

ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal



Том 27
№ 137
2022

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический
журнал

Том 27, № 137,
2022

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России (распоряжение от 28 декабря 2018 г. № 90-р) по физико-математическим наукам

Индексируется Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ, Math-Net.Ru, ВИНТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка»

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS	3
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	
<i>А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба</i> Новые свойства рекуррентных движений и предельных множеств динамических систем	5
<i>М.С. Волдеаб, Л.И. Родина</i> О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции	16
<i>В. Мерчела</i> Включения с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием	27
<i>С.И. Митрохин</i> Спектральные свойства дифференциального оператора четного порядка с разрывной весовой функцией	37
<i>М.И. Сумин</i> О некорректных задачах, экстремальных функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа	58
<i>В.Н. Хоанг, В.В. Провоторов</i> Устойчивость трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы в классе суммируемых на сетеподобной области функций	80
<i>А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов</i> Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант	95

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
(ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), доктор, проф. Г. ван Дейк (г. Лейден, Нидерланды), д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. Ф.Л. Перейра (г. Порто, Португалия), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды), член-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф. А.Г. Ченцов (г. Екатеринбург, Российская Федерация)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440

Электронная почта: zukovskys@mail.ru, vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru

Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Редакторы: М.И. Филатова, Н.А. Михайлова
Редакторы английских текстов: В.В. Клочихин, М.А. Сенина
Компьютерное макетирование Т.Ю. Молчановой
Технический редактор Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:

Вестник российских университетов. Математика. – 2022. – Т. 27, № 137. – 124 с. – <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137>

Подписано в печать 15.03.2022. Дата выхода в свет 25.03.2022

Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.

Печ. л. 15,5. Усл. печ. л. 14,5. Тираж 1000 экз. Заказ № 22262. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Материалы журнала доступны по лицензии [Creative Commons Attribution \(«Атрибуция»\) 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) Всемирная



© ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2022

© Журнал «Вестник российских университетов. Математика», 2022

При перепечатке, при цитировании материалов, в том числе в электронных СМИ, ссылка на журнал обязательна.

Ответственность за содержание публикаций несет автор

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical
journal

**Volume 27, no. 137,
2022**

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order from December 28, 2018 no. 90-p)"

Indexed in Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI, Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka"

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>A.P. Afanas'ev, S.M. Dzyuba</i>	New properties of recurrent motions and limit sets of dynamical systems	5
<i>M.S. Woldeab, L.I. Rodina</i>	About the methods of renewable resource extraction from the structured population	16
<i>W. Merchela</i>	Inclusions with mappings acting from a metric space to a space with distance	27
<i>S.I. Mitrokhin</i>	Spectral properties of an even-order differential operator with a discontinuous weight function	37
<i>M.I. Sumin</i>	On ill-posed problems, extremals of the Tikhonov functional and the regularized Lagrange principles	58
<i>V.N. Hoang, V.V. Provotorov</i>	Stability of a three-layer symmetric differential-difference scheme in the class of functions summable on a network-like domain	80
<i>A.G. Chentsov, P.A. Chentsov</i>	Dynamic programming in the routing problem: decomposition variant	95

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Derzhavin Tambov State University”
(OГPH 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

EDITOR-IN-CHIEF: Dr., Prof. Zhukovskiy, Evgeny S. (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Cand., Assoc. Prof. Panasenka, Elena A. (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), Ilyina, Irina V. (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Arutyunov, Aram V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Berezansky, Leonid (Beersheba, State of Israel), Dr., Prof. van Dijk, Gerrit (Leiden, Netherlands), Dr., Prof. Molchanov, Vladimir F. (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Pevzner, Michael (Reims, French Republic), Dr., Prof. Lobo Pereira, Fernando (Porto, Portuguese Republic), Dr., Prof. Ponomarev, Arcady V. (Ås, Kingdom of Norway), Dr., Prof. Helminck, Gerard (Amsterdam, Netherlands), Corresponding Member of RAS, Dr., Prof. Chentsov, Alexander G. (Yekaterinburg, Russian Federation)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru, vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Subscription index in the catalogue of LLC “Ural-Press” is 83372
Distribution territory: Russian Federation, foreign countries

Editors: M.I. Filatova, N.A. Mikhailova
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Senina
Computer