *Для любых ненулевых векторов* $p, q \in \mathbb{R}^n$ *имеем*

$$\left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \le \frac{\|p-q\|}{\sqrt{\|p\| \cdot \|q\|}}.$$

Доказательство. Для доказательства умножим обе части неравенства на $\sqrt{\|p\| \cdot \|q\|}$ и возведем в квадрат. □

2. Основной результат

Предположения.

1. Множество $\mathcal{R}$ *сильно выпукло с радиусом* $R > 0$ *и* $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{M}$.

2. Множество $\mathcal{M}$ *равномерно гладкое с константой* $r_{\mathcal{M}} > 0$: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + B_{r_{\mathcal{M}}}(0)$.

3. Множество $\mathcal{M}$ *сильно выпукло с радиусом* $R_{\mathcal{M}} > 0$.

4. $R < r_{\mathcal{M}}$.

Напомним, что $\mathcal{R}(t) = t\mathcal{R}$. Отметим также, что мы рассматриваем $T = 1$, т. е. $t \in [0,1]$, и поэтому множество $t\mathcal{R}$ сильно выпукло с радиусом R для всех $t \in [0,1]$.

Зададим $\varepsilon \in (0, r_{\mathcal{M}} - R)$. Рассмотрим ε-окрестность $\mathcal{R}_\varepsilon(t) = \mathcal{R}(t) + B_\varepsilon(0)$ множества $\mathcal{R}(t)$. Включение $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}$ означает

$$\max_{x \in \mathcal{R}_\varepsilon(t)} \varrho(x, \mathcal{M}) \le \varepsilon$$

и наоборот, если $\max\limits_{x \in \mathcal{R}_\varepsilon(t)} \varrho(x, \mathcal{M}) > \varepsilon$, то $\mathcal{R}(t) \not\subset \mathcal{M}$. С помощью опорных функций мы можем сформулировать следующую эквивалентную задачу: для функции $f(p) = f_t(p) = s(p, \mathcal{M}) - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t))$ (индекс t у f_t мы далее будем опускать) найти минимум

$$\min_{\|p\|=1} f(p) = J. \tag{2.1}$$

Если $J \ge -\varepsilon$, то $\mathcal{R}(t) \subset \mathcal{M}$, а если $J < -\varepsilon$, то $\mathcal{R}(t) \not\subset \mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{S}_1 = \{p \in \mathbb{R}^n \ : \ \|p\| = 1\}$ и $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{S}_1 \ : \ f(p) \le 0\}$. Предположим, что $p_0 \in \mathcal{S}_1$ есть решение (2.1).

Допустим, что $\mathcal{S} \ne \emptyset$. Рассмотрим следующий итерационный процесс

$$p_1 \in \mathcal{S}, \qquad p_{k+1} = P_{\mathcal{S}_1}(p_k - \lambda f'(p_k)), \tag{2.2}$$

где $\lambda > 0$.

Для множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ геометрической разностью называется множество $A \overset{*}{-} B = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x + B \subset A\}$.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются предположения раздела 2. и в задаче* (2.1) $J < 0$. *Положим* $\varepsilon \in (0, r_{\mathcal{M}} - R)$, $r_0 = r_{\mathcal{M}} - R - \varepsilon > 0$, $L = \|\mathcal{M} \overset{*}{-} \mathcal{R}_\varepsilon(t)\| > 0$. *Тогда для всякого* $p_1 \in \mathcal{S}$ *и* $0 < \lambda \le \min\{r_0^2/R_{\mathcal{M}}^3, 1/(2L), 1/(2R_{\mathcal{M}})\}$ *итерации* (2.2) *сходятся с линейной скоростью к решению* p_0:

$$\|p_{k+1} - p_0\| \le q \cdot \|p_k - p_0\|, \qquad q = \sqrt{1 - \frac{2r_0^2}{R_{\mathcal{M}}}\lambda + R_{\mathcal{M}}^2 \lambda^2} \in (0,1).$$

Доказательство. В силу неравенства $J < 0$ множество $\mathcal{S}$ непусто. Рассмотрим $f(p)$:

$$f(p) = s(p, \mathcal{M}_0) + r_{\mathcal{M}}\|p\| - s(p, \mathcal{R}_\varepsilon(t)).$$

Множество $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ сильно выпукло с радиусом $R+\varepsilon<r_\mathcal{M}$. Значит, в силу предложения 1.1, существует другой выпуклый компакт $\mathcal{N}(t)$ со свойством $\mathcal{R}_\varepsilon(t)+\mathcal{N}(t)=B_{R+\varepsilon}(0)$ и $r_\mathcal{M}\|p\|-s(p,\mathcal{R}_\varepsilon(t))=(r_\mathcal{M}-R-\varepsilon)\|p\|+s(p,\mathcal{N}(t))$. Поэтому для всех $p\in\mathbb{R}^n$

$$f(p)=s(p,\mathcal{M}_0)+(r_\mathcal{M}-R-\varepsilon)\|p\|+s(p,\mathcal{N}(t))=s(p,\mathcal{M}_0+\mathcal{N}(t)+B_{r_\mathcal{M}-R-\varepsilon}(0))$$

и, следовательно, функция $f(p)$ является опорной для множества $\mathcal{Z}(t)=\mathcal{M}\overset{*}{-}\mathcal{R}_\varepsilon(t)=\mathcal{M}_0+\mathcal{N}(t)+B_{r_\mathcal{M}-R-\varepsilon}(0)$. Последнее множество сильно выпукло с радиусом $R_\mathcal{M}$ и равномерно гладкое с константой $r_0=r_\mathcal{M}-R-\varepsilon>0$. Функция f' липшицева на множестве $\mathcal{S}_1$ с константой $R_\mathcal{M}$ и $\|p_k-p_{k+1}\|\le\|\lambda f'(p_k)\|\le\frac{1}{2}$. В силу леммы 1.1 f' липшицева в $\frac{1}{2}$-окрестности $\mathcal{S}_1$ с константой $2R_\mathcal{M}$. Таким образом, f' липшицева на любом сегменте $[p_k,p_{k+1}]$ с константой $2R_\mathcal{M}$. Из условия Липшица f' и предложения 1.2 получаем, что $f(p_k)\le 0$ для всех k.

Для $(k+1)$-й итерации имеем

$$\|p_{k+1}-p_0\|^2=\|P_{\mathcal{S}_1}(p_k-\lambda f'(p_k))-P_{\mathcal{S}_1}(p_0-\lambda f'(p_0))\|^2,$$

$\|p_k-\lambda f'(p_k)\|\ge(p_k,p_k-\lambda f'(p_k))=1-\lambda f(p_k)\ge 1$. Аналогично $\|p_0-\lambda f'(p_0)\|\ge 1$, т. е. $p_k-\lambda f'(p_k)\notin\operatorname{int}B_1(0)$, $p_0-\lambda f'(p_0)\notin\operatorname{int}B_1(0)$ и значит в силу леммы 1.1

$$\begin{aligned}\|p_{k+1}-p_0\|^2&\le\|p_k-p_0+\lambda(f'(p_k)-f'(p_0))\|^2\\&\le\|p_k-p_0\|^2-2\lambda(p_k-p_0,f'(p_k)-f'(p_0))+\lambda^2\|f'(p_k)-f'(p_0)\|.\end{aligned}$$

Из сильной выпуклости множества $\mathcal{Z}(t)$ с радиусом $R_\mathcal{M}$ следует $\|f'(p_k)-f'(p_0)\|\le R_\mathcal{M}\|p_k-p_0\|$. Также из сильной выпуклости $\mathcal{Z}(t)$ с радиусом $R_\mathcal{M}$ в силу [8, Theorem 2.1(h)] имеем $(p_k-p_0,f'(p_k)-f'(p_0))\ge\frac{1}{R_\mathcal{M}}\|f'(p_k)-f'(p_0)\|^2$. Отсюда и из равномерной гладкости множества $\mathcal{Z}(t)$ с константой r_0 в силу [8, Definition 3.2, Theorem 3.6]

$$\|f'(p_k)-f'(p_0)\|\ge r_0\|p_k-p_0\|$$

и

$$(p_k-p_0,f'(p_k)-f'(p_0))\ge\frac{1}{R_\mathcal{M}}\|f'(p_k)-f'(p_0)\|^2\ge\frac{r_0^2}{R_\mathcal{M}}\|p_k-p_0\|^2.$$

Таким образом, $\|p_{k+1}-p_0\|^2\le q^2\|p_k-p_0\|^2$. □

Заметим, что условие $r_\mathcal{M}>R$ фактически гарантирует выпуклость функции f_t в теореме 2.1. Отметим также, что $f'(p)=\mathcal{M}(p)-t\mathcal{R}(p)-\varepsilon p$.

Рассмотрим теперь, как найти максимальное $t=t_0$ в задаче (0.2).

Поскольку $\mathcal{R}(1)\not\subset\mathcal{M}$, то решение задачи (2.1) для коэффициента $t=1$ есть $J_1<-\varepsilon$ (т. к. если $J_1\ge-\varepsilon$, то $t_0=1$). Положим $t=1$, $K=\|\mathcal{R}\|$, $\Delta t=\frac{\varepsilon}{2K}$ и $B_r(0)\subset\mathcal{M}$ для некоторого $r>0$.

Опишем общий шаг. Пусть p_0 — единичный вектор-решение для t. Напомним, что $f_t(p)=s(p,\mathcal{M})-s(p,\mathcal{R}_\varepsilon(t))=s(p,\mathcal{M})-ts(p,\mathcal{R})-\varepsilon\|p\|$. Тогда

$$\min_{\|p\|=1}f_{t-\Delta t}(p)\le f_t(p_0)+\Delta ts(p_0,\mathcal{R})<-\varepsilon+\Delta tK\le-\frac{1}{2}\varepsilon \tag{2.3}$$

и для коэффициента гомотетии $t-\Delta t$ тоже применима теорема 2.1. Если в задаче (2.1) для коэффициента гомотетии $t-\Delta t$ все еще выполняется неравенство $J<-\varepsilon$, то переобозначим $t:=t-\Delta t$ и повторим общий шаг.

Пусть $\min\limits_{\|p\|=1} f_{t-\Delta t}(p) = f_{t-\Delta t}(q_0)$ для единичного вектора q_0. Тогда

$$s(q_0, \mathcal{M}) - (t - \Delta t)s(q_0, \mathcal{R}) - \varepsilon\|q_0\| < -\varepsilon,$$

и

$$r = r\|q_0\| \le s(q_0, \mathcal{M}) < (t - \Delta t)s(q_0, \mathcal{R}) \le s(q_0, \mathcal{R}).$$

Отсюда получаем (напомним, что $f_t(p_0) = \min\limits_{\|p\|=1} f_t(p)$)

$$f_{t-\Delta t}(q_0) = f_t(q_0) + \Delta t s(q_0, \mathcal{R}) \ge f_t(p_0) + \frac{\varepsilon r}{2K}.$$

Поэтому после, не более чем $[|J_1|/(\varepsilon r/(2K))] + 1$ шагов, мы получим $J \ge -\varepsilon$ для задачи (2.1) при некотором коэффициенте гомотетии $t \ge 0$ (заметим, что мы не можем пропустить неравенство $J < 0$ из-за оценки (2.3)). Для коэффициента гомотетии $t + \Delta t$ значение функционала J было менее $-\varepsilon$. Далее решаем задачу с любой желаемой точностью, деля промежуток $[t, t + \Delta t]$ пополам.

References

[1] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли и ее применения*, Мир, М., 1968. [L. Danzer, B. Grunbaum, V. Klee, *Helly's Theorem and its Applications*, Mir Publ., Moscow, 1968 (In Russian)].

[2] M. Althoff, G. Frehse, A. Girard, “Set propagation techniques for reachability analysis”, *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*, **4**:1 (2021), 369–395.

[3] Б. Т. Поляк, *Введение в оптимизацию*, Наука, М., 1983; англ. пер.:B. T. Polyak, *Introduction to Optimization*, Optimization Software, New York, 1987.

[4] М. В. Балашов, Е. С. Половинкин, “ M -сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества”, *Матем. сб.*, **191**:1 (2000), 27–64; англ. пер.:M. V. Balashov, E. S. Polovinkin, “ M -strongly convex subsets and their generating sets”, *Sb. Math.*, **191**:1 (2000), 25–60.

[5] P. Cannarsa, H. Frankowska,, “Interior sphere property of attainable sets and time optimal control problems”, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **12**:2 (2006), 350–370.

[6] J. Bolte, Sh. Sabach, M. Teboulle, “Proximal alternating linearized minimization for nonconvex and nonsmooth problems”, *Mathematical Programming*, **146**:1–2 (2014), 459–494.

[7] M. V. Balashov, A. A. Tremba, “Error bound conditions and convergence of optimization methods on smooth and proximally smooth manifolds”, *Optimization*, **71**:3 (2022), 711-735.

[8] G. E. Ivanov, V. V. Goncharov, “Strong and weak convexity of closed sets in a Hilbert space”, *Operations Research, Engineering, and Cyber Security*. V. 113, Springer Optimization and Its Applications, eds. N. Daras, T. Rassias, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 2017, 259–297.

Информация об авторе

Балашов Максим Викторович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: balashov73@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5414-2149

Поступила в редакцию 22.05.2022 г.
Поступила после рецензирования 03.06.2022 г.
Принята к публикации 09.06.2022 г.

Information about the author

Maxim V. Balashov, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: balashov73@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5414-2149

Received 22.05.2022
Reviewed 03.06.2022
Accepted for press 09.06.2022

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 138 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-150-163

Inner product and Gegenbauer polynomials in Sobolev space

Mohamed Ahmed BOUDREF

University of Bouira,

10000 Drissi Yahia Bouira St., Bouira, Algeria

Abstract. In this paper we consider the system of functions $G^{\alpha}_{r,n}(x)$ $(r \in \mathbb{N},\ \ n = 0, 1, \dots)$ which is orthogonal with respect to the Sobolev-type inner product on $(-1, 1)$ and generated by orthogonal Gegenbauer polynomials. The main goal of this work is to study some properties related to the system $\{\varphi_{k,r}(x)\}_{k\geq 0}$ of the functions generated by the orthogonal system $\{G^{\alpha}_{r,n}(x)\}$ of Gegenbauer functions. We study the conditions on a function $f(x)$ given in a generalized Gegenbauer orthogonal system for it to be expandable into a generalized mixed Fourier series of the form

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} C^{\alpha}_{r,k}(f)\varphi^{\alpha}_{r,k}(x),$$

as well as the convergence of this Fourier series. The second result of this paper is the proof of a recurrence formula for the system $\{\varphi_{k,r}(x)\}_{k\geq 0}$. We also discuss the asymptotic properties of these functions, and this represents the latter result of our contribution.

Keywords: inner product, Sobolev space, Gegenbauer polynomials

Acknowledgements: The work was carried out at the Faculty of Sciences and Applied Sciences and at the LIMPAF Research Laboratory of the University of Bouira, Algeria.

Mathematics Subject Classification: 42C10.

For citation: Boudref M.A. Skalyarnoye proizvedeniye i mnogochleny Gegenbauera v prostranstve Soboleva [Inner product and Gegenbauer polynomials in Sobolev space]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 150–163. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-150-163.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-150-163
УДК 517.518.36

Скалярное произведение и многочлены Гегенбауэра в пространстве Соболева

Мохамед Ахмед БУДРЕФ
Университет Буира,
Алжир, г. Буира, ул. Дрисси Яхья Буира 10000

Аннотация. В данной работе рассматривается система функций $G^{\alpha}_{r,n}(x)$ ($r \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, \dots$), которые ортогональны относительно скалярного произведения соболевского типа на $(-1,1)$ и порождены ортогональными полиномами Гегенбауэра. Основной целью данной работы является изучение некоторых свойств, связанных с системой $\{\varphi_{k,r}(x)\}_{k\geq 0}$ функций, порожденных ортогональной системой $\{G^{\alpha}_{r,n}(x)\}$ функций Гегенбауэра. Исследуются условия на функцию $f(x)$, заданную в обобщенной ортогональной системе Гегенбауэра, которые гарантируют ее разложимость в обобщенный смешанный ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\ frac(x+1)^k k! + \sum_{k=r}^{\infty} C^{\alpha}_{r,k}(f)\varphi^{\alpha}_{r,k}(x),$$

и изучается сходимость этого ряда Фурье. Второй результат этой статьи состоит в доказательстве рекуррентной формулы для системы $\{\varphi_{k,r}(x)\}_{k\geq 0}$. Мы также обсуждаем асимптотические свойства этих функций, что составляет заключительный результат нашей работы.

Ключевые слова: скалярное произведение, пространство Соболева, многочлены Гегенбауэра

Благодарности: Работа выполнена на Факультете естественных и прикладных наук и в Исследовательской лаборатории LIMPAF Университета Буира, Алжир.

Для цитирования: *Будреф М.А.* Скалярное произведение и многочлены Гегенбауэра в пространстве Соболева // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 150–163. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-150-163. (In Engl., Abstr. in Russian)

Introduction

Consider an orthogonal system $\{\varphi_k(x)\}_{k\geq 0}$ on (a,b) with $\rho(x)$ as a weight function, and let $r\in\mathbb{N}$. We construct a new orthogonal system $\{\varphi_{k,r}(x)\}_{k\geq 0}$ following the Sobolev-type inner product:

$$\langle f,g\rangle_S=\sum_{v=0}^{r-1} f^{(v)}(a)g^{(v)}(b)+\int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt. \tag{0.1}$$

Quite a few authors have presented this type of construction, see, for example, the works of R. M. Gadzhimirzaev ([1]) and I. I. Sharapudinov ([2–6]) on the construction of mixed Fourier series. The author in his works presents some particular cases of systems generated by classes of orthogonal functions, namely Jacobi, Legendre, Chebychev, Laguerre, and Haar.

Gegenbauer polynomials are widely used in several fields, they are of a particular interest in applications. It is clear that these polynomials present a special case of those of Jacobi for particular values of parameters. In this work, we will reconstruct the orthogonal system $\{\varphi_{k,r}(x)\}_{k\geq 0}$ generated by the Gegenbauer polynomials using the approach which is different from the one used by I. Sharapudinov.

Denote by $L^p_\rho(a,b)$ the space of measurable functions $f(x)$, $x\in(a,b)$, with

$$\int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt<\infty.$$

When $\rho(x)=1$, we write $L^p_\rho(a,b)=L^p(a,b)$. It is clear that $L^p_\rho(a,b)$ is the Banach space with the norm

$$\|f\|_{p,\rho}=\left(\int_a^b |f(x)|^p\,\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

We can define the functions of the system $\{\varphi_{k,r}(x)\}_{k\geq 0}$ as follows [5]:

$$\begin{cases}\varphi_{r,r+k}(x)=\dfrac{1}{(r-1)!}\displaystyle\int_a^b (x-t)^{r-1}\varphi_k(t)dt, & k=0,1,2,...\\ \varphi_{r,k}(x)=\dfrac{(x-a)^k}{k!}, & k=0,1,2,\cdots,r-1.\end{cases} \tag{0.2}$$

From (0.2) for $x\in(a,b)$, we have

$$\varphi^{(v)}_{r,k}(x)=\begin{cases}\varphi_{r-v,k-v}(x), & \text{if } 0\leq v\leq r-1,\ r\leq k,\\ \varphi_{k-v}(x), & \text{if } v=r\leq k,\\ \varphi_{r-v,k-v}(x), & \text{if } v\leq k<r,\\ 0, & \text{if } k<v\leq r.\end{cases}$$

Denote by $W^r_{L^p_\rho(a,b)}$ the Sobolev weighted space. This space consists of all $r-1$ times continuously differentiable on the interval $[a,b]$ functions $f(x)$ such that $f^{(r-1)}(x)$ is absolutely continuous on $[a,b]$ and $f^{(r)}(x)\in L^p_\rho(a,b)$.

For $p=2$, we define in $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ the inner product by (0.1). We can set the norm for any function $f\in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ by

$$\|f\|_{W^r_{L^2_\rho(a,b)}}=\sqrt{\langle f,f\rangle_S},$$

which allows us to deduce that $\left(W^r_{L^2_\rho(a,b)}, \|\cdot\|_{W^r_{L^2_\rho(a,b)}}\right)$ is the Banach space, and $\left(W^r_{L^2_\rho(a,b)}, \langle\cdot,\cdot\rangle_S\right)$ is the Hilbert space.

The system $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k\geq 0}$ is said to be Sobolev-orthogonal according to the inner product (0.1) generated by the orthonormal system $\{\varphi_k(x)\}_{k\geq 0}$.

1. Main concepts: some properties of Gegenbauer polynomials

Let $\varphi^\alpha_{r,n}(x)$ be the Sobolev-orthogonal polynomials according to the inner product

$$\langle f, g\rangle = \sum_{v=0}^{r-1} f^{(v)}(-1)g^{(v)}(-1) + \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)w(t)dt,$$

where $w(t) = (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$.

Here are some properties of the Gegenbauer polynomials:

- Gegenbauer polynomials are given by [7]

$$g^\alpha_n(x) = \frac{(2\alpha)_n}{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}\right)}(x),$$

where $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ is the Jacobi polynomial, $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)$. We can have the following formula

$$g^\alpha_n(x) = \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\alpha+n)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma\left(\alpha+n+\frac{1}{2}\right)} P_n^{\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}\right)}(x),$$

with

$$g^\alpha_0(x) = 1, \quad g^\alpha_1(x) = 2\alpha x.$$

- Recurrence formula:

$$g^\alpha_n(x) = \frac{1}{n}\left(2x(\alpha+n-1)g^\alpha_{n-1}(x) - (n+2\alpha-2)g^\alpha_{n-2}(x)\right).$$

- Orthogonality formula:

$$\int_{-1}^{1} g^\alpha_n(x)g^\alpha_m(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx = \delta_{nm}h^\alpha_n,$$

where

$$h^\alpha_n = \pi\frac{2^{1-2\alpha}\Gamma(n+2\alpha)}{n!\,(n+\alpha)\,\Gamma^2(\alpha)}.$$

Let us put

$$G^\alpha_n(x) = \sqrt{\frac{w(x)}{h^\alpha_n}}\, g^\alpha_n(x),$$

where

$$w(x) = (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

$G^\alpha_n(x)$ are the Gegenbauer functions [7, p. 776]. The system $\{G^\alpha_n(x)\}$ is orthogonal on $(-1,1)$, i. e.

$$\int_{-1}^{1} G^\alpha_n(x)G^\alpha_m(x)dx = \delta_{nm}.$$

- Some values:

$$G_0^\alpha(x) = \sqrt{\frac{w(x)\alpha\Gamma^2(\alpha)}{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(\alpha)}}, \qquad G_1^\alpha(x) = 2\alpha x\sqrt{\frac{w(x)(1+\alpha)\Gamma^2(\alpha)}{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(1+\alpha)}}.$$

1.1. Orthogonal Sobolev functions generated by the Gegenbauer functions $G_n^\alpha(x)$

D e f i n i t i o n 1.1. For $r \in \mathbb{N}$, we define the functions $\varphi_{r,k}^\alpha(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$ by

$$\begin{cases} \varphi_{r,k}^\alpha(x) = \dfrac{(x+1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, ...r-1, \\ \varphi_{r,k+r}^\alpha(x) = \dfrac{1}{(r-1)!}\displaystyle\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G_k^\alpha(t)dt, \quad k = 0, 1, \dots . \end{cases}$$

We will calculate the functions $\varphi_{r,k+r}^\alpha(x)$ for any $k \in \mathbb{N}$ and $x \in [-1, 1]$.

Theorem 1.1 (Fisrt aim result)**.** *For $\alpha > -1$, we have the following relations:*

1. $\varphi_{r,r+n}^\alpha(x)$

$$= -2r\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}}\varphi_{r+1,r+n}^\alpha(x) + 2x\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}}\varphi_{r,r+n-1}^\alpha(x) - \Big(1 - \frac{1}{n+\alpha}\Big)\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}}\varphi_{r,r+n-2}^\alpha(x).$$

2. $$\varphi_{r,r}^\alpha(x) = -2r\sqrt{\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}}\varphi_{r,r+2}^\alpha(x) + 2x\sqrt{\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}}\varphi_{r,r+1}^\alpha(x) - \sqrt{\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}}\varphi_{r,r+2}^\alpha(x).$$

3. $$\varphi_{1,1+n}^\alpha(x) = -2\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}}\varphi_{2,1+n}^\alpha(x) + 2x\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}}\varphi_{1,n}^\alpha(x) - \Big(1 - \frac{1}{n+\alpha}\Big)\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}}\varphi_{1,n-1}^\alpha(x).$$

To prove this theorem, we have the following lemma:

Lemma 1.1. [8, p. 80–83] *Here are the formulas for the derivations of the Gegenbauer functions:*

1. $$\frac{d}{dx}g_n^\alpha(x) = 2\alpha g_{n-1}^\alpha(x).$$

2. $$(1-x^2)\frac{d}{dx}g_n^\alpha(x) = \frac{2}{n+\alpha}\left\{(n+2\alpha-1)(n+2\alpha)g_{n-1}^\alpha(x) - n(n+1)g_{n+1}^\alpha(x)\right\}$$
$$= -nxg_n^\alpha(x) + (n+\alpha-1)g_{n-1}^\alpha(x)$$
$$= (n+2\alpha)xg_n^\alpha(x) - (n+1)g_{n+1}^\alpha(x).$$

3. $$ng_n^\alpha(x) = x\frac{d}{dx}g_n^\alpha(x) - \frac{d}{dx}g_{n-1}^\alpha(x).$$

4. $$\frac{d}{dx}\left[g_{n+1}^\alpha(x) - g_{n-1}^\alpha(x)\right] = 2(n+\alpha)g_n^\alpha(x) = 2\alpha\left[g_n^{\alpha+1}(x) - g_{n-2}^{\alpha+1}(x)\right].$$

P r o o f. (of theorem 1.1): *1.* Firstly, its clear that:

$$\varphi_{0,n}^{\alpha}(x)=G_n^{\alpha}(x),\quad \varphi_{1,0}^{\alpha}(x)=1,\quad \varphi_{1,1}^{\alpha}(x)=\int_{-1}^{x}G_0^{\alpha}(t)dt.$$

We have

$$\varphi_{r,r+n}^{\alpha}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G_n^{\alpha}(t)dt, \tag{1.1}$$

where

$$G_n^{\alpha}(t)=\frac{\sqrt{w(t)}}{\sqrt{h_n^{\alpha}}}g_n^{\alpha}(t).$$

By Lemma 1.1,

$$g_n^{\alpha}(x)=\frac{2x(\alpha+n-1)}{n}g_{n-1}^{\alpha}(x)-\frac{n+2\alpha-2}{n}g_{n-2}^{\alpha}(x). \tag{1.2}$$

Then (1.1) becomes

$$\begin{aligned}
\varphi_{r,r+n}^{\alpha}(x) &= \frac{2(\alpha+n-1)}{(r-1)!n\sqrt{h_n^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}\sqrt{w(t)}t\,(x-t)^{r-1}\,g_{n-1}^{\alpha}(t)dt\\
&\quad -\frac{\alpha+n-1}{(r-1)!n\sqrt{h_n^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}\sqrt{w(t)}\,(x-t)^{r-1}\,g_{n-2}^{\alpha}(t)dt\\
&= \frac{2(\alpha+n-1)\sqrt{h_{n-1}^{\alpha}}}{(r-1)!n\sqrt{h_n^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}\frac{\sqrt{w(t)}}{\sqrt{h_{n-1}^{\alpha}}}t\,(x-t)^{r-1}\,g_{n-1}^{\alpha}(t)dt\\
&\quad -\frac{(\alpha+n-1)\sqrt{h_{n-2}^{\alpha}}}{(r-1)!n\sqrt{h_n^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}\frac{\sqrt{w(t)}}{\sqrt{h_{n-2}^{\alpha}}}(x-t)^{r-1}\,g_{n-2}^{\alpha}(t)dt\\
&= \frac{2(\alpha+n-1)\sqrt{h_{n-1}^{\alpha}}}{(r-1)!n\sqrt{h_n^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}tG_{n-1}^{\alpha}(t)\,(x-t)^{r-1}\,dt\\
&\quad -\frac{(\alpha+n-1)\sqrt{h_{n-2}^{\alpha}}}{(r-1)!n\sqrt{h_n^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}G_{n-2}^{\alpha}(t)\,(x-t)^{r-1}\,dt.
\end{aligned}$$

After simplification of the terms without integral signs, we obtain

$$\begin{aligned}
\varphi_{r,r+n}^{\alpha}(x) &= 2\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}}\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}t(x-t)^{r-1}G_{n-1}^{\alpha}(t)dt\\
&\quad -\left(1-\frac{1}{n+\alpha-1}\right)\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}}\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G_{n-2}^{\alpha}(t)dt.
\end{aligned}$$

Put

$$\varphi_{r,r+n-2}^{\alpha}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G_{n-2}^{\alpha}(t)dt.$$

Still to be calculated

$$J=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}t(x-t)^{r-1}G_{n-1}^{\alpha}(t)dt.$$

We have

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(t-x+x)(x-t)^{r-1}G_{n-1}^{\alpha}(t)dt \\ &= -\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r}G_{n-1}^{\alpha}(t)dt+\frac{x}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G_{n-1}^{\alpha}(t)dt \\ &= -r\varphi_{r+1,r+n}^{\alpha}(x)+x\varphi_{r,r+n-1}^{\alpha}(x). \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} &\varphi_{r,r+n}^{\alpha}(x) \\ &\quad = -2r\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}}\varphi_{r+1,r+n}^{\alpha}(x)+2x\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}}\varphi_{r,r+n-1}^{\alpha}(x)-\left(1-\frac{1}{n+\alpha-1}\right)\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}}\varphi_{r,r+n-2}^{\alpha}(x). \end{aligned}$$

2. We use the following relation:

$$\varphi_{r,r}^{\alpha}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G_{0}^{\alpha}(t)dt=\frac{1}{(r-1)!}\frac{1}{\sqrt{h_0^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}\sqrt{w(t)}g_0^{\alpha}(t)(x-t)^{r-1}dt.$$

By lemma 1.1 (formula 4), we have

$$g_0^{\alpha}(t)=\frac{2(\alpha+1)x}{\alpha}g_1^{\alpha}(t)-\frac{2}{\alpha}g_2^{\alpha}(t),$$

so

$$\begin{aligned} \varphi_{r,r}^{\alpha}(x) &= \frac{2(\alpha+1)}{\alpha(r-1)!}\int_{-1}^{x}\sqrt{\frac{w(t)}{h_0^{\alpha}}}tg_1^{\alpha}(t)(x-t)^{r-1}dt-\frac{2}{\alpha(r-1)!}\int_{-1}^{x}\sqrt{\frac{w(t)}{h_0^{\alpha}}}g_2^{\alpha}(t)(x-t)^{r-1}dt \\ &= \frac{2(\alpha+1)}{\alpha(r-1)!}\sqrt{\frac{h_1^{\alpha}}{h_0^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}t(x-t)^{r-1}G_1^{\alpha}(t)dt-\frac{2}{\alpha(r-1)!}\sqrt{\frac{h_2^{\alpha}}{h_0^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G_2^{\alpha}(t)dt. \end{aligned}$$

Put

$$\varphi_{r,r+2}^{\alpha}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G_2^{\alpha}(t)dt.$$

Let us calculate

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}t(x-t)^{r-1}G_1^{\alpha}(t)dt \\ &= \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(t-x+x)(x-t)^{r-1}G_1^{\alpha}(t)dt \\ &= \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r}G_1^{\alpha}(t)dt+\frac{x}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G_1^{\alpha}(t)dt \\ &= -r\varphi_{r+1,r+2}^{\alpha}(x)+x\varphi_{r,r+1}^{\alpha}(x). \end{aligned}$$

Then

$$\varphi_{r,r}^{\alpha}(x)=\frac{2(\alpha+1)}{\alpha(r-1)!}\sqrt{\frac{h_1^{\alpha}}{h_0^{\alpha}}}\left(-r\varphi_{r+1,r+2}^{\alpha}(x)+x\varphi_{r,r+1}^{\alpha}(x)\right)-\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{h_2^{\alpha}}{h_0^{\alpha}}}\varphi_{r,r+2}^{\alpha}(x),$$

hence

$$\varphi_{r,r}^{\alpha}(x)=2\sqrt{\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}}\left(-r\varphi_{r+1,r+2}^{\alpha}(x)+x\varphi_{r,r+1}^{\alpha}(x)\right)-\sqrt{\frac{\Gamma(2+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}}\varphi_{r,r+2}^{\alpha}(x).$$

So we obtain the second formula.

3. It is sufficient to replace $r=1$ in the first formula, since it represents a special case. □

1.2. Problem of mixed Fourier series

Let $f \in W^r_{L^2_\rho(-1,1)}$. If this function is given in the generalized Gegenbauer orthogonal system $\{\varphi^\alpha_{r,n}(x)\}_{n=0}^\infty$, then

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} C^\alpha_{r,k}(f)\varphi^\alpha_{r,k}(x). \tag{1.3}$$

This Fourier series will have the form

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} C^\alpha_{r,k}(f)\varphi^\alpha_{r,k}(x), \tag{1.4}$$

with

$$\begin{aligned} C^\alpha_{r,k}(f) = \hat{f}_{r,k} &= \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)\varphi^\alpha_{r,k}(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)G^\alpha_{k-r}(t)dt, \quad k = r, r+1, ..., \end{aligned}$$

called the Fourier coefficient. For $r = 0$, we have

$$f(x) \sim \sum_{k=r}^{\infty} C^\alpha_{0,k}(f)\varphi^\alpha_{0,k}(x) \sim \sum_{k=r}^{\infty} \hat{f}_{0,k}\varphi^\alpha_{0,k}(x),$$

with

$$\hat{f}_{0,k} = \int_{-1}^{1} f(t)G^\alpha_k(t)dt. \tag{1.5}$$

In this section, we will give the expressions of (1.4) and (1.5) taking into account the expression of $G^\alpha_n(t)$. Also we will prove the convergence of the series (1.3). The following result is similar to the one given in [5].

Theorem 1.2. *For $\alpha > -1$, the system of functions $\{\varphi^\alpha_{r,n}(x)\}$ generated by the Gegenbauer functions $G^\alpha_n(x)$ and given by the formula*

$$\varphi^\alpha_{r,n+r}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G^\alpha_n(t)dt, \quad n \geq 0,$$

is complete in $W^r_{L^2_\rho(-1,1)}$ and orthonormal via Sobolev's inner product

$$\langle f, g\rangle = \sum_{v=0}^{r-1} f^{(v)}(-1)\, g^{(v)}(-1) + \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)w(t)dt.$$

It follows from the two formulas

$$\begin{cases} \varphi^\alpha_{r,r+n}(x) = \dfrac{1}{(r-1)!}\displaystyle\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G^\alpha_n(t)dt, \quad n \geq 0, \\ \varphi^\alpha_{r,n}(x) = \dfrac{(x+1)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots r-1, \end{cases}$$

that for all $x \in (-1, 1)$,

$$\left(\varphi^\alpha_{r,n}(x)\right)^{(v)} = \begin{cases} \varphi^\alpha_{r-v,n-v}(x), & if \;\; 0 \leq v \leq r-1, \quad r \leq n, \\ G^\alpha_{n-v}(x), & if \;\; v = r \leq n, \\ \varphi^\alpha_{r-v,n-v}(x), & if \;\; v \leq n < r, \\ 0, & if \;\; n < v \leq r, \end{cases}$$

with $\varphi^\alpha_{0,n}(x) = G^\alpha_n(x)$.

1.2.1. Study of the convergence of the series (1.4)

Let $f \in W^r_{L^2_\rho(-1,1)}$, then $f^{(r)} \in L^p$ with

$$f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{C}_{r,k}\left(f^{(r)}\right) G_k^\alpha(x),$$

where

$$\hat{C}_{r,k}\left(f^{(r)}\right) = \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t) G_k^\alpha(t)dt, \quad \text{for all } k \geq 0.$$

We will prove the following result:

Theorem 1.3 (Second aim result)**.** *For* $\alpha > 0$, $x \in (-1, A]$, $(A < 1)$, *and* $f \in W^r_{L^p}$ *with* $\frac{4}{3} < p < 4$, *the Fourier series*

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} C^\alpha_{r,k}(f)\varphi^\alpha_{r,k}(x)$$

converges uniformly to the function f.

P r o o f. We note the following partial sums:

$$S^\alpha_{r,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{n} C^\alpha_{r,k}(f)\varphi^\alpha_{r,k}(x),$$

$$S^\alpha_n\left(f^{(r)}, x\right) = \sum_{k=0}^{n} \hat{C}_{r,k}\left(f^{(r)}\right) G_k^\alpha(x).$$

Then

$$\left|f(x) - S^\alpha_{r,n+r}(f,x)\right| = \left|\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt - \sum_{k=r}^{r+n} C^\alpha_{r,k}(f)\varphi^\alpha_{r,k}(x)\right|$$

with

$$\varphi^\alpha_{r,k+r}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G^\alpha_n(t)dt,$$

so

$$\varphi^\alpha_{r,k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G^\alpha_{k-r}(t)dt.$$

Hence,

$$\begin{aligned}
|f(x) \; - \; & S^\alpha_{r,n+r}(f,x)| \\
&= \left|\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)dt - \frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=r}^{r+n} C^\alpha_{r,k}(f)\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}G^\alpha_{k-r}(t)dt\right| \\
&= \frac{1}{(r-1)!}\left|\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\left(f^{(r)} - \sum_{k=r}^{r+n} C^\alpha_{r,k}(f)G^\alpha_{k-r}(t)\right)dt\right|
\end{aligned}$$

with

$$\sum_{k=r}^{r+n} C_{r,k}^{\alpha}(f) G_{k-r}^{\alpha}(t) = S_n^{\alpha}\left(f^{(r)}, x\right).$$

Then

$$\begin{aligned} \left|f(x) - S_{r,n+r}^{\alpha}(f,x)\right| &= \frac{1}{(r-1)!}\left|\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\left(f^{(r)}(t) - S_n^{\alpha}\left(f^{(r)},t\right)\right)dt\right| \\ &\leq \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\left|f^{(r)}(t) - S_n^{\alpha}\left(f^{(r)},t\right)\right|dt. \end{aligned}$$

Using Hölder's inequality, we get:

$$\left|f(x) - S_{r,n+r}^{\alpha}(f,x)\right| \leq \frac{1}{(r-1)!}\left(\int_{-1}^{x}(x-t)^{(r-1)q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{-1}^{x}\left|f^{(r)}(t) - S_n^{\alpha}\left(f^{(r)},t\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

with $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Calculate

$$J = \int_{-1}^{x}(x-t)^{(r-1)q}dt = (-1)^{q(r-1)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{q(r-1)}dt = \frac{(1+x)^{q(r-1)+2}}{q(r-1)+1} \quad \text{for } \ x \in (-1, A].$$

Then

$$\left|f(x) - S_{r,n+r}^{\alpha}(f,x)\right| \leq \frac{1}{(r-1)!}\left(\frac{(1+A)^{q(r-1)+2}}{q(r-1)+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|f^{(r)}(x) - S_n^{\alpha}\left(f^{(r)},x\right)\right\|_{L^p}.$$

Since

$$\left\|f^{(r)}(x) - S_n^{\alpha}\left(f^{(r)},x\right)\right\|_{L^p} \to 0 \text{ as } n \to \infty,$$

it results that

$$\left|f(x) - S_{r,n+r}^{\alpha}(f,x)\right| \to 0$$

uniformly on $(-1, A]$. □

Theorem 1.4. *Suppose that* $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$. *If* $f \in W^r_{L^2_\rho(-1,1)}$, *then we have the uniform convergence of the Fourier series*

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} C_{r,k}^{\alpha}(f)\varphi_{r,k}^{\alpha}(x)$$

on $(-1,1)$ *to the function* f.

2. Asymptotic forms of the functions $\varphi_{1,1+n}^{\alpha}(x)$

We say that

$$\varphi_{1,1+n}^{\alpha}(x) = \int_{-1}^{x} G_n^{\alpha}(t)dt = \frac{1}{\sqrt{h_n^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}\sqrt{w(t)}g_n^{\alpha}(t)dt,$$

where

$$w(t) = (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}, \qquad h_n^{\alpha} = \pi\frac{2^{1-2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}{n!(n+\alpha)\left[\Gamma(\alpha)\right]^2}.$$

Then
$$\varphi_{1,1+n}^{\alpha}(x)=\frac{1}{\sqrt{h_n^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}(1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}g_n^{\alpha}(t)dt.$$
Integrating by parts and using the first formula of Lemma 1.1, we get:
$$\varphi_{1,1+n}^{\alpha}(x)=\left|\begin{array}{ll} u=(1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} & du=\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)(1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}-1}(-2t)dt \\ dv=g_n^{\alpha}(t)dt & v=\frac{1}{2(\alpha-1)}g_{n+1}^{\alpha-1}(t)\end{array}\right|,$$
so
$$\varphi_{1,1+n}^{\alpha}(x)=\frac{1}{2\left(\alpha-1\right)\sqrt{h_n^{\alpha}}}(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}g_{n+1}^{\alpha-1}(x)+\frac{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}{\left(\alpha-1\right)\sqrt{h_n^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}t(1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}-1}g_{n+1}^{\alpha-1}(t)dt,$$
$$\varphi_{1,1+n}^{\alpha}(x)=\left|\begin{array}{ll} u=(1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}} & du=-2t\left(1-t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}}\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{5}{4}\right)dt \\ dv=g_{n+1}^{\alpha-1}(t)dt & v=\frac{1}{2(\alpha-2)}g_{n+2}^{\alpha-2}(t)\end{array}\right|.$$
Then
$$\varphi_{1,1+n}^{\alpha}(x)=\frac{1}{2\left(\alpha-1\right)\sqrt{h_n^{\alpha}}}(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}g_{n+1}^{\alpha-1}(x)+\frac{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}}}{2\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\sqrt{h_n^{\alpha}}}g_{n+2}^{\alpha-2}(x)+R_n^{\alpha}(x),$$
where
$$R_n^{\alpha}(x)=\frac{\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}\right)}{\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\sqrt{h_n^{\alpha}}}\int_{-1}^{x}t\left(1-t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}}g_{n+2}^{\alpha-2}(t)dt. \tag{2.1}$$

Theorem 2.1 (Third aim result)**.** *Suppose that* $\alpha>\frac{9}{2}$. *Then the following asymptotic formula holds*
$$\varphi_{1,1+n}^{\alpha}(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{2\left(\alpha-1\right)\sqrt{h_n^{\alpha}}}g_{n+1}^{\alpha-1}(x)+\frac{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}}}{2\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\sqrt{h_n^{\alpha}}}g_{n+2}^{\alpha-2}(x)+R_n^{\alpha}(x),$$
where $R_n^{\alpha}(x)$ *is given by* (2.1) *and satisfies the estimate*
$$R_n^{\alpha}(x)=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

P r o o f. To estimate the remainder $R_n^{\alpha}(x)$, we must consider two cases.

First case: $-1\le x\le -1+\frac{1}{n}$. Here we have:
$$g_{n+2}^{\alpha-2}(t)\underset{\vartheta(-1)}{\sim}(-1)^n\frac{\Gamma(2\alpha+n-2)}{\Gamma\left(2\alpha-4\right)\Gamma\left(n+3\right)}\left(1+o\left(x+1\right)\right),$$
then
$$\begin{aligned}\left|R_n^{\alpha}(x)\right| &\le\left|\frac{\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}\right)}{\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\sqrt{h_n^{\alpha}}}\right|\left|\frac{\Gamma(2\alpha+n-2)}{\Gamma\left(2\alpha-4\right)\Gamma\left(n+3\right)}\right|\int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}}\left|t\left(1-t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}}\right|dt\\ &\le\left|\frac{\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}\right)}{\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\sqrt{h_n^{\alpha}}}\right|\left|\frac{\Gamma(2\alpha+n-2)}{\Gamma\left(2\alpha-4\right)\Gamma\left(n+3\right)}\right|\left|1+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right|\int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}}\left|t\left(1-t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}}\right|dt\\ &\le\left|\frac{\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}\right)}{\left(\alpha-1\right)\left(\alpha-2\right)\sqrt{h_n^{\alpha}}}\right|\left|\frac{\Gamma(2\alpha+n-2)}{\Gamma\left(2\alpha-4\right)\Gamma\left(n+3\right)}\right|\left|1+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right|\int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}}|t|\left|1+t^2\right|^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}}dt.\end{aligned}$$

We let
$$h_n^\alpha = \pi \frac{2^{1-2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}{n!(n+\alpha)\left[\Gamma(\alpha)\right]^2}.$$
It is easy to see that
$$\int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} |t| \left|1+t^2\right|^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}} dt \le \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}} \frac{1}{n} = o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$
Then
$$|R_n^\alpha(x)| \le o\Big(\frac{1}{n}\Big)\left|\frac{\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}\right)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\sqrt{h_n^\alpha}}\right|\left|\frac{\Gamma(2\alpha+n-2)}{\Gamma(2\alpha-4)\Gamma(n+3)}\right|\left|1+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right| = o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Second case: $-1+\frac{1}{n} \le x \le 1$. We have:
$$\begin{aligned}|R_n^\alpha(x)| &\le \left|\frac{\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}\right)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\sqrt{h_n^\alpha}}\right| \int_{-1}^{x}\left|t\left(1-t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}} g_{n+2}^{\alpha-2}(t)\right| dt \\ &\le \omega_{\alpha,n}\left[\int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}}\left|t\left(1-t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}} g_{n+2}^{\alpha-2}(t)\right| dt + \int_{-1+\frac{1}{n}}^{x}\left|t\left(1-t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}} g_{n+2}^{\alpha-2}(t)\right| dt\right],\end{aligned}$$
with
$$\omega_{\alpha,n} = \left|\frac{\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}\right)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\sqrt{h_n^\alpha}}\right|.$$
So
$$\begin{aligned}|R_n^\alpha(x)| &\le \omega_{\alpha,n}\int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}}\left|t\left(1-t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}} g_{n+2}^{\alpha-2}(t)\right| dt + \omega_{\alpha,n}\int_{-1+\frac{1}{n}}^{x}\left|t\left(1-t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}} g_{n+2}^{\alpha-2}(t)\right| dt \\ &\le o\Big(\frac{1}{n}\Big) + \omega_{\alpha,n}\int_{-1+\frac{1}{n}}^{x}\left|t\left(1-t^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{9}{4}} g_{n+2}^{\alpha-2}(t)\right| dt.\end{aligned}$$
We say that for each $t=\cos\theta$, $0<\delta\le\theta\le\pi-\delta$, the asymptotic representation is [9, p. 318]
$$P_n^{\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}\right)}(\cos\theta) = \frac{\cos\left\{(n+\alpha)\theta-\frac{\pi}{2}\right\}}{\sqrt{\pi n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$
where $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ is a Jacobi polynomial.

Since
$$g_n^\alpha(t) = \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\alpha+n)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma\left(\alpha+n+\frac{1}{2}\right)} P_n^{\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}\right)}(t),$$
then
$$g_n^\alpha(\cos\theta) = \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\alpha+n)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma\left(\alpha+n+\frac{1}{2}\right)}\frac{\cos\left\{(n+\alpha)\theta-\frac{\pi}{2}\right\}}{\sqrt{\pi n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

First, find an asymptotic estimate for
$$\frac{\Gamma(2\alpha+n)}{\Gamma\left(\alpha+n+\frac{1}{2}\right)}.$$

We see that

$$\Gamma\left(az+b\right) \sim \sqrt{2\pi}e^{-az}\left(az\right)^{az+b-\frac{1}{2}}, \quad |\arg z| < \pi, \quad a > 0.$$

$$z^{b-a}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} \sim 1 + \frac{(b-a)(a+b-1)}{2z} + \frac{1}{12z^2}C_2^{a-b}\left[3(a+b-1)^2 - a + b - 1\right] + \dots$$

So

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma\left(2\alpha+n\right)}{\Gamma\left(\alpha+n+\frac{1}{2}\right)} \\ &\sim \frac{1}{n^{\alpha-\frac{5}{2}}} + \frac{1}{2n^{\alpha-\frac{3}{2}}}\left(\alpha-\frac{5}{2}\right)\left(3\alpha-\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{12n^{\alpha-\frac{1}{2}}}C_2^{\alpha-\frac{5}{2}}\left(3\left(3\alpha-\frac{5}{2}\right)^2 - \alpha + \frac{3}{2}\right) + \dots \\ &= o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{since } \alpha > \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Taking into account the fact that $|1-t^2| \le 1$ for $-1+\frac{1}{n} \le t \le x \le 1$, it follows that:

$$|R_n^\alpha(x)| \le o\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_{\alpha,n}\int_{-1+\frac{1}{n}}^{x} |t|\left|g_{n+2}^{\alpha-2}(t)\right| dt,$$

$$\begin{aligned} |R_n^\alpha(x)| \le\, & o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &+ \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\omega_{\alpha,n}}{\Gamma(2\alpha)\sqrt{\pi n}\left|\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\right|}\int_{ar\cos(-1+\frac{1}{n})}^{ar\cos(x)}\left|\cos\left\{(n+\alpha)\theta - \frac{\pi}{2}\right\}\right|\sin\theta d\theta + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Now, using the properties of the trigonometric functions, we get

$$\begin{aligned} |R_n^\alpha(x)| &\le o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\omega_{\alpha,n}}{\Gamma(2\alpha)\sqrt{\pi n}\left|\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\right|}\int_{ar\cos(-1+\frac{1}{n})}^{ar\cos(x)}\theta d\theta + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\le o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\omega_{\alpha,n}}{\Gamma(2\alpha)\sqrt{\pi n}\left|\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\right|}\int_{ar\cos(-1+\frac{1}{n})}^{\pi}\theta d\theta + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\le o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\omega_{\alpha,n}}{\Gamma(2\alpha)\sqrt{\pi n}\left|\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^\alpha\right|}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{ar\cos^2(-1+\frac{1}{n})}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

So, we have the desired estimate. □

References

[1] R. M. Gadzhimirzaev, "Sobolev-orthonormal system of functions generated by the system of Laguerre functions", *Probl. Anal. Issues Anal.*, **8(26)**:1 (2019), 32–46.

[2] I. I. Sharapudinov, "Approximation of functions of variable smoothness by Fourier–Legendre sums", *Sb. Math.*, **191**:5 (2000), 759–777.

[3] I. Sharapudinov, *Mixed Series of Orthogonal Polynomials*, Daghestan Sientific Centre Press, Makhachkala, 2004.

[4] I. I. Sharapudinov, "Approximation properties of mixed series in terms of Legendre polynomials on the classes W^r", *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 433–452.

[5] I. I. Sharapudinov, "Sobolev orthogonal systems of functions associated with an orthogonal system", *Izv. Math.*, **82**:1 (2018), 212–244.

[6] I. I. Sharapudinov, T. I. Sharapudinov, "Polynomials orthogonal in the Sobolev sens, generated by Chebychev polynomials orthogonal on a mesh", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **61**:8 (2017), 59–70.

[7] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, USA, 1964.

[8] G. Szegö, *Orthogonal Plynomials.* V. 23, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1975.

[9] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, Birkhăuser Veriag Basel, Springer Basel AG., 1988.

Information about the author

Mohamed Ahmed Boudref, PhD of Mathematics, Director of the LIMPAF Mathematics and Computer Science Laboratory, Lecturer of the High Mathematics Department. University of Bouira, Algeria. E-mail: m.boudref@univ-bouira.dz

Received 17.02.2022
Reviewed 26.05.2022
Accepted for press 09.06.2022

Информация об авторе

Будреф Мохамед Ахмед, кандидат физико-математических наук, директор лаборатории математики и компьютерных наук LIMPAF, преподаватель кафедры высшей математики. Университет Буира, Алжир. E-mail: m.boudref@univ-bouira.dz

Поступила в редакцию 17.02.2022 г.
Поступила после рецензирования 26.05.2022 г.
Принята к публикации 09.06.2022 г.

Том 27, № 138 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-164-174
УДК 517.968.2

Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов

Джасур Музофирович ОДИНАБЕКОВ

ГОУ «Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Душанбе»
734002, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1

Аннотация. Основными в теории сингулярных интегральных операторов являются проблемы ограниченности, обратимости, нётеровости и вычисления индекса. Общая теория многомерных сингулярных интегральных операторов по всему пространству E_n построена С. Г. Михлиным. Известно, что в двумерном случае, если символ оператора не обращается в нуль, то имеет место теория Фредгольма. Для операторов по ограниченной области граница этой области существенно влияет на разрешимость соответствующих операторных уравнений. В данной работе рассматриваются двумерные сингулярные интегральные операторы с непрерывными коэффициентами по ограниченной области. Такие операторы применяются во многих задачах теории дифференциальных уравнений в частных производных. В связи с этим представляет интерес установление критериев нётеровости рассматриваемых операторов в виде явных условий на их коэффициенты. В статье установлены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости двумерных сингулярных интегральных операторов в лебеговых пространствах $L_p(D)$ (рассматриваемых над полем вещественных чисел), $1 < p < \infty$, и даны формулы для вычисления индексов. Используется метод, разработанный Р. В. Дудучавой [Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I: The half-space case; II: The case of compact manifolds // J. Operator Theory, 1984, v. 11, 41–76 (I); 199–214 (II)]. При этом исследование нётеровых свойств операторов сводится к факторизации соответствующих матриц-функций и нахождению их частичных индексов.

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, индекс оператора, символ оператора, нётеровость оператора

Для цитирования: *Одинабеков Д.М.* Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 164–174. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-164-174.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-164-174

On the Noethericity conditions and the index of some two–dimensional singular integral operators

Jasur M. ODINABEKOV
Branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe
35/1 Bokhtar St., Dushanbe 734002, Tajikistan

Abstract. The main problems in the theory of singular integral operators are the problems of boundedness, invertibility, Noethericity, and calculation of the index. The general theory of multidimensional singular integral operators over the entire space E_n was constructed by S. G. Mikhlin. It is known that in the two-dimensional case, if the symbol of an operator does not vanish, then the Fredholm theory holds. For operators over a bounded domain, the boundary of this domain significantly affects the solvability of the corresponding operator equations. In this paper, we consider two-dimensional singular integral operators with continuous coefficients over a bounded domain. Such operators are used in many problems in the theory of partial differential equations. In this regard, it is of interest to establish criteria for the considered operators to be Noetherian in the form of explicit conditions on their coefficients. The paper establishes effective necessary and sufficient conditions for two-dimensional singular integral operators to be Noetherian in Lebesgue spaces $L_p(D)$ (considered over the field of real numbers), $1 < p < \infty$, and formulas for calculating indices are given. The method developed by R. V. Duduchava [Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I: The half-space case; II: The case of compact manifolds // J. Operator Theory, 1984, v. 11, 41–76 (I); 199–214 (II)]. In this case, the study of the Noetherian properties of operators is reduced to the factorization of the corresponding matrix-functions and finding their partial indices.

Keywords: singular integral operator, operator index, symbol operator, Noethericity operator

Mathematics Subject Classification: 45F15, 45E05.

For citation: Odinabekov J.M. Ob usloviyakh neterovosti i indekse nekotorykh dvumernykh singulyarnykh integral'nykh operatorov [On the Noethericity conditions and the index of some two–dimensional singular integral operators]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 164–174.
DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-164-174. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В евклидовом пространстве E_n сингулярный интеграл имеет вид

$$Ku = a(x)u(x) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x, x-y)u(y)dy, \tag{0.1}$$

где

$$k(x, tx) = t^{-n}k(x, z), \quad t > 0; \quad \int_{|z|=1} k(x, z)dz = 0$$

и k удовлетворяет некоторым условиям интегрируемости или гладкости.

Первые значительные результаты по многомерным сингулярным интегральным уравнениям получены Ф. Д. Трикоми (в 1926–1928), который рассмотрел случай $n = 2$ и ядра $k(x, z)$, не зависящего от x. С помощью найденной им формулы композиции двух сингулярных интегралов Ф. Д. Трикоми свел решение уравнения

$$Ku = f$$

к решению некоторого одномерного сингулярного уравнения; его анализом Ф. Д. Трикоми не занимался.

Еще одна важная работа по многомерным интегралам принадлежит Р. Жиро, который исследовал сингулярные интегралы по замкнутому ляпуновскому многообразию любой размерности (1934). При весьма специальных предположениях относительно ядра k Р. Жиро распространил теорему Племеля–Привалова об ограниченности оператора K в пространстве $C^\alpha(\Gamma)$ $(0 < \alpha < 1)$ и построил регуляризатор для оператора K.

Как в исследованиях Ф. Д. Трикоми, так и в работе Р. Жиро отсутствовало условие эллиптичности — необходимое и достаточное условие, при котором сингулярный оператор допускает регуляризацию. Это условие появилось в работе С. Г. Михлина (1936), который ввел понятие символа оператора K (в случае $n = 2$) с помощью разложения ядра в ряд Фурье по сферическим функциям. А. П. Кальдерон и А. Зигмунд впервые применили к сингулярным интегралам аппарат преобразования Фурье. В работах этих авторов и С. Г. Михлина были установлены следующие формулы:

$$\mathcal{K}(x, \xi) = a(x) + \overline{k}(x, \xi); \qquad K = F^{-1}_{\xi\to x}\mathcal{K}(x, \xi)F_{x\to\xi},$$

где $\overline{k}(x, \xi)$ — преобразование Фурье F ядра $k(x, z)$ по переменной z. Эти формулы послужили основной дальнейших многочисленных исследований в области многомерных сингулярных интегралов и интегральных уравнений. Более того, систематическое использование аппарата преобразования Фурье содействовало дальнейшему синтезу многомерных сингулярных интегральных уравнений и уравнений в частных производных, что привело к созданию теории псевдодифференциальных операторов [1–5].

В терминах символа С. Г. Михлин дал простые достаточные условия ограниченности оператора (0.1) в пространстве L_2 и доказал, что если K — эллиптический оператор, то сингулярное уравнение $Ku = f$ можно свести к эквивалентному уравнению Фредгольма; в отличие от случая одного уравнения индекс системы многомерных сингулярных уравнений может быть отличным от нуля. Более общие теоремы об ограниченности сингулярного оператора (0.1) в пространстве $L_p(E_n)$ $(1 < p < \infty)$ были установлены А. П. Кальдероном. Начиная с этих основополагающих работ, проблематика условий ограниченности сингулярных интегралов в функциональных пространствах интенсивно развивалась (см. [2]).

Полное решение проблемы индекса для общего эллиптического оператора (содержащего в качестве частного случая эллиптический сингулярный интегральный оператор) дано в работах М. Ф. Атьи, А. Зингера и Р. Ботта (в 1963–1964).

Многими математиками получены интересные результаты о многомерных сингулярных интегральных уравнениях на многообразиях с краем или особенностями, о неэллиптических уравнениях и операторах с разрывными символами, о многомерных уравнениях Винера–Хопфа и бисингулярных уравнениях. В основе многих исследований в последних трех из перечисленных направлений лежит так называемый «локальный принцип», предложенный И. Б. Симоненко и аналогичный, в известном смысле, методу «замораживания коэффициентов» в дифференциальных уравнениях.

В продолжение [6] в данной статье мы исследуем некоторые двумерные сингулярные интегральные операторы по ограниченной области D, для которых устанавливаем необходимые и достаточные условия нётеровости в пространстве $L_p(D)$, $1 < p < \infty$, и получаем формулы для вычисления индекса. Полученные результаты могут применяться к задачам Дирихле и Неймана для эллиптических систем дифференциальных уравнений порядка 2ν.

1. Основные понятия и вспомогательные результаты

Приведем необходимые определения и вспомогательные утверждения (см., например, [5–8]).

Пусть X — банахово пространство, A — линейный ограниченный оператор, действующий в X, A^* — сопряженный к нему оператор, действующий в сопряженном пространстве X^*. Множество $Ker A$ всех решений уравнения

$$Ax = 0 \tag{1.1}$$

называется множеством нулей или ядром оператора A. Множество $Ker A$ является подпространством пространства X. Размерность подпространства $Ker A$, т. е. число линейно независимых решений уравнения (1.1), будем обозначать через $\alpha_A = \dim Ker A$. Через $Ker A^*$ обозначим подпространство нулей оператора A^*, т. е. множество всех решений уравнения

$$A^*x = 0, \tag{1.2}$$

называемое ядром оператора A^*, и положим $\beta_A = \alpha_{A^*} = \dim Ker A^*$. Значения α_A, β_A называются дефектными числами оператора A. Если хотя бы одно из значений α_A или β_A конечное, то их разность называется индексом оператора A и обозначается через $Ind\, A$, т. е.

$$Ind\, A = \alpha_A - \beta_A. \tag{1.3}$$

Очевидно, $Ind\, A$ конечен тогда и только тогда, когда обе размерности α_A и β_A конечны.

Для разрешимости уравнения

$$Ax = y, \quad y \in X, \tag{1.4}$$

необходимо, чтобы свободный член y был ортогонален к $Ker A^*$ (иначе говоря, чтобы элемент y аннулировался любым функционалом $u \in Ker A^*$). Действительно, если уравнение (1.4) имеет решение x, а $u \in Ker A^*$, то

$$(y, u) = (Ax, u) = (x, A^*u) = (x, 0) = 0$$

(здесь круглыми скобками обозначено значение функционала на соответствующем элементе).

Если упомянутое выше условие ортогональности достаточно для разрешимости уравнения (1.3), то говорят, что оператор A нормально разрешим. Таким образом, можно дать следующее определение.

Определение 1.1. Оператор A называется нормально разрешимым в смысле Хаусдорфа, если неоднородное уравнение (1.4) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть y ортогональна всем решениям сопряженного однородного уравнения (1.2).

Для нормально разрешимых операторов используются следующие понятия.

Определение 1.2. Оператор A называется нётеровым в X, если он нормально разрешим и значения α_A, β_A конечны.

Определение 1.3. Индексом нётерова оператора A называется целое число $Ind\, A = \alpha_A - \beta_A$.

Определение 1.4. Нётеров оператор, индекс которого равен нулю, называется фредгольмовым.

Приведем основные свойства нётеровых операторов.

Свойство 1.1. (теорема о композиции). Если A и B нётеровы операторы в X, то их композиция AB также нётерова в X, причем

$$Ind\, AB = Ind\, A + Ind\, B.$$

Свойство 1.2. Если A нётеров в X то и A^* нётеров в X^*, причем

$$Ind\, A^* = -Ind\, A.$$

Свойство 1.3. (возмущение вполне непрерывным оператором). Если A нётеров, а T вполне непрерывен в X, то $A+T$ также нётеров в X, причем

$$Ind\,(A+T) = Ind\, A.$$

Свойство 1.4. (возмущение малым по норме оператором). Если A нётеров в X, то существует такое $\varepsilon = \varepsilon(A)$, что для всех операторов B таких, что $\|B\| < \varepsilon$, оператор $A+B$ нётеров в X и

$$Ind\,(A+B) = Ind\, A.$$

Говорят, что оператор A допускает левую (правую) регуляризацию, если существует линейный ограниченный оператор R такой, что произведение RA (AR) является оператором Фредгольма. Оператор R в этом случае называется левым (правым) регуляризатором оператора A.

Свойство 1.5. Для того, чтобы оператор A был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы у него существовали левый и правый регуляризаторы.

О п р е д е л е н и е 1.5. Нётеровы операторы A и B называются гомотопными, если существует семейство нётеровых операторов $A(t),\ \ t\in[0,1],$ которое равномерно непрерывно по норме на сегменте $[0,1]$: по любому заданному $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0,$ что если $|t_1-t_2|<\delta,$ то $\|A(t_1)-A(t_2)\|<\varepsilon,$ и $A(0)=A,\ \ A(1)=B.$

С в о й с т в о 1.6. Если операторы A и B гомотопны, то

$$Ind\,A=Ind\,B.$$

Как известно, простейшее двумерное интегральное уравнение

$$(Af)(z)\equiv a(z)f(z)+b(z)(S\overline{f})(z)=g(z),\qquad (Sf)(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(\zeta-z)^2},\tag{1.5}$$

играет важную роль в теории квазиконформных отображений и теории обобщенных аналитических функций, а более общие интегральные уравнения, содержащие операторы S, $\overline{S}$, оператор Бергмана B и их различные комбинации, широко применяются при изучении краевых задач для эллиптических систем уравнений. Первые результаты относительно уравнения (1.5) связаны с именами И. Н. Векуа, А. Джураева, Н. Н. Комяка. Еще И. Н. Векуа, при условии $|a(z)|>|b(z)|,\ \ z\in\overline{D},$ на основе принципа сжатых отображений установил, что уравнение (0.1) однозначно разрешимо в $L^p(D)$ при p, достаточно близких к двум. В предположении гладкости коэффициентов, методом редукции к краевой задаче сопряжения для обобщенных аналитических функций, А. Джураев обнаружил, что условия $|a(z)|\neq|b(z)|,\ \ z\in\overline{D},\ \ a(t)\neq 0$ на границе Γ области D, достаточны для нётеровости уравнения (1.5) в $L^p(D),\ \ p>2,$ и что индекс оператора из (1.5) равен удвоенному индексу функции $a(t),\ \ t\in\Gamma.$

Следующий важный шаг в исследовании таких операторов был сделан в работе [7], в которой рассматривался оператор

$$(\mathcal{A}f)(z)\equiv a(z)f(z)+b(z)\overline{f(z)}+c(z)S(f)(z)+d(z)(\overline{S}f)(z).\tag{1.6}$$

В предположении непрерывности коэффициентов $a(z), b(z), c(z), d(z)$ в области $\overline{D}=D\cup\Gamma$ с использованием результатов Р. Дудучавы было доказано, что для нётеровости в $L^p(D),\ \ 1<p<\infty,$ оператора вида (1.6) необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий

$$\Delta_1(z)>|\lambda(z)|+|\mu(z)|\qquad\forall z\in\overline{D},\tag{1.7}$$

$$\Delta_2(z)>|\lambda(z)|+|\mu(z)|\qquad\forall z\in\overline{D}\ \text{ и }\ \mu(t)\neq 0\ \ \forall t\in\Gamma,\tag{1.8}$$

где

$$\Delta_1(z)=|a(z)|^2-|b(z)|^2,\qquad \Delta_2(z)=|d(z)|^2-|c(z)|^2,$$

$$\lambda(z)=\overline{a(z)}c(z)-b(z)\overline{d(z)},\qquad \mu(z)=a(z)\overline{d(z)}-\overline{b(z)}c(z),$$

при этом, если выполнено (1.7), то оператор $\mathcal{A}$ имеет ограниченный обратный, а при выполнении (1.8) его индекс равен $\varkappa=2\,Ind_\Gamma\,\mu(t).$

В дальнейшем в работах Г. Джангибекова методами теории банаховых алгебр, локальным методом И. Б. Симоненко, а также методом факторизации матрицы-символа оператора изучены широкие классы двумерных сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами в ограниченной области. Для них получены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости в лебеговых пространствах с весом в виде неравенств, содержащих алгебраические операции над коэффициентами операторов. Кроме того, найдены явные формулы для вычисления (посредством алгебраических операций над коэффициентами) индекса операторов через приращение аргумента вдоль границы Γ области D некоторых конкретных функций.

2. Нётеровость и индекс сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами

Пусть D — ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой, I — тождественный оператор, m и ν — целые числа, $a(z)$, $b_n(z)$, $n = -m \dots, 0, \dots, \nu$, непрерывные в области $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные функции. В пространстве $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим сингулярный интегральный оператор

$$A \equiv a(z)I + b_0(z)K + \sum_{n=-m}^{\nu}{}' \, b_n(z) S_n K, \tag{2.1}$$

где штрих у знака суммы означает пропуск члена $n = 0$, а операторы K, S_n действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, (S_n f)(z) = \frac{(-1)^{|n|}|n|}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2i\nu\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \qquad \theta = \arg(\zeta - z).$$

При различных дополнительных ограничениях на a и b_n оператор A изучался во многих работах. В [8] в случае гладкости коэффициентов для более общих операторов указаны достаточные условия нётеровости в $L^p(D)$, $p > 2$, и формулы для индекса. Частные случаи $b_n(z) = 0$ при $n \neq \nu$ и $b_0(z) = 0$, $\nu = m = 1$ изучены соответственно в [9] и [10], где найдены необходимые и достаточные условия нётеровости оператора A в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, и даны формулы для вычисления индекса. Отметим, что оператор A включается в класс многомерных сингулярных интегральных операторов, для которых в [11–13] получены необходимые и достаточные условия нётеровости в пространствах $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, в терминах частных индексов матрицы-символа.

Прежде всего в данной работе устанавливается, что оператор A будет нётеровым в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда нётеровой является операторная матрица

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} a(z)I & b_0(z)K + \sum\limits_{n=-m}^{\nu}{}' \, b_n(z) S_n K \\ \overline{b_0(z)}I + \sum\limits_{n=-m}^{\nu}{}' \, \overline{b_n(z)}\,\overline{S}_n & \overline{a(z)}K \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

К оператору $\mathcal{W}$ применимы результаты [11, 12]. Поскольку символ оператора S_n равен $(\sigma/\overline{\sigma})^n$, $0 < |\sigma| < \infty$, $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$, то согласно [11, 12] свойства оператора $\mathcal{W}$ определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) & P_{\nu,m}(z, \sigma/\overline{\sigma}) \\ \overline{P_{\nu,m}(z, \sigma/\overline{\sigma})} & \overline{a(z)} \end{pmatrix},$$

где $P_{\nu,m}(z,\sigma/\overline{\sigma}) = \sum\limits_{n=-m}^{\nu} b_n(z)t^n$, $|t| \leq 1$. Поэтому для нётеровости оператора A необходимо, чтобы

$$\det G_z(\sigma) \neq 0,$$

т. е. $|a(z)| \neq |P_{\nu,m}(z,t)|$, $\forall z \in \overline{D}$, $|t| \leq 1$. Из этого неравенства вытекает, что либо $|a(z)| > |P_{\nu,m}(z,t)|$, либо $|a(z)| < |P_{\nu,m}(z,t)|$, $\forall z \in \overline{D}$, $|t| \leq 1$.

Разобьем множество всех операторов вида (2.1), удовлетворяющих условию (2.2), на следующие классы.

Определение 2.1. К классу $\mathfrak{M}$ отнесем операторы A, для которых $|a(z)| > |P_{\nu,m}(z,t)|$ для всех $z \in \overline{D}$, $|t| \leq 1$.

Определение 2.2. Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathfrak{M}_j$ (j целое и $-m \leq j \leq \nu$), если для любых $z \in \overline{D}$, $|t| \leq 1$ выполнено неравенство $|a(z)| < |P_{\nu,m}(z,t)|$ и $Ind_{|t|=1} P_{\nu,m}(z,t) = j$.

Теорема 2.1. *Для нётеровости оператора A в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$|a(z)| > |\sum_{n=-m}^{\nu} b_n(z)t^n|, \quad \forall z \in \overline{D}; \tag{2.3}$$

$$|a(z)| < |\sum_{n=-m}^{\nu} b_n(z)t^n|, \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2.4}$$

и $a(z) \neq 0$, когда $Ind_{|t|=1} \sum\limits_{n=-m}^{\nu} b_n(z)t^n \neq 0$ $\forall z \in \Gamma$.

При этом, если оператор A принадлежит классам $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}_j$, то его индекс равен нулю, а если $A \in \mathfrak{M}_j$ $j \neq 0$, то

$$\varkappa = -2j\, Ind_{\Gamma}\, a(z).$$

Доказательство. Пусть выполнено (2.3) или (2.4). По символу $G_z(\sigma)$ построим матрицы

$$G_z(\sigma_1 \pm i) = \begin{pmatrix} a(z) & P_{\nu,m}(z, \frac{\sigma_1 \pm i}{\sigma_1 \mp i}) \\ \overline{P_{\nu,m}(z, \frac{\sigma_1 \pm i}{\sigma_1 \mp i})} & \overline{a(z)} \end{pmatrix}, \quad z \in \Gamma, \quad -\infty < \sigma_1 < +\infty.$$

Показывается, что для $G_z(\sigma_1 \pm i)$ справедливы представления:

$$G_z(\sigma_1 + i) = R_1^-(\sigma_1)R_1^+(\sigma_1), \qquad G_z(\sigma_1 - i) = R_2^-(\sigma_1)R_2^+(\sigma_1),$$

где $R_{1,2}^-(\sigma_1)$ аналитически продолжимы в нижнюю, а $R_{1,2}^+(\sigma_1)$ — в верхнюю полуплоскость, причем их определители нигде в нуль не обращаются, т. е. матрицы $G_z(\sigma_1 \pm i)$ имеют нулевые частные индексы. Тогда из [11, 12] следует, что оператор A нётеров в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$.

Вычислим теперь индекс оператора A. Пусть сначала A принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Рассмотрим семейство нётеровых операторов

$$M_\tau \equiv a(z)I + \tau b_0(z)K + \tau {\sum_{n=-m}^{\nu}}' b_n(z)S_nK$$

непрерывно по норме зависящих от параметра $\tau \in [0,1]$. Поскольку $M_0 = a(z)I$, $M_1 = A$, то индекс оператора A равен нулю в любом $L^p(D)$ при $1 < p < \infty$.

Пусть A принадлежит классу $\mathfrak{M}_0$, т. е. выполнено (2.4) и $Ind\, P_{n,m}(z,t) = 0$, $|t| \le 1$. Тогда функция $P_{n,m}(z,t)$ имеет внутри единичного круга $|t| \le 1$ одинаковое количество нулей и полюсов. Пусть $P_{\nu,m}(z,t)$ имеет μ нулей внутри единичного круга $|t| \le 1$: $|\lambda_n(z)| < 1$, $n = 1,2,\ldots,\mu$, $0 \le \mu \le m$, и μ_1 нулей вне: $|\lambda_{\mu+n}(z)| > 1$, $n = 1,2,\ldots,\mu_1$, $0 \le \mu_1 \le \nu - \mu$. Тогда функцию $P_{n,m}(z,t)$ можно представить в виде

$$P_{\nu,m}(z,t) = c(z)t^{-\mu}\prod_{n=1}^{\mu}(t-\lambda_n(z))\prod_{n=1}^{\mu_1}(t-\lambda_{\mu+n}(z)),$$

$c(z) \ne 0$ в $\overline{D}$. Учитывая это, построим семейство матриц-функций

$$G^0_{z,\tau}(\sigma) = \begin{pmatrix} \dfrac{\tau a_1(z)}{Q_\mu(z,\frac{\sigma}{\overline{\sigma}};\tau)Q_{\mu_1}(z,\frac{\sigma}{\overline{\sigma}};\tau)} & \dfrac{Q_\mu(z,\frac{\sigma}{\overline{\sigma}};\tau)Q_{\mu_1}(z,\frac{\sigma}{\overline{\sigma}};\tau)}{\tau\overline{a_1(z)}} \end{pmatrix},$$

$$Q_\mu(z,\frac{\sigma}{\overline{\sigma}};\tau) = c(z)\prod_{n=1}^{\mu}(t-\tau\lambda_n(z)\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}),$$

$$Q_{\mu_1}(z,\frac{\sigma}{\overline{\sigma}};\tau) = \prod_{\nu=1}^{\mu_1}(\tau\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}-\lambda_{\mu+n}(z)), \quad 0 \le \tau \le 1, \quad a_1(z) = \varphi(\tau)a(z),$$

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{M}\varepsilon, & \text{если} \quad 0 \le \tau \le \tau_0 < 1, \\ \frac{1}{M}(\varepsilon + \frac{M-\varepsilon}{1-\tau_0}(\tau-\tau_0)), & \text{если} \quad \tau_0 \le \tau \le 1, \end{cases}$$

здесь τ_0 — вещественное число, достаточно близкое к 1,

$$M = \max_{z\in\overline{D}}|a(z)|, \quad \varepsilon = \inf|Q_\mu(z,t;\tau)|\,|Q_{\mu_1}(z,t;\tau)|,$$

а инфимум берется по всем $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$, $0 \le \tau \le 1$.

По матрицам $G^0_{z,\tau}(\sigma)$ построим семейство интегральных операторов N^0_τ, $0 \le \tau \le 1$, вида (0.1). Нетрудно заметить, что

$$|\tau a(z)| < |c(z)|\,|\prod_{n=1}^{\mu}(1-\tau\lambda_n(z)\bar{t})|\,|\prod_{n=1}^{\mu_1}(\tau t-\lambda_{\mu+n}(z))|,$$

и $Ind\, Q_\mu(z,t;\tau)\, Q_{\mu_1}(z,t;\tau) = 0$, $\forall z \in \overline{D}$, $|t| \le 1$, $0 \le \tau \le 1$, т. е. операторы N^0_τ нётеровы. Поскольку $N^0_\tau = A$ и $N^0_0 = c(z)\lambda_{\mu+1}(z)\ldots\lambda_{\mu+\mu_1(z)}K$, то индекс оператора равен нулю.

Пусть теперь A принадлежит классу $\mathfrak{M}_j$, $j \ne 0$, т. е. выполнено равенство (1.3), причем $Ind\, R_{\nu,m}(z,t) = j \ne 0$, $|t| \le 1$, $-m \le j \le n$, $a(z) \ne 0$ на Γ. Пусть функция $P_{\nu,m}(z,t)$ имеет внутри круга $|t| \le 1$ ровно μ нулей: $\lambda_n(z)$, $n = 1,2,\ldots,\mu$, $0 \le \mu \le \nu$. Тогда количество полюсов $P_{\nu,m}(z)$ внутри круга $|t| \le 1$ равно $\mu = j$. Пусть вне этого круга, т. е. при $|t| > 1$ указанная функция имеет μ_1, $0 < \mu_1 \le \nu - \mu$, нулей. Построим матрицу–символ

$$G^j_{z,\tau}(\sigma) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1(z)}{(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma})^j Q_\mu(z,\frac{\overline{\sigma}}{\sigma};\tau)Q_{\mu_1}(z,\frac{\overline{\sigma}}{\sigma};\tau)} & \dfrac{(\frac{\sigma}{\overline{\sigma}})^j Q_\mu(z,\frac{\overline{\sigma}}{\sigma};\tau)Q_{\mu_1}(z,\frac{\overline{\sigma}}{\sigma};\tau)}{\overline{a_1(z)}} \end{pmatrix},$$

где $0 \le \tau \le 1$, а функция $a_1(z)$ определяется так же, как в предыдущем случае.

Построив теперь по матрицам $G^j_{z,\tau}(\sigma)$ семейство интегральных операторов N^j_τ типа (0.1), $0 \le \tau \le 1$, и заметим, что они нётеровы, поскольку

$$|a(z)| < |c(z)|\,\Big|\prod_{\nu=1}^{\mu}(1-\tau\lambda_n(z)\bar{t})\Big|\,\Big|\prod_{n=1}^{\mu_1}(\tau t-\lambda_{\mu+n}(z))\Big|,$$

$Ind\, t^j Q_\mu(z,t;\tau)\, Q_{\mu_1}(z,t;\tau) = j \ne 0$, $\forall z \in \overline{D}$, $|t| \le 1$, $0 \le \tau \le 1$, а $a_1(z) = \varphi(\tau)a(z) \ne 0$, $z \in \Gamma$.

Так как $N^j_1 = A$, $N^j_0 = a_1(z)I + c(z)\lambda_{\mu+1}(z)\ldots\lambda_{\mu+\mu_1}(z)S_jK$, то, применив к оператору N^j_0 результаты [9], получим, что индекс оператора A определяется формулой

$$\varkappa = -2j\, Ind_\Gamma\, a(z).$$

Остается установить необходимость условия $a(z) \ne 0$, $z \in \Gamma$, когда $|a(z)| < |P_{n,m}(z,t)|$, $\forall z \in \overline{D}$, $|t| = 1$, $Ind_{|t|=1} R_{\nu,m}(z,t) = j \ne 0$. Допустим, что в некоторой точке $z_0 \in \Gamma$ выполняется условие $a(z_0) = 0$. Тогда получим

$$G^j_{z_0}(\sigma_1 - i) = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)^j c(z_0)\prod\limits_{n=1}^{\mu}\left(1-\lambda_n(z_0)\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)\prod\limits_{n=1}^{\mu_1}\left(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}-\lambda_{\mu+n}(z)\right) \\ \left(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}\right)^j\overline{c(z_0)}\prod\limits_{n=1}^{\mu}\left(1-\overline{\lambda_n(z_0)}\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}\right)\prod\limits_{n=1}^{\mu_1}\left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}-\overline{\lambda_{\mu+n}(z)}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & c(z_0)\prod_{n=1}^{\mu_1}\left(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}-\lambda_{\mu+n}(z_0)\right) \\ \prod_{n=1}^{\mu}\left(1-\overline{\lambda_n(z_0)}\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}\right) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}\right)^j & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)^j \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \overline{c(z_0)}\prod_{n=1}^{\mu}\left(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}-\overline{\lambda_{n+\mu}(z_0)}\right) & 0 \\ 0 & \prod_{n=1}^{\mu_1}\left(1-\lambda_n(z_0)\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right) \end{pmatrix} \equiv R^-(\sigma_1)\delta(\sigma_1)R^+(\sigma_1),$$

где $-\infty < \sigma_1 < \infty$.

Матрица $R^-(\sigma_1)$ аналитически продолжима в нижнюю полуплоскость, и нули ее определителя лежат в верхней полуплоскости, а $R^+(\sigma_1)$ аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость, нули ее определителя лежат в нижней полуплоскости. Таким образом, мы имеем факторизацию матрицы $G^j_{z_0}(\sigma_1 - i)$ с частными индексами $\varkappa_{1,2} = \pm j$, т. е. отличными от нуля. В силу [11,12] это означает, что оператор A не может быть нётеровым. $\square$

References

[1] С. Г. Михлин, *Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники*, ОГИЗ, М., 1947, 304 с. [S. G. Mikhlin, *Applications of Integral Equations to Some Problems of Mechanics, Mathematical Physics and Technology*, OGIZ Publ., Moscow, 1947 (In Russian), 304 pp.]

[2] С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, ФИЗМАТГИЗ, М., 1962, 256 с. [S. G. Mikhlin, *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, FIZMATGIZ Publ., Moscow, 1962 (In Russian), 256 pp.]

[3] С. Г. Михлин, *Лекции по линейным интегральным уравнениям*, ФИЗМАТГИЗ, М., 1959, 232 с. [S. G. Mikhlin, *Lectures on Linear Integral Equations*, FIZMATGIZ Publ., Moscow, 1959 (In Russian), 232 pp.]

[4] И. Н. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*, ОГИЗ, Л., 1948, 295 с. [I. N. Vekua, *New Methods for Solving Elliptic Equations*, OGIZ Publ., Leningrad, 1948 (In Russian), 295 pp.]

[5] Н. И. Мусхилишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, М., 1968, 511 с. [N. I. Muskhilishvili, *Singular Integral Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 511 pp.]

[6] Г. Джангибеков, Д. М. Одинабеков, Г. Х. Худжаназарова, "Об условиях нётеровости и индексе одного класса сингулярных операторов по ограниченной односвязной области", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2019, №2, 9–14; англ. пер.:G. Dzhangibekov, J. M. Odinabekov, G. Kh. Khudzhanazarova, "The Noetherian conditions and the index of some class of singular integral operators over a bounded simply connected domain", *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74**:2 (2019), 49–54.

[7] К. Х. Бойматов, Г. Джангибеков, "Об одном сингулярном интегральном операторе", *УМН*, **43**:3(261) (1988), 171–172; англ. пер.:K. Kh. Boimatov, G. Dzhangibekov, "On a singular integral operator", *Russian Math. Surveys*, **43**:3 (1988), 199–200.

[8] А. Д. Джураев, *Метод сингулярных интегральных уравнений*, Наука, М., 1987. [A. D. Juraev, *The Method of Singular Integral Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russian)].

[9] Г. Джангибеков, "О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами", *Докл. АН СССР*, **300**:2 (1988), 272–276; англ. пер.:G. Dzhangibekov, "On the Noethericity and index of a class of two-dimensional singular integral equations with discontinuous coefficients", *Dokl. Math.*, **37**:3 (1988), 639–643.

[10] Г. Джангибеков, "О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов", *Докл. АН СССР*, **308**:5 (1989), 1037–1041; англ. пер.:G. Dzhangibekov, "On the Noethericity and index of some two-dimensional singular integral operators", *Dokl. Math.*, **40**:2 (1990), 394–399.

[11] R. Duduchava, "On multidimensional singular integral operators. I: The half-space case", *Journal of Operator Theory*, **11**:1 (1984), 41–76.

[12] R. Duduchava, "On multidimensional singular integral operators. II: The case of compact manifolds", *Journal of Operator Theory*, **11**:2 (1984), 199–214.

[13] Н. Л. Василевский, "Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами, II", *Изв. вузов. Матем.*, 1986, №3, 33–38; англ. пер.:N. L. Vasilevskii, "Banach algebras generated by two-dimensional integral operators with a Bergman kernel and piecewise-continuous coefficients. II", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **30**:3 (1986), 44–50.

Информация об авторе

Одинабеков Джасур Музофирович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и естественных наук. Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в городе Душанбе, г. Душанбе, Республика Таджикистан. E-mail: jasur-79@inbox.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9851-9895

Поступила в редакцию 18.04.2022 г.
Поступила после рецензирования 03.06.2022 г.
Принята к публикации 09.06.2022 г.

Information about the author

Jasur M. Odinabekov, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Mathematics and Natural Sciences Department. Branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe, Dushanbe, Tajikistan. E-mail: jasur-79@inbox.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9851-9895

Received 18.04.2022
Reviewed 03.06.2022
Accepted for press 09.06.2022

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 138 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-175-182

УДК 517.953

Свойства одного матрично-дифференциального оператора высокого порядка

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»

394613, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Аннотация. В статье рассматривается линейный матрично-дифференциальный оператор n-го порядка вида $\mathbb{A}^n$. Устанавливается операторный аналог бинома Ньютона, с помощью которого для операторов $\mathbb{A}^n$ и $(\tilde{\mathbb{A}}^{-1})^n$ получено аналитическое выражение. Приводится лемма о решении линейного уравнения, которая применяется при исследовании абстрактной задачи Коши для алгебро-дифференциального уравнения в банаховом пространстве с кубом оператора A при старшей производной. Оператор A обладает свойством иметь 0 нормальным собственным числом. Методом каскадного расщепления уравнения и условий на, соответственно, уравнения и условия в подпространствах меньших размерностей определены условия существования, единственности решения, и найдено это решение. Как приложение, полученные результаты при $n=3$ применяются при решении смешанной задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка. К таким уравнениям относится обобщенное волновое уравнение на мелкой воде, обобщенное уравнение Лиувилля.

Ключевые слова: линейный матрично-дифференциальный оператор, высокий порядок, 0-нормальное собственное число, алгебро-дифференциальное уравнение, банахово пространство, уравнение в частных производных четвертого порядка

Для цитирования: *Усков В.И.* Свойства одного матрично-дифференциального оператора высокого порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 175–182. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-175-182.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-175-182

Properties of one higher order matrix-differential operator

Vladimir I. USKOV
Voronezh State University of Forestry and Technologies after named G. F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394613, Russian Federation

Abstract. The article considers a linear matrix-differential operator of the n-th order of the form $\mathbb{A}^n$. For it and for the operator $(\tilde{\mathbb{A}}^{-1})^n$, an analytical expression is derived, for which an operator analog of the Newton binomial is obtained. A lemma on the solution of a linear equation is given. It is used in the study of the abstract Cauchy problem for an algebro-differential equation in a Banach space with the cube of the operator A at the highest derivative. The operator A has the property of having 0 as a normal eigenvalue. Conditions for the existence and uniqueness of the solution are determined; the solution is found, for which the method of cascade splitting of the equation and conditions into the corresponding equations and conditions in subspaces of lower dimensions is used. As an application, the results obtained for $n=3$ are used in solving a mixed problem for a fourth-order partial differential equation. These equations include the generalized shallow water wave equation and the generalized Liouville equation.

Keywords: linear matrix-differential operator, higher order, 0-normal eigenvalue, algebro-differential equation, Banach space, fourth order partial-differential equation

Mathematics Subject Classification: 35G16.

For citation: Uskov V.I. Svoystva odnogo matrichno-differentsial'nogo operatora vysokogo poryadka [Properties of one higher order matrix-differential operator]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 175–182. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-175-182. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В статье рассматривается действующий в пространстве непрерывных двухкомпонентных функций линейный оператор n-го порядка $\mathbb{A}^n$, где $\mathbb{A} = \dfrac{d}{dx} + R$, R задается числовой матрицей $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. Для произвольных линейных операторов A, B получен аналог бинома Ньютона, с помощью которого выведено аналитическое выражение для оператора $\mathbb{A}^n$ и для оператора $(\tilde{\mathbb{A}}^{-1})^n$, где сужение $\tilde{\mathbb{A}}$ оператора $\mathbb{A}$ в инвариантном подпространстве M обратимо.

На основании этих результатов исследуется абстрактная задача Коши для алгебро-дифференциального уравнения в банаховом пространстве с кубом оператора при старшей производной, являющегося 0-NEV оператором, т.е. обладающего свойством иметь 0 нормальным собственным числом. Определены условия существования, единственности решения и найдено это решение, для чего используется метод каскадного расщепления уравнения и условий на уравнения и условия в подпространствах меньших размерностей.

Как показано в [1], оператор $\mathbb{A}$ обладает свойством 0-NEV, что позволяет применить полученный результат к решению смешанной задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка с оператором $\mathbb{A}^3$ при производной по выделенной переменной t. К уравнениям в частных производных четвертого порядка относятся обобщенное волновое уравнение на мелкой воде, обобщенное уравнение Лиувилля [2]. Такие уравнения в других работах решались сведением к интегральному уравнению введением функции Римана [3], методом Ибрагимова [4], методом функционального разделения переменных [5] и т. д.

1. Аналог бинома Ньютона для линейных операторов

Пусть $P(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ — количество перестановок с повторениями i_1 элементов первого вида, i_2 элементов второго вида, $\ldots$, i_m элементов m-го вида:

$$P(i_1, i_2, \ldots, i_m) = \frac{(i_1 + i_2 + \ldots + i_m)!}{i_1!\, i_2!\, \ldots\, i_m!}.$$

Справедливо следующее мультиномиальное тождество.

Лемма 1.1.

$$P(i_1, i_2, \ldots, i_m) = P(i_1 - 1, i_2, \ldots, i_m) + P(i_1, i_2 - 1, \ldots, i_m) + \ldots + P(i_1, i_2, \ldots, i_m - 1).$$

Лемма 1.1 доказана в работе [6].

Имеет место аналог бинома Ньютона для линейных операторов.

Теорема 1.1. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — линейные операторы, попарно перестановочные по умножению. Тогда*

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_m)^n = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_m \geqslant 0 \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_m = n}} P(i_1, i_2, \ldots, i_m) A_1^{i_1} A_2^{i_2} \ldots A_m^{i_m}.$$

Теорема 1.1 доказывается методом математической индукции по n с применением леммы 1.1.

Пусть $C_n^i = P(n - i, i)$ — количество сочетаний из n элементов по i элементов. Из теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Пусть A, B — линейные операторы, попарно переместительные по умножению. Тогда*

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^{n-i} B^i.$$

2. О степени одного матрично-дифференциального оператора

Пусть заданы вещественные $\alpha, \beta,\ \gamma > 0,\ \gamma^2 = -\alpha\beta > 0$. Обозначим $\mathfrak{X}_\gamma = [0; 2\pi/\gamma]$ и определим банахово пространство

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} :\ y_i(x) \in C(\mathfrak{X}_\gamma),\ \ i = 1, 2 \right\}.$$

Рассмотрим в этом пространстве оператор

$$\mathbb{A} = \frac{d}{dx} + R, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

с областью определения

$$\operatorname{dom} \mathbb{A} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} :\ y_i(x) \in C^1(\mathfrak{X}_\gamma),\ \ y_i(0) = y_i(2\pi/\gamma),\ \ i = 1, 2 \right\}.$$

Для определяемого соотношениями (2.1) оператора $\mathbb{A}$ в работе [1] доказаны следующие утверждения, которые приведем здесь в виде лемм.

Лемма 2.1. *Оператор $\mathbb{A}$ обладает свойством* 0-NEV.

Лемма 2.2. *Элементы ядра оператора $\mathbb{A}$ не имеют присоединенных элементов.*

Для матрицы R имеет место следующее очевидное утверждение.

П р е д л о ж е н и е 2.1.

$$R^{2j-2} = (-1)^{j-1} \gamma^{2j-2} I, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Применив предложение 2.1, получим представление некоторых операторных функций от R.

Утверждение 2.1.

$$\sin R = (-\gamma^{-1} \sin\gamma) R, \quad \cos R = (\mathrm{ch}\gamma) I, \quad \exp R = (\cos\gamma) I + (\gamma^{-1} \sin\gamma) R.$$

Далее, пусть $[r]$ — целая часть числа r. Вычисления с применением следствия 1.1, утверждения 2.1 и леммы 2.2 приводят к следующим теоремам.

Теорема 2.1.

$$\mathbb{A}^n = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2j} (-1)^j \gamma^{2j} \frac{d^{n-2j}}{dx^{n-2j}} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_n^{2j-1} (-1)^{j-1} \gamma^{2j-2} R \frac{d^{n+1-2j}}{dx^{n+1-2j}}.$$

Теорема 2.2.

$$(\tilde{\mathbb{A}}^{-1})^n = (-1)^n I\left(K_n^{(1)}(x) - \frac{\gamma}{2\pi}L_n^{(1)}(x)\right) + (-1)^{n+1}\gamma^{-1}R\left(K_n^{(2)}(x) - \frac{\gamma}{2\pi}L_n^{(2)}(x)\right)$$

в обозначениях:

$$K_n^{(1)}(x) = \int\limits_x^{2\pi/\gamma}\int\limits_{s_0}^{2\pi/\gamma}\ldots\int\limits_{s_{n-2}}^{2\pi/\gamma}(\cdot)\cos(\gamma(x-s_{n-1}))\,ds_{n-1}\,ds_{n-2}\ldots ds_1\,ds_0,$$

$$K_n^{(2)}(x) = \int\limits_x^{2\pi/\gamma}\int\limits_{s_0}^{2\pi/\gamma}\ldots\int\limits_{s_{n-2}}^{2\pi/\gamma}(\cdot)\sin(\gamma(x-s_{n-1}))\,ds_{n-1}\,ds_{n-2}\ldots ds_1\,ds_0,$$

$$L_n^{(1)}(x) = \int\limits_0^{2\pi/\gamma}\int\limits_{s_0}^{2\pi/\gamma}\ldots\int\limits_{s_{n-2}}^{2\pi/\gamma}(\cdot)s_0\cos(\gamma(x-s_{n-1}))\,ds_{n-1}\,ds_{n-2}\ldots ds_1\,ds_0,$$

$$L_n^{(2)}(x) = \int\limits_0^{2\pi/\gamma}\int\limits_{s_0}^{2\pi/\gamma}\ldots\int\limits_{s_{n-2}}^{2\pi/\gamma}(\cdot)s_0\sin(\gamma(x-s_{n-1}))\,ds_{n-1}\,ds_{n-2}\ldots ds_1\,ds_0.$$

3. Решение линейного уравнения

Пусть A — линейный 0-NEV оператор, действующий в банаховом пространстве E. Пусть корневое подпространство N состоит лишь из элементов ядра $\operatorname{Ker} A$, не имеющих присоединенных элементов, а M — дополнительное к нему инвариантное подпространство. Ядро полагается двумерным: $N = \{c_1e_1 + c_2e_2\}$, $e_1, e_2 \in E$.

Обозначим P — проектор на N, Q — проектор на M, $\tilde{A}$ — сужение оператора A на M, I — единичный оператор в соответствующем подпространстве. В N вводится скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ так, что $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $i,j = 1,2$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Линейное уравнение* $A^n v = w$, $v \in \operatorname{dom} A^n \cap E$, $w \in E$, $n \in \mathbb{N}$, *равносильно системе*

$$v = Hw + Pv,$$

$$\langle Pw, e_j\rangle = 0, \quad j = 1,2,$$

в обозначении

$$H = (\tilde{A}^{-1})^n Q.$$

Лемма 3.1 обобщает результат, доказанный в работе [7].

4. Решение задачи Коши для алгебро-дифференциального уравнения

Рассматривается задача

$$A^3\frac{du}{dt} = Bu(t), \tag{4.1}$$

$$u(0) = u^0 \in E, \tag{4.2}$$

где A, B — замкнутые линейные операторы, действующие в банаховом пространстве E; $\overline{\operatorname{dom} A^3} = E$; $\overline{\operatorname{dom} B} = E$; A является 0-NEV-оператором с двумерным ядром; элементы ядра не имеют присоединенных; $t \in \mathfrak{T} = [0; t_k]$.

Под решением задачи (4.1), (4.2) подразумевается функция $u(t)$, дифференцируемая на $\mathfrak{T}$ и удовлетворяющая (4.1), (4.2) при каждом $t \in \mathfrak{T}$.

Обозначим
$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \langle PBe_1, e_1\rangle & \langle PBe_2, e_1\rangle \\ \langle PBe_1, e_2\rangle & \langle PBe_2, e_2\rangle \end{pmatrix}$$
и будем предполагать, что выполнено следующее условие
$$\Delta \neq 0. \tag{4.3}$$

Определим
$$T(\cdot) = HB(\cdot) + \Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} -\langle PBHB(\cdot), e_1\rangle & \langle PBe_2, e_1\rangle \\ -\langle PBHB(\cdot), e_2\rangle & \langle PBe_2, e_2\rangle \end{pmatrix} \cdot e_1$$
$$+ \Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} \langle PBe_1, e_1\rangle & -\langle PBHB(\cdot), e_1\rangle \\ \langle PBe_1, e_2\rangle & -\langle PBHB(\cdot), e_2\rangle \end{pmatrix} \cdot e_2.$$

Аналогично [7] с применением леммы 3.1 получен следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть справедливо неравенство* (4.3) *и пусть оператор T ограничен. Тогда при выполнении условия*
$$\langle Pu^0, e_j\rangle = 0, \quad j = 1, 2, \tag{4.4}$$
решение задачи (4.1), (4.2) *существует, это решение единственно, имеет вид*
$$u(t) = \exp(tT)u^0$$
и удовлетворяет соотношению
$$\langle Pu(t), e_j\rangle \equiv 0, \quad j = 1, 2, \quad t \in \mathfrak{T}.$$

5. Пример

Пусть на отрезке $\mathfrak{X}_2 = [0; \pi]$ задана непрерывная функция $g(x)$, удовлетворяющая условию
$$g(0) = g(\pi). \tag{5.1}$$
В прямоугольнике $\Pi = \mathfrak{X}_2 \times \mathfrak{T}$ рассмотрим задачу
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + R\right)^3 \frac{\partial u}{\partial t} = B(x)u(x,t), \tag{5.2}$$
$$u(x,0) = g(x), \quad u(0,t) = u(\pi,t), \tag{5.3}$$
с операторами
$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} \int\limits_0^x (\cdot)\,ds & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Под решением задачи (5.2), (5.3) подразумевается функция $u(x,t)$, дифференцируемая по $t \in \mathfrak{T}$ при каждом $x \in \mathfrak{X}_2$, трижды непрерывно дифференцируемая по $x \in \mathfrak{X}_2$ при каждом $t \in \mathfrak{T}$, интегрируемая по x на Π, удовлетворяющая равенству $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ и (5.2), (5.3) на Π.

Лемма 2.1 позволяет применить результаты, полученные выше в секции 4. В работе [7] выписаны подпространства M, N, проектор P на N, оператор $\tilde{\mathbb{A}}^{-1}$. Вычисления показывают следующее.

Условие (4.3) выполнено: $\Delta = 1/16 \neq 0$.

Возьмем некоторую функцию $f(x)$ и пусть $f_1(x)$ — ее первая компонента. В обозначениях

$$\psi_1(x) = \int\limits_0^x f_1(s)\,ds, \quad \psi_2(x) = \big(-K_3^{(1)}(x) + \frac{1}{\pi} L_3^{(1)}(x)\big)\psi_1(x),$$

$$\psi_3(x) = \big(-2K_3^{(2)}(x) + \frac{2}{\pi} L_3^{(2)}(x)\big)\psi_1(x), \quad \psi_4(x) = \int\limits_0^x \psi_2(s)\,ds$$

получим выражение для оператора T:

$$T(x)f(x) = \begin{pmatrix} \psi_2(x) + \dfrac{4}{\pi}\int\limits_0^\pi \psi_4(s)\sin(2(x-s))\,ds \\ \psi_3(x) - \dfrac{8}{\pi}\int\limits_0^\pi \psi_4(s)\cos(2(x-s))\,ds \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Нетрудно видеть, что этот оператор ограничен и сильно непрерывен в пространстве $C(\mathfrak{X}_2)$.

Далее заметим, что условие (4.4) записывается в виде равенства

$$\int\limits_0^\pi \mu(s)\cos 2s\,ds = \int\limits_0^\pi \mu(s)\sin 2s\,ds = 0, \quad \text{где} \quad \mu(x) = \int\limits_0^x g(s)\,ds. \tag{5.5}$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $\mathfrak{X}_2$ и удовлетворяет условиям (5.1) и (5.5). Тогда решение задачи (5.2), (5.3) существует, это решение единственно и равно*

$$u(x,t) = \exp\big(tT(x)\big)\,g(x),$$

где оператор T определяется формулой (5.4).

References

[1] S. P. Zubova, E. V. Raetskaya, V. I. Uskov, “Degeneracy property of a matrix-differential operator and applications”, *Journal of Mathematical Sciences*, **255**:5 (2021), 640–652.

[2] A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman&Hall / CRC Press, Boca Raton–London–New York, 2004.

[3] Т. Д. Асылбеков, М. К. Чамашев, “Коэффициентная обратная задача для линейного уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Известия Томского политехнического университета*, **317**:2 (2010), 22–25. [T. D. Asylbekov, M. K Chamashev, “Coefficient inverse problem for a linear partial differential equation of the fourth order”, *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, **317**:2 (2010), 22–25 (In Russian)].

[4] N. H. Ibragimov, "A new Conversation laws theorem", *Journal of Mathematical Analysis*, **333**:1 (2007), 311–328.

[5] И. В. Рахмелевич, "О решениях многомерного дифференциального уравнения произвольного порядка со смешанной старшей частной производной и степенными нелинейностями", *Владикавсказский математический журнал*, **18**:4 (2016), 41–49. [I. V. Rahmelevich, "On solutions of a multidimensional differential equation of arbitrary order with mixed highest partial derivative and power nonlinearities", *Vladikavkaz Mathematical Journal*, **18**:4 (2016), 41–49 (In Russian)].

[6] Я. А. Афанасова, "Мультиномиальное тождество и его приложения", *Классические и прикладные аспекты преемственной математической подготовки в ВУЗе: исторический и современный взгляд молодых ученых и соискателей высшего образования*, Материалы Всеукраинской научно-практической конференции (Харьков, 2021), Тезисы докладов, 2021, 194–197. [Ya. A. Afanasova, "Multinomial identity and its applications", *Classical and Applied Aspects of Successive Mathematical Training at the University: Historical and Modern View of Young Scientists and Applicants for Higher Education*, Materials of the All-Ukrainian Scientific and Practical Conference (Kharkiv, 2021), Abstracts, 2021, 194–197 (In Russian)].

[7] В. И. Усков, "Решение задачи для системы уравнений в частных производных третьего порядка", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 68–76. [V. I. Uskov, "Solution of a problem for a system of third order partial differential equations", *Russian University Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 68–76 (In Russian)].

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Поступила в редакцию 17.02.2022 г.
Поступила после рецензирования 26.05.2022 г.
Принята к публикации 09.06.2022 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematics Department. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Received 17.02.2022
Reviewed 26.05.2022
Accepted for press 09.06.2022

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 137 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-183-197
УДК 517.1

О резольвенте комплексного оператора

Василий Ильич ФОМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Построена нормированная алгебра ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в комплексном нормированном пространстве, состоящем из элементов декартова квадрата вещественного банахова пространства. В этой алгебре выделено множество тех операторов, у каждого из которых действительная и мнимая части коммутируют между собой. Доказана обратимость любого оператора из этого множества, у которого сумма квадратов его действительной и мнимой частей является непрерывно обратимым оператором; найдена формула для обратного оператора. Для оператора из указанного множества исследован вид его регулярных точек: найдены условия на комплексное число, при выполнении которых это число является регулярной точкой данного оператора; получена формула для резольвенты комплексного оператора. Рассмотрено множество неограниченных линейных комплексных операторов, действующих в вышеупомянутом комплексном нормированном пространстве. В этом множестве выделено подмножество тех операторов, у каждого из которых области определения действительной и мнимой частей совпадают между собой. Для оператора из указанного подмножества найдены условия на комплексное число, при которых это число принадлежит резольвентному множеству данного оператора; получена формула для резольвенты оператора. Введено понятие полуограниченного комплексного оператора как оператора, у которого одна компонента является ограниченным, а другая неограниченным оператором. Отмечено, что первое и второе резольвентные тождества для комплексных операторов доказываются аналогично случаю действительных операторов.

Ключевые слова: банахово пространство, комплексный вектор, норма комплексного вектора, комплексный оператор, регулярная точка комплексного оператора, резольвентное множество, резольвента

Для цитирования: *Фомин В.И.* О резольвенте комплексного оператора // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 183–197. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-183-197.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-183-197

About a complex operator resolvent

Vasiliy I. FOMIN
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. A normed algebra of bounded linear complex operators acting in a complex normed space consisting of elements of the Cartesian square of a real Banach space is constructed. In this algebra, it is singled out a set of operators for each of which the real and imaginary parts commute with each other. It is proved that in this set, any operator for which the sum of squares of its real and imaginary parts is a continuously invertible operator, is invertible itself; a formula for the inverse operator is found. For an operator from the indicated set, the form of its regular points is investigated: conditions under which a complex number is a regular point of the given operator are found; a formula for the resolvent of a complex operator is obtained. The set of unbounded linear complex operators acting in the above complex normed space is considered. In this set, a subset of those operators for each of which the domains of the real and imaginary parts coincide is distinguished. For an operator from the specified subset, conditions on a complex number under which this number belongs to the resolvent set of the given operator are found; a formula for the resolvent of the operator is obtained. The concept of a semi-bounded complex operator as an operator in which one component is a bounded and the other is an unbounded operator is introduced. It is noted that the first and second resolvent identities for complex operators can be proved similarly to the case of real operators.

Keywords: Banach space, complex vector, complex vector norm, complex operator, complex operator regular point, resolvent set, resolvent

Mathematics Subject Classification: 47B91, 47A10.

For citation: Fomin V.I. O rezol'vente kompleksnogo operatora [About a complex operator resolvent]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 183–197. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-183-197. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E; $L(E)$ — полная нормированная алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $E^2_{\mathbb{R}} = \{w = (x, y) : x, y \in E\}$ — банахово пространство комплексных векторов над полем вещественных чисел с линейными операциями

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{0.1}$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \tag{0.2}$$

и нормой

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \tag{0.3}$$

(см. [1, с. 103]).

Пусть $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(E^2_{\mathbb{R}}) = \{Z = (A, B) : A, B \in L(E)\}$ — множество комплексных операторов, действующих в пространстве $E^2_{\mathbb{R}}$ по следующему закону:

$$Zw = (A, B)(x, y) = (Ax - By, Ay + Bx) \tag{0.4}$$

для любого элемента $w = (x, y) \in E^2_{\mathbb{R}}$.

З а м е ч а н и е 0.1. Закон действия (0.4) комплексного оператора (A, B) на комплексный вектор (x, y) отличается от закона $(A, B)(x, y) = (Ax, By)$ для комплексного оператора из [2, с. 64] тем, что при формировании каждой из компонент образа комплексного вектора (x, y) задействованы обе компоненты как комплексного оператора (A, B), так и комплексного вектора (x, y).

Каждый оператор $Z = (A, B) \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(E^2_{\mathbb{R}})$ линеен.

Действительно, по определению линейного оператора нужно показать, что оператор Z аддитивен и однороден. Используя аддитивность операторов A, B, получаем для любых $w_1 = (x_1, y_1)$, $w_2 = (x_2, y_2) \in E^2_{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} Z(w_1 + w_2) &= (A(x_1 + x_2) - B(y_1 + y_2), A(y_1 + y_2) + B(x_1 + x_2)) \\ &= (Ax_1 + Ax_2 - By_1 - By_2, Ay_1 + Ay_2 + Bx_1 + Bx_2) \\ &= (Ax_1 - By_1, Ay_1 + Bx_1) + (Ax_2 - By_2, Ay_2 + Bx_2) = Zw_1 + Zw_2. \end{aligned}$$

Свойство аддитивности доказано. В силу однородности операторов A, B имеем для любых $w = (x, y) \in E^2_{\mathbb{R}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Z(\alpha w) = (A(\alpha x) - B(\alpha y), A(\alpha y) + B(\alpha x)) &= (\alpha Ax - \alpha By, \alpha Ay + \alpha Bx) \\ &= \alpha (Ax - By, Ay + Bx) = \alpha Zw. \end{aligned}$$

Свойство однородности установлено.

Каждый оператор $Z = (A, B) \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(E^2_{\mathbb{R}})$ ограничен.

Действительно, по определению ограниченного оператора нужно доказать существование такой постоянной c, что

$$\|Zw\| \leqslant c\,\|w\|, \quad \forall w \in E^2_{\mathbb{R}}. \tag{0.5}$$

Используя норму (0.3) пространства $E^2_{\mathbb{R}}$, неравенство треугольника для нормы пространства E и оценку

$$\|Fx\| \leqslant \|F\|\|x\| \ \ \forall F \in L(E),\, x \in E,$$

для любого $w = (x, y) \in E^2_{\mathbb{R}}$ получаем

$$\begin{aligned}\|Zw\| = \|Ax - By\| + \|Ay + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|By\| + \|Ay\| + \|Bx\| \\ \leqslant \|A\|\,\|x\| + \|B\|\,\|y\| + \|A\|\,\|y\| + \|B\|\,\|x\| = (\|A\| + \|B\|)\,(\|x\| + \|y\|) \\ = (\|A\| + \|B\|)\,\|w\|\,.\end{aligned}$$

Получено неравенство (0.5) с постоянной $c = \|A\| + \|B\|$.

По определению нормы оператора

$$\|Z\| = \inf\{c : \text{выполняется } (0.5)\}\,, \tag{0.6}$$

следовательно,

$$\|Z\| \leqslant \|A\| + \|B\|\,. \tag{0.7}$$

Множество $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$, снабжённое линейными операциями

$$(A_1, B_1) + (A_2, B_2) = (A_1 + A_2, B_1 + B_2), \tag{0.8}$$

$$\alpha(A, B) = (\alpha A, \alpha B), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{0.9}$$

является вещественным линейным пространством.

Норма (0.6) в пространстве $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$, очевидно, удовлетворяет аксиомам нормы:

I) $\|(A, B)\| > 0$ для любого $(A, B) \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$, $(A, B) \neq \Theta$; $\|\Theta\| = 0$, где $\Theta = (O, O)$ — нулевой элемент пространства $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$;

II) $\|\alpha\,(A, B)\| = |\alpha|\,\|(A, B)\|$ для любых $(A, B) \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

III) $\|(A_1, B_1) + (A_2, B_2)\| \leqslant \|(A_1, B_1)\| + \|(A_2, B_2)\|$ для любых (A_1, B_1), (A_2, B_2), принадлежащих $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$.

Таким образом, $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$ является нормированным пространством.

Операция умножения элементов пространства $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$ вводится естественным образом. Пусть $Z_1 = (A_1, B_1)$, $Z_2 = (A_2, B_2) \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)$. По определению, $Z_1 Z_2 : E^2_{\mathbb{R}} \to E^2_{\mathbb{R}}$ — оператор, действующий по правилу $(Z_1 Z_2)\,w = Z_1\,(Z_2 w)$ для любого $w = (x, y) \in E^2_{\mathbb{R}}$. Согласно формуле (0.4) имеем $Z_2 w = (A_2 x - B_2 y, A_2 y + B_2 x)$, поэтому

$$\begin{aligned}(Z_1 Z_2)\,w = Z_1\,(Z_2 w) \\ = ((A_1 A_2 - B_1 B_2)x - (A_1 B_2 + B_1 A_2)y, (A_1 A_2 - B_1 B_2)y + (A_1 B_2 + B_1 A_2)x)\,,\end{aligned}$$

т. е.

$$Z_1 Z_2 = (A_1, B_1)(A_2, B_2) = (A_1 A_2 - B_1 B_2, A_1 B_2 + B_1 A_2). \tag{0.10}$$

Операция умножения комплексных операторов некоммутативна, что следует из некоммутативности операции умножения в алгебре $L(E)$.

Для элемента $\hat{I} = (I, O) \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(E^2_{\mathbb{R}})$ имеем $\hat{I} Z = Z \hat{I} = Z$. Заметим, что $\|\hat{I}\| = 1$.

Для любых $Z_1, Z_2 \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(E^2_{\mathbb{R}})$ справедливо неравенство

$$\|Z_1 Z_2\| \leqslant \|Z_1\|\|Z_2\|. \tag{0.11}$$

Действительно, для любого $w \in E^2_{\mathbb{R}}$

$$\|(Z_1 Z_2)w\| = \|Z_1(Z_2 w)\| \leqslant \|Z_1\| \, \|Z_2 w\| \leqslant \|Z_1\| \, \|Z_2\| \, \|w\|,$$

откуда следует неравенство (0.11)

Непосредственно проверяется, что для любых $Z_1, Z_2, Z_3 \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(E^2_{\mathbb{R}})$ справедливы равенства

$$(Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3), \tag{0.12}$$

$$Z_1 (Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3, \tag{0.13}$$

$$(Z_2 + Z_3) Z_1 = Z_2 Z_1 + Z_3 Z_1. \tag{0.14}$$

Кроме того, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha (Z_1 Z_2) = (\alpha Z_1) Z_2 = Z_1 (\alpha Z_2).$$

Таким образом, множество $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(E^2_{\mathbb{R}})$, снабжённое линейными операциями (0.8), (0.9), операцией умножения (0.10), есть нормированная алгебра ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в вещественном банаховом пространстве $E^2_{\mathbb{R}}$ по закону (0.4). Эта алгебра некоммутативна. Единицей в ней является оператор $\hat{I} = (I, O)$.

Алгебра $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}(E^2_{\mathbb{R}})$ оказалась полезным инструментом при построении общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в пространстве E в случае, когда среди корней характеристического операторного уравнения имеются комплексные корни с мнимой частью, отличной от нуля (см. [3, 4]). В связи с этим актуальна задача дальнейшего изучения комплексных операторов. В частности, естественный интерес представляют вопросы, связанные с резольвентой комплексного оператора. Исследование таких вопросов требует рассмотрения комплексных операторов, действующих в нормированном пространстве $E^2_{\mathbb{C}} = \{w = (x, y) : x, y \in E\}$ комплексных векторов над полем комплексных чисел с операцией сложения (0.1), операцией умножения

$$(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x) \tag{0.15}$$

и нормой

$$\|(x, y)\| = \max_{\psi} \|x \cos\psi + y \sin\psi\| \tag{0.16}$$

(операция умножения (0.15) и норма (0.16) рассмотрены в [5, с. 476]).

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\alpha(x, y) = (\alpha + i0)(x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

т. е. для вещественных чисел операция умножения (0.15) совпадает с операцией (0.2).

Заметим, что норма вида (0.3) пространства $E^2_{\mathbb{R}}$ непригодна для пространства $E^2_{\mathbb{C}}$, так как не выполняется аксиома однородности нормы.

1. Основные понятия

Построим нормированную алгебру ограниченных линейных комплексных операторов над полем комплексных чисел. Для этого понадобится декартов квадрат

$$L^2(E) = L(E) \times L(E) = \{Z = (A, B) : A, B \in L(E)\}$$

алгебры $L(E)$. Будем рассматривать каждый элемент множества $L^2(E)$ как комплексный оператор, действующий в пространстве $E^2_{\mathbb{C}}$ по закону (0.4). Операция сложения элементов множества $L^2(E)$ определяется равенством (0.8); операция умножения на комплексные числа вводится по аналогии с формулой (0.15): для любых $(A, B) \in L^2(E)$, $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$

$$(\alpha + i\beta)\,(A, B) = (\alpha A - \beta B, \alpha B + \beta A)\,, \tag{1.1}$$

в частности, для любых $(A, B) \in L^2(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\,(A, B) = (\alpha + i0)(A, B) = (\alpha A, \alpha B),$$

т. е. для вещественных чисел операция умножения (1.1) совпадает с операцией (0.9).

Проверим выполнимость аксиом линейного пространства, относящихся к операции умножения (1.1):

1) $(\alpha_1 + i\beta_1)\,[(\alpha_2 + i\beta_2)\,(A, B)] = [(\alpha_1 + i\beta_1)\,(\alpha_2 + i\beta_2)]\,(A, B)\,;$
2) $1 \cdot (A, B) = (A, B)\,;$
3) $[(\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_2 + i\beta_2)]\,(A, B) = (\alpha_1 + i\beta_1)\,(A, B) + (\alpha_2 + i\beta_2)\,(A, B)\,;$
4) $(\alpha + i\beta)\,[(A_1, B_1) + (A_2, B_2)] = (\alpha + i\beta)\,(A_1, B_1) + (\alpha + i\beta)\,(A_2, B_2)\,.$

Выполнимость аксиомы 2) очевидна. Проверим выполнимость аксиомы 1). Используя формулу (1.1), получаем

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + i\beta_1)\,[(\alpha_2 + i\beta_2)\,(A, B)] &= (\alpha_1 + i\beta_1)\,(\alpha_2 A - \beta_2 B, \alpha_2 B + \beta_2 A)\\ &= (\alpha_1\,(\alpha_2 A - \beta_2 B) - \beta_1\,(\alpha_2 B + \beta_2 A)\,, \alpha_1\,(\alpha_2 B + \beta_2 A) + \beta_1\,(\alpha_2 A - \beta_2 B))\\ &= ((\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)\,A - (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\,B, (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)\,B + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\,A)\,;\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}[(\alpha_1 + i\beta_1)\,(\alpha_2 + i\beta_2)]\,(A, B) &= [\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + i\,(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)]\,(A, B)\\ &= ((\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)\,A - (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\,B, (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)\,B + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\,A)\,.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Из равенств (1.2), (1.3) следует выполнимость аксиомы 1). Выполнимость аксиом 3), 4) проверяется аналогично.

Множество $L^2(E)$ с линейными операциями (0.8), (1.1) является линейным пространством комплексных операторов, действующих из $E^2_{\mathbb{C}}$ в $E^2_{\mathbb{C}}$, рассматриваемым над полем комплексных чисел. Обозначим это пространство через $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}\,(E^2_{\mathbb{C}})$.

Каждый оператор $Z = (A, B) \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}\,(E^2_{\mathbb{C}})$ линеен.

Действительно, аддитивность оператора Z устанавливается точно так же, как в случае оператора из алгебры $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\,(E^2_{\mathbb{R}})$ (см. Введение). Покажем, что оператор Z однороден, т. е.

$$Z(\lambda w) = \lambda Z w \tag{1.4}$$

для любых $w = (x, y) \in E^2_{\mathbb{C}}$, $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Используя формулы (0.4), (0.15), получаем

$$\begin{aligned}Z(\lambda w) &= (A, B)\,(\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)\\ &= (A\,(\alpha x - \beta y) - B\,(\alpha y + \beta x)\,, A\,(\alpha y + \beta x) + B\,(\alpha x - \beta y))\,;\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}\lambda Z w &= (\alpha + i\beta)\,(Ax - By, Ay + Bx)\\ &= (\alpha\,(Ax - By) - \beta\,(Ay + Bx)\,, \alpha\,(Ay + Bx) + \beta\,(Ax - By))\\ &= (A\,(\alpha x - \beta y) - B\,(\alpha y + \beta x)\,, A\,(\alpha y + \beta x) + B\,(\alpha x - \beta y))\,.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Из соотношений (1.5), (1.6) следует равенство (1.4).

Для нормы оператора $Z = (A, B) \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$ справедлива оценка (0.7).

Действительно, используя соотношения (0.4), (0.16), для любого $w = (x, y) \in E^2_{\mathbb{C}}$ получаем

$$\begin{aligned}
\|Zw\| &= \max_{\psi}\|(Ax - By)\cos\psi + (Ay + Bx)\sin\psi\| \\
&= \max_{\psi}\|A\,(x\cos\psi + y\sin\psi) + B\,(x\sin\psi - y\cos\psi)\| \\
&\leqslant \max_{\psi}[\|A\,(x\cos\psi + y\sin\psi)\| + \|B\,(x\sin\psi - y\cos\psi)\|] \\
&\leqslant \max_{\psi}[\|A\|\|x\cos\psi + y\sin\psi\| + \|B\|\|x\sin\psi - y\cos\psi\|] \\
&\leqslant \|A\|\max_{\psi}\|x\cos\psi + y\sin\psi\| + \|B\|\max_{\chi=\psi-\frac{\pi}{2}}\|x\cos\chi + y\sin\chi\| \\
&= \|A\|\|w\| + \|B\|\|w\| = (\|A\| + \|B\|)\,\|w\|.
\end{aligned}$$

Получили неравенство

$$\|Zw\| \leqslant c\|w\|, \quad \forall w \in E^2_{\mathbb{C}}$$

с постоянной $c = \|A\| + \|B\|$, из которого для оператора $Z = (A, B) \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$ следует оценка (0.7).

Произведение операторов из $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$ определяется формулой (0.10). Для любых операторов $Z_1, Z_2, Z_3 \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$ справедливы соотношения (0.11)–(0.14). Кроме того, для любого $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$

$$\lambda\,(Z_1 Z_2) = (\lambda Z_1)\,Z_2 = Z_1\,(\lambda Z_2)\,.$$

Таким образом, $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$ есть нормированная алгебра ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в пространстве $E^2_{\mathbb{C}}$ по закону (0.4). Эта алгебра некоммутативна. Единицей в ней является оператор $\hat{I} = (I, O)$.

В дальнейшем важное значение будет иметь множество тех операторов из $L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$, у каждого из которых действительная и мнимая части коммутируют между собой, т. е. множество вида

$$L^{KO\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}\left(E^2_{\mathbb{C}}\right) = \left\{Z = (A, B) \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}\left(E^2_{\mathbb{C}}\right) : AB = BA\right\}.$$

2. Основные результаты

Пусть $\Phi(E)$ — множество линейных операторов, действующих в пространстве E. Заметим, что $\Phi(E) = L(E) \cup N(E)$, где $N(E)$ — множество неограниченных линейных операторов, действующих в пространстве E.

Рассмотрим над полем комплексных чисел множество комплексных операторов

$$\Phi^{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}\left(E^2_{\mathbb{C}}\right) = \{Z = (A, B) : A, B \in \Phi(E)\},$$

действующих в пространстве $E^2_{\mathbb{C}}$ по закону (0.4):

$$Zw = (A, B)(x, y) = (Ax - By, Ay + Bx). \tag{2.1}$$

для любых $Z = (A, B) \in \Phi^{\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$, $w = (x, y) \in D(Z)$.

Заметим, что

$$D(Z) = \left\{w = (x, y) \in E^2_{\mathbb{C}} : x, y \in D(A) \cap D(B)\right\}.$$

Напомним (см. [6, 7]), что операция сложения элементов множества $\Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)$ определяется формулой (0.8). Операция умножения на комплексные числа задаётся равенством (1.1).

Каждый комплексный оператор $Z = (A, B) \in \Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)$ линеен (это следует из линейности операторов A, B).

Справедливо представление:

$$\Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right) = L_{\mathbb{C}}^{O\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right) \cup L_{\mathbb{C}}^{N\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right) \cup L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right),$$

где

$$L_{\mathbb{C}}^{N\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right) = \left\{Z = (A, B) \in \Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right) : A, B \in N(E)\right\}, \tag{2.2}$$

$$L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right) = L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{C}\mathrm{I}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right) \cup L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{C}\mathrm{II}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right), \tag{2.3}$$

$$L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{C}\mathrm{I}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right) = \left\{Z = (A, B) \in \Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right) : A \in N(E), B \in L(E)\right\},$$
$$L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{C}\mathrm{II}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right) = \left\{Z = (A, B) \in \Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right) : A \in L(E), B \in N(E)\right\}.$$

Заметим, что

$$D(Z) = E_{\mathbb{C}}^2 \quad \text{для} \quad Z \in L_{\mathbb{C}}^{O\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right),$$
$$D(Z) = \left\{(x, y) \in E_{\mathbb{C}}^2 : x, y \in D(A) \cap D(B)\right\} \quad \text{для} \quad Z \in L_{\mathbb{C}}^{N\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right),$$
$$D(Z) = \left\{(x, y) \in E_{\mathbb{C}}^2 : x, y \in D(A)\right\} \quad \text{для} \quad Z \in L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{C}\mathrm{I}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right),$$
$$D(Z) = \left\{(x, y) \in E_{\mathbb{C}}^2 : x, y \in D(B)\right\} \quad \text{для} \quad Z \in L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{C}\mathrm{II}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right).$$

Операторы из множеств (2.2), (2.3) называются соответственно неограниченными и полуограниченными комплексными операторами.

Пусть $Z = (A, B) \in \Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)$, $\overline{D(Z)} = E_{\mathbb{C}}^2$, Z фиксирован. Напомним, что тождественным оператором в пространстве $E_{\mathbb{C}}^2$ является оператор $\hat{I} = (I, O)$. Рассмотрим резольвентное множество и резольвенту оператора Z:

$$\rho(Z) = \left\{\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} : \exists \Gamma_Z^{-1}(\lambda) \in L_{\mathbb{C}}^{O\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right)\right\},$$

$$R_Z(\lambda) = \Gamma_Z^{-1}(\lambda), \quad \lambda \in \rho(Z), \tag{2.4}$$

где $\Gamma_Z(\lambda) = Z - \lambda\hat{I}$, $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) = [\Gamma_Z(\lambda)]^{-1}$.

Заметим, что $D(\Gamma_Z(\lambda)) = D(Z)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Получим условия, при выполнении которых

1) $R(\Gamma_Z(\lambda)) = E_{\mathbb{C}}^2$ и существует $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) : E_{\mathbb{C}}^2 \to D(Z)$, т. е. уравнение

$$\Gamma_Z(\lambda)(x, y) = (u, v), \tag{2.5}$$

рассматриваемое при $(x, y) \in D(Z)$, однозначно разрешимо при любом фиксированном элементе $(u, v) \in E_{\mathbb{C}}^2$;

2) $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) \in L_{\mathbb{C}}^{O\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)$.

Тем самым будет найдена резольвента оператора Z (см. формулу (2.4)).

Заметим, что

$$\Gamma_Z(\lambda) = (\Gamma_A(\alpha), \Gamma_B(\beta)), \tag{2.6}$$

где $\Gamma_A(\alpha) = A - \alpha I$, $\Gamma_B(\beta) = B - \beta I$ (очевидно, что $D(\Gamma_A(\alpha)) = D(A)$, $D(\Gamma_B(\beta)) = D(B)$). Тогда по формуле (2.1)

$$\Gamma_Z(\lambda)(x,y) = (\Gamma_A(\alpha)x - \Gamma_B(\beta)y, \Gamma_A(\alpha)y + \Gamma_B(\beta)x).$$

Следовательно, однозначная разрешимость уравнения (2.5) равносильна однозначной разрешимости системы уравнений

$$\Gamma_A(\alpha)x - \Gamma_B(\beta)y = u, \tag{2.7}$$

$$\Gamma_B(\beta)x + \Gamma_A(\alpha)y = v, \tag{2.8}$$

рассматриваемой при $x, y \in D(A) \cap D(B)$.

Найдем вначале вид резольвенты комплексного оператора из множества $L_{\mathbb{C}}^{KO\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)$.

Положим $GL(E) = \{T \in L(E) : \text{существует } T^{-1} \in L(E)\}$.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение:

I) *если* $T_1 \in L(E)$, $T_2 \in GL(E)$ *и* $T_1T_2 = T_2T_1$, *то* $T_1T_2^{-1} = T_2^{-1}T_1$ (см. [8, с. 55]).

Лемма 2.1. *Пусть* $Z = (P, Q) \in L_{\mathbb{C}}^{KO\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)$ *и выполняется условие* $P^2 + Q^2 \in GL(E)$. *Тогда существует обратный оператор* Z^{-1} *и справедлива формула*

$$Z^{-1} = \left(P\left(P^2+Q^2\right)^{-1}, -Q\left(P^2+Q^2\right)^{-1}\right).$$

Доказательство леммы 2.1 аналогично случаю $Z = (P, Q) \in L_{\mathbb{R}}^{KO\mathbb{C}}(E_{\mathbb{R}}^2)$ (см. [6]), при этом используется утверждение I).

Теорема 2.1. *Пусть* $Z = (A, B) \in L_{\mathbb{C}}^{KO\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)$, Z *фиксирован, а комплексное число* $\lambda = \alpha + i\beta$ *таково, что*

$$F \in GL(E), \tag{2.9}$$

где $F = \Gamma_A^2(\alpha) + \Gamma_B^2(\beta)$, $\Gamma_A^2(\alpha) = [\Gamma_A(\alpha)]^2$, $\Gamma_B^2(\beta) = [\Gamma_B(\beta)]^2$. *Тогда* λ *является регулярной точкой оператора* Z *и*

$$R_Z(\lambda) = \left(\Gamma_A(\alpha)F^{-1}, -\Gamma_B(\beta)F^{-1}\right), \tag{2.10}$$

$$R_Z(\lambda) \in L_{\mathbb{C}}^{KO\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right). \tag{2.11}$$

Доказательство. Операторный определитель системы уравнений (2.7), (2.8) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Gamma_A(\alpha) & -\Gamma_B(\beta) \\ \Gamma_B(\beta) & \Gamma_A(\alpha) \end{vmatrix} = \Gamma_A^2(\alpha) + \Gamma_B^2(\beta) = F.$$

По условию теоремы $AB = BA$, следовательно,

$$\Gamma_A(\alpha)\Gamma_B(\beta) = \Gamma_B(\beta)\Gamma_A(\alpha). \tag{2.12}$$

В силу (2.12) элементы определителя Δ попарно коммутируют между собой. Кроме того, в силу равенства $\Delta = F$ и условия (2.9) существует $\Delta^{-1} \in L(E)$. Следовательно, при решении системы уравнений (2.7), (2.8) можно применить операторно-векторное правило Крамера решения систем линейных векторных уравнений (см. [9]). Согласно этому правилу система уравнений (2.7), (2.8) при каждом $(u, v) \in E_{\mathbb{C}}^2$ имеет единственное решение

$$x = \Gamma_A(\alpha)F^{-1}u + \Gamma_B(\beta)F^{-1}v, \tag{2.13}$$

$$y = -\Gamma_B(\beta)F^{-1}u + \Gamma_A(\alpha)F^{-1}v. \tag{2.14}$$

Это означает, что $R(\Gamma_Z(\lambda)) = E^2_{\mathbb{C}}$ и существует $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) : E^2_{\mathbb{C}} \to E^2_{\mathbb{C}}$. В силу соотношений (2.6), (2.12) справедливо включение $\Gamma_Z(\lambda) \in L^{KO\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$. Тогда, учитывая условие (2.9) и применяя лемму 2.1, получаем

$$\Gamma_Z^{-1}(\lambda) = \left(\Gamma_A(\alpha)F^{-1}, -\Gamma_B(\beta)F^{-1}\right). \tag{2.15}$$

В силу условия (2.9) $F^{-1} \in L(E)$, следовательно, каждый из операторов $\Gamma_A(\alpha)F^{-1}$, $-\Gamma_B(\beta)F^{-1}$ принадлежит алгебре $L(E)$ как произведение двух операторов из $L(E)$. Значит, $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) \in L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$. Следовательно, $\lambda \in \rho(Z)$ и в силу равенств (2.4), (2.15) справедлива формула (2.10). Покажем выполнимость включения (2.11). В силу равенства (2.12)

$$\Gamma_A(\alpha)F = F\Gamma_A(\alpha), \quad \Gamma_B(\beta)F = F\Gamma_B(\beta). \tag{2.16}$$

Заметим, что $\Gamma_A(\alpha), \Gamma_B(\beta) \in L(E)$ и выполняются соотношения (2.9), (2.16). Следовательно, в силу утверждения I)

$$\Gamma_A(\alpha)F^{-1} = F^{-1}\Gamma_A(\alpha), \quad \Gamma_B(\beta)F^{-1} = F^{-1}\Gamma_B(\beta). \tag{2.17}$$

Используя соотношения (2.12), (2.17), получаем

$$\left(\Gamma_A(\alpha)F^{-1}\right)\left(-\Gamma_B(\beta)F^{-1}\right) = \left(-\Gamma_B(\beta)F^{-1}\right)\left(\Gamma_A(\alpha)F^{-1}\right),$$

а это означает, что $R_Z(\lambda) \in L^{KO\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$. □

В силу соотношений (2.17) формулу (2.10) и решение (2.13), (2.14) можно записать в виде

$$R_Z(\lambda) = \left(F^{-1}\Gamma_A(\alpha), -F^{-1}\Gamma_B(\beta)\right),$$
$$x = F^{-1}\left(\Gamma_A(\alpha)u + \Gamma_B(\beta)v\right),$$
$$y = F^{-1}\left(-\Gamma_B(\beta)u + \Gamma_A(\alpha)v\right).$$

Обозначим через $\hat{L}^{N\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$ множество тех операторов из $L^{N\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$, у каждого из которых области определения действительной и мнимой частей совпадают между собой.

Пусть $Z = (A, B) \in \hat{L}^{N\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$. Тогда $D(A) = D(B) = D$, следовательно, $D(A) \cap D(B) = D$ и $D(Z) = \{(x, y) \in E^2_{\mathbb{C}} : x, y \in D\}$. Значит, систему уравнений (2.7), (2.8) надо рассматривать при $x, y \in D$.

Теорема 2.2. *Пусть $Z = (A, B) \in \hat{L}^{N\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}(E^2_{\mathbb{C}})$, $\overline{D(Z)} = E^2_{\mathbb{C}}$, Z фиксирован, а комплексное число $\lambda = \alpha + i\beta$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\exists \Gamma_A^{-1}(\alpha), \Gamma_B^{-1}(\beta) \in L(E); \tag{2.18}$$

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)p = \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)p, p \in E; \tag{2.19}$$

$$\exists H^{-1} \in L(E), \tag{2.20}$$

где $H = \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha) + \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)$. Тогда λ является регулярной точкой оператора Z и

$$R_Z(\lambda) = \left(H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta), -H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)\right), \tag{2.21}$$

$$R_Z(\lambda) \in L^{KO\mathbb{C}}_{\mathbb{C}}\left(E^2_{\mathbb{C}}\right). \tag{2.22}$$

Укажем вначале несколько соотношений, которые потребуются при доказательстве теоремы 2.2.

Лемма 2.2. *При выполнении условий теоремы 2.2 справедливы равенства*

$$\Gamma_A(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)q, \quad q \in D; \tag{2.23}$$

$$\Gamma_B(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)q, \quad q \in D; \tag{2.24}$$

$$H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)p = \Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}p, \quad p \in E; \tag{2.25}$$

$$H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)p = \Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}p, \quad p \in E. \tag{2.26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в силу условия (2.18)

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)p \in D, \quad p \in E; \tag{2.27}$$

$$\Gamma_B^{-1}(\beta)p \in D, \quad p \in E; \tag{2.28}$$

$$\Gamma_A(\alpha)\Gamma_A^{-1}(\alpha)p = p, \quad p \in E; \tag{2.29}$$

$$\Gamma_B(\beta)\Gamma_B^{-1}(\beta)p = p, \quad p \in E; \tag{2.30}$$

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_A(\alpha)q = q, \quad q \in D; \tag{2.31}$$

$$\Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_B(\beta)q = q, \quad q \in D. \tag{2.32}$$

Пусть $q \in D$, q фиксирован. Тогда, в силу условия (2.18)

$$\exists p_1 \in E : q = \Gamma_A^{-1}(\alpha)p_1; \tag{2.33}$$

$$\exists p_2 \in E : q = \Gamma_B^{-1}(\beta)p_2. \tag{2.34}$$

Используя соотношения (2.19), (2.29), (2.33) и равенство $p_1 = \Gamma_A(\alpha)q$, получаем

$$\Gamma_A(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)q = \Gamma_A(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)p_1 = \Gamma_A(\alpha)\Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)p_1 = \Gamma_B^{-1}(\beta)p_1 = \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)q.$$

Равенство (2.23) доказано.

Учитывая соотношения (2.19), (2.30), (2.34) и равенство $p_2 = \Gamma_B(\beta)q$, имеем

$$\Gamma_B(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_B(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)p_2 = \Gamma_B(\beta)\Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)p_2 = \Gamma_A^{-1}(\alpha)p_2 = \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)q.$$

Равенство (2.24) доказано.

Покажем справедливость равенств (2.25), (2.26). Заметим, что $D(H) = D$ и

$$HH^{-1}p = p, \quad p \in E; \tag{2.35}$$

$$H^{-1}Hq = q, \quad q \in D. \tag{2.36}$$

Убедимся вначале, что

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)Hq = H\Gamma_A^{-1}(\alpha)q, q \in D. \tag{2.37}$$

Заметим, что в силу включений (2.27), (2.28)

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)q \in D, q \in D; \tag{2.38}$$

$$\Gamma_B^{-1}(\beta)q \in D, q \in D. \tag{2.39}$$

Пусть $q \in D$, q фиксирован. Используя соотношения (2.23), (2.31), (2.39), получаем

$$\begin{aligned}\Gamma_A^{-1}(\alpha)Hq &= \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)q + \left[\Gamma_A^{-1}(\alpha)\right]^2\Gamma_B(\beta)q \\ &= \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_A(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)q + \left[\Gamma_A^{-1}(\alpha)\right]^2\Gamma_B(\beta)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)q + \left[\Gamma_A^{-1}(\alpha)\right]^2\Gamma_B(\beta)q.\end{aligned}$$

Итак,

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)Hq = \Gamma_B^{-1}(\beta)q + \left[\Gamma_A^{-1}(\alpha)\right]^2\Gamma_B(\beta)q. \tag{2.40}$$

Далее, используя соотношения (2.24), (2.29), имеем

$$H\Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)\Gamma_A^{-1}(\alpha)q + \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)q + \left[\Gamma_A^{-1}(\alpha)\right]^2\Gamma_B(\beta)q.$$

Получили равенство

$$H\Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)q + \left[\Gamma_A^{-1}(\alpha)\right]^2\Gamma_B(\beta)q. \tag{2.41}$$

Из соотношений (2.40), (2.41) следует равенство (2.37).

Пусть $p \in E$, p фиксирован. Тогда, в силу условия (2.20)

$$\exists q \in D : p = Hq. \tag{2.42}$$

Используя соотношения (2.36)–(2.38), (2.42) и равенство

$$q = H^{-1}p, \tag{2.43}$$

получаем

$$H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)p = H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)Hq = H^{-1}H\Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}p.$$

Равенство (2.25) доказано. □

Аналогично формуле (2.37) получаем равенство

$$\Gamma_B^{-1}(\beta)Hq = H\Gamma_B^{-1}(\beta)q, q \in D. \tag{2.44}$$

Используя соотношения (2.36), (2.39), (2.42)–(2.44), получаем

$$H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)p = H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)Hq = H^{-1}H\Gamma_B^{-1}(\beta)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}p.$$

Равенство (2.26) также доказано. □

Доказательство теоремы 2.2. Применяя к обеим частям уравнения (2.7) оператор $\Gamma_B^{-1}(\beta)$, а уравнения (2.8) оператор $\Gamma_A^{-1}(\alpha)$ и используя соотношения (2.31), (2.32), получаем

$$\Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)x - y = \Gamma_B^{-1}(\beta)u, \tag{2.45}$$

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)x + y = \Gamma_A^{-1}(\alpha)v. \tag{2.46}$$

Суммируя соотношения (2.45), (2.46), имеем $Hx = \Gamma_B^{-1}(\beta)u + \Gamma_A^{-1}(\alpha)v$, следовательно, в силу условия (2.20)

$$x = H^{-1}\left(\Gamma_B^{-1}(\beta)u + \Gamma_A^{-1}(\alpha)v\right). \tag{2.47}$$

Применяя к обеим частям уравнения (2.7) оператор $\Gamma_A^{-1}(\alpha)$, а уравнения (2.8) оператор $\Gamma_B^{-1}(\beta)$, получаем

$$x - \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)y = \Gamma_A^{-1}(\alpha)u, \tag{2.48}$$

$$x + \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)y = \Gamma_B^{-1}(\beta)v. \tag{2.49}$$

Вычитая из соотношения (2.49) соотношение (2.48), имеем $Hy = \Gamma_B^{-1}(\beta)v - \Gamma_A^{-1}(\alpha)u$, следовательно,

$$y = H^{-1}\left(-\Gamma_A^{-1}(\alpha)u + \Gamma_B^{-1}(\beta)v\right). \tag{2.50}$$

В силу равенства $D(H) = D$ элементы x, y, определяемые соответственно формулами (2.47), (2.50), принадлежат множеству D, т. е. $(x, y) \in D(Z)$. Решение (2.47), (2.50) найдено на основе систем уравнений (2.45), (2.46); (2.48), (2.49), полученных из системы уравнений (2.7), (2.8) применением к её уравнениям ограниченных линейных операторов $\Gamma_A^{-1}(\alpha)$, $\Gamma_B^{-1}(\beta)$. Поэтому необходимо проверить, не является ли это решение посторонним для исходной системы уравнений (2.7), (2.8). Проведем такую проверку подстановкой элементов (2.47), (2.50) в уравнения (2.7), (2.8). Учитывая соотношения (2.23)–(2.26), (2.29), (2.30), а также включения $H^{-1}u$, $H^{-1}v \in D$, получаем

$$\begin{aligned}\Gamma_A(\alpha)x &= \Gamma_A(\alpha)H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)u + \Gamma_A(\alpha)H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)v\\ &= \Gamma_A(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}u + \Gamma_A(\alpha)\Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}v = \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)H^{-1}u + H^{-1}v;\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_B(\beta)y &= -\Gamma_B(\beta)H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)u + \Gamma_B(\beta)H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)v\\ &= -\Gamma_B(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}u + \Gamma_B(\beta)\Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}v = -\Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)H^{-1}u + H^{-1}v.\end{aligned} \tag{2.52}$$

В силу (2.35), (2.51), (2.52)

$$\Gamma_A(\alpha)x - \Gamma_B(\beta)y = HH^{-1}u = u. \tag{2.53}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Gamma_B(\beta)x &= \Gamma_B(\beta)H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)u + \Gamma_B(\beta)H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)v\\ &= \Gamma_B(\beta)\Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}u + \Gamma_B(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}v = H^{-1}u + \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)H^{-1}v;\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_A(\alpha)y &= -\Gamma_A(\alpha)H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)u + \Gamma_A(\alpha)H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)v\\ &= -\Gamma_A(\alpha)\Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}u + \Gamma_A(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}v = -H^{-1}u + \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)H^{-1}v.\end{aligned} \tag{2.55}$$

В силу (2.35), (2.54), (2.55)

$$\Gamma_B(\beta)x + \Gamma_A(\alpha)y = HH^{-1}v = v. \tag{2.56}$$

В силу (2.53), (2.56) элементы (2.47), (2.50) удовлетворяют уравнениям (2.7), (2.8). Показано, что система уравнений (2.7), (2.8) при каждом $(u, v) \in E_{\mathbb{C}}^2$ имеет единственное решение $(x, y) \in D(Z)$, определяемое формулами (2.47), (2.50). Это означает, что $R\left(\Gamma_Z(\lambda)\right) = E_{\mathbb{C}}^2$ и существует $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) : E_{\mathbb{C}}^2 \to D(Z)$. Учитывая равенство $\Gamma_Z^{-1}(\lambda)\left(u, v\right) = \left(x, y\right)$, соотношения (2.1), (2.47), (2.50), получаем

$$\Gamma_Z^{-1}(\lambda) = \left(H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta), -H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)\right). \tag{2.57}$$

В силу условий (2.18), (2.20) каждый из операторов $H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)$, $-H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)$ принадлежит алгебре $L(E)$ как произведение двух операторов из $L(E)$. Значит, $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) \in L_{\mathbb{C}}^{O\mathbb{C}}\left(E_{\mathbb{C}}^2\right)$.

Следовательно, $\lambda \in \rho(Z)$, и в силу (2.4), (2.57) справедлива формула (2.21). Включение (2.22) следует из равенств (2.19), (2.25), (2.26). □

В силу соотношений (2.25), (2.26) формулу (2.21) и решение (2.47), (2.50) можно записать в виде

$$R_Z(\lambda) = \left(\Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}, -\Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}\right),$$

$$x = \Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}u + \Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}v,$$

$$y = -\Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}u + \Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}v.$$

В заключение отметим, что первое резольвентное тождество (тождество Гильберта)

$$R_Z(\lambda) - R_Z(\mu) = (\lambda - \mu)R_Z(\lambda)R_Z(\mu), \quad \lambda, \mu \in \rho(Z);$$

и второе резольвентное тождество

$$R_{Z_2}(\lambda) - R_{Z_1}(\lambda) = R_{Z_2}(\lambda)\,(Z_1 - Z_2)\,R_{Z_1}(\lambda), \quad \lambda \in \rho\,(Z_1) \cap \rho\,(Z_2)\,;$$

для комплексных операторов доказываются аналогично случаю действительных операторов (см., соответственно, [10, с. 293], [11, с. 140]).

References

[1] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Иностранная литература, М., 1962. [N. Dunford, J. Schwartz, *Lineynyye Operatory. Obshchaya Teoriya*, Inostrannaya Literatura, Moscow, 1962 (In Russian)].

[2] *Функциональный анализ*, Справочная математическая библиотека, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972. [*Funktsional'nyy Analiz*, Spravochnaya matematicheskaya biblioteka, ed. S. G. Krein, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

[3] В. И. Фомин, "Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов", *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 211–217. [V. I. Fomin, "About a general solution of a linear homogeneous differential equations in a Banach space in the case of complex characteristic operators", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 211–217 (In Russian)].

[4] В. И. Фомин, "О случае комплексных корней характеристического операторного полинома линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве", *Дифференциальные уравнения*, **56**:8 (2020), 1045–1054; англ. пер.:V. I. Fomin, "On the Case of Complex Roots of the Characteristic Operator Polynomial of a Linear nth-Order Homogeneous Differential Equation in a Banach Space", *Differential Equations*, **56**:8 (2020), 1021–1030.

[5] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977. [L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Funktsional'nyy Analiz*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian)].

[6] В. И. Фомин, "О банаховой алгебре комплексных операторов", *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 813–823. [V. I. Fomin, "On the Banach algebra of complex operators", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 813–823 (In Russian)].

[7] В. И. Фомин, "О неограниченных комплексных операторах", *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 57–67. [V. I. Fomin, "About unbounded complex operators", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 57–67 (In Russian)].

[8] В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева, *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Физматлит, М., 2002. [V. A. Trenogin, B. M. Pisarevskij, T. S. Soboleva, *Zadachi i uprazhneniya po funktsional'nomu analizu*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].

[9] В. И. Фомин, “Операторно-векторное правило Крамера решения систем линейных векторных уравнений в банаховом пространстве”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, **7**:2 (2002), 237–238. [V. I. Fomin, “The Cramer operator vector rulle for the systems of linear vector equations in the Banach space”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **7**:2 (2002), 237–238 (In Russian)].

[10] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967. [K. Yoshida, *Funktsional'nyy Analiz*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

[11] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, Издательство иностранной литературы, М., 1962. [E. Hille, R. Phillips, *Funktsional'nyy Analiz i Polugruppy*, Izdatelstvo Inostrannoy Literaturyi, Moscow, 1962 (In Russian)].

Информация об авторе

Фомин Василий Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Поступила в редакцию 04.02.2022 г.
Поступила после рецензирования 16.05.2022 г.
Принята к публикации 09.06.2022 г.

Information about the author

Vasiliy I. Fomin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Received 04.02.2022
Reviewed 16.05.2022
Accepted for press 09.06.2022

Том 27, № 138 2022

С глубоким прискорбием извещаем о том, что ушел из жизни

Геррит ван Дейк

14.08.1939–16.04.2022

Известный голландский математик, автор важных результатов в гармоническом анализе и теории представлений групп Ли, профессор Лейденского университета. Герит ван Дейк много занимался академической деятельностью, был блестящим лектором, руководил исследованиями аспирантов, четырнадцать его учеников защитили диссертации PhD. Ему удавалось успешно совмещать научную и академическую деятельность с административной работой. Он был научным руководителем Лейденского математического института, деканом факультета естественных наук Лейденского университета, руководителем Института передовых компьютерных наук, руководителем Исследовательского Института имени Томаса Стилтьеса, ученым секретарем Королевского голландского общества наук, одним из основателей Лоренцовского центра в Лейдене и Европейской ассоциации деканов. Герит ван Дейк в течение многих лет сотрудничал с российскими математиками, наиболее плодотворно с Владимиром Федоровичем Молчановым. Герит ван Дейк участвовал в математических конференциях, проводимых в Тамбовском государственном университете имени Г. Р. Державина, был редактором, автором статей, рецензентом, членом редакционной коллегии журнала «Вестник российских университетов. Математика».

Выражаем соболезнования родным и близким Герит ван Дейка, его коллегам и знакомым, всем кому будет очень не хватать этого замечательного человека, ученого, педагога...

Редакция журнала
«Вестник российских университетов. Математика»

Памяти профессора математики Геррита ван Дейка (Gerrit van Dijk)

Настоящая статья своим появлением обязана недавнему печальному событию — уходу из жизни замечательного голландского математика Геррита ван Дейка (14 августа 1939 – 16 апреля 2022).

Он родился в городе Кампене, учился в Утрехтском университете, защитил там диссертацию «Сферические функции на p-адической группе $PGL(2)$», стажировался в течение года в Принстоне (США) под руководством выдающегося математика Хариш–Чандры. Личность последнего и его фундаментальные результаты в области гармонического анализа и теории представлений групп Ли оказали определяющее влияние на ван Дейка и на его дальнешую работу в математике. Затем ван Дейк вернулся в Нидерланды, сначала в Утрехт, затем в 1972 – и окончательно – в Лейден (Лейденский университет).

Здесь он вел энергичную научную и административную работу. Он был назначен лектором и затем (1980) получил должность профессора. Он был деканом факультета (the Faculty of Science), директором Лейденского математического института, директором Лейденского института передовых исследований в информатике (Institute of Advanced Computer Science). Более десяти лет ван Дейк руководил исследовательским математическим институтом – институтом имени Томаса Стильтьеса. Он был одним из основателей Лоренцовского центра в Лейдене и его первым директором. За его большой вклад в математику, научную и общественную деятельность он был удостоин королевой Нидерландов звания Офицера ордена Оранских–Нассау (2004).

Впервые я встретился с Герритом ван Дейком в 1990 на конференции в Геттингене (Германия). Он сразу расположил к себе своей дружелюбной и притягательной манерой общения. У нас нашлись общие интересы в математике. Я часто стал ездить в Лейден (примерно на месяц или на два в год), а он – в Тамбов, а также мы встречались на различных конференциях – как в России (в Тамбове, Москве), так и за рубежом (в Голландии, Германии). Он с удовольствием принял наше предложение войти в редколлегию нашего журнала «Вестник российских университетов. Математика». Несколько его работ были опубликованы в этом журнале.

В результате нашего общения с ван Дейком появилось несколько совместных работ по гармоническому анализу на псевдоримановых симметрических пространствах и по квантованию в духе Березина на таких пространствах. В них были решены важные и существенные задачи. Вот список основных публикаций:

a) The Berezin form on rank one para-Hermitian symmetric spaces // Journal Math. Pures Appl., 1998, vol. 77, No. 8, 747–799;

b) Tensor products of maximal degenerate series representations of the group $SL(n, R)$ // Journal Math. Pures Appl., 1999, vol. 78, No. 1, 99–119;

c) Berezin forms on line bundles over complex hyperbolic spaces // Integral Equations and Operator Theory, 2003, vol. 45, 177–230.

Конечно, наше общение с ван Дейком не ограничивалось математикой. Оно включало велосипедные прогулки по Голландии, купание в море около Лейдена, пешеходные прогулки по лесам около Тамбова, экскурсии в Ивановку и пр.

В университете и в других организациях (институтах) ван Дейк создавал вокруг себя прекрасную благожелательную атмосферу, способствовавшую как индивидуальной научной работе, так и научному общению сотрудников. Я помню, как Миша Певзнер как-то мне сказал, что два года, проведенные им в должности постдока в Лейденском университете, были лучшим временем в его жизни (сейчас Михаил Леонидович Певзнер профессорствует в университете Реймса, Франция).

Г. ван Дейк с большим уважением относился к русским математикам, он высоко ставил уровень нашего тогдашнего математического образования. Помню, как-то он отозвался об одном из претендентов на работу в Лейденском университете в следующих словах: «Он окончил Московский университет и мне этого достаточно!». Часто бывая в нашем университете, он заметил и затем взял к себе в аспирантуру нашего студента Юрия Алексеевича Шаршова. Потом они опубликовали несколько совместных работ. Свою диссертацию Юра защитил успешно.

Г. ван Дейк (справа), В. Ф. Молчанов (слева) после защиты диссертации Ю.А. Шаршовым

Во времена ван Дейка русская диаспора в Лейденском университете была достаточно многочисленной. Я всегда мог попросить наших ребят о помощи в разных ситуациях. С удовольствием вспоминаю дикий футбол на зеленых лужайках рядом с математическим институтом (точно так же, как это бывало около Московского университета).

Я благодарен судьбе, подарившей мне радость дружбы (научной и человеческой) с таким прекрасным математиком, каким был Геррит ван Дейк.

В.Ф. Молчанов

профессор кафедры функционального анализа

Тамбовского государственного университета имени Г.Р.Державина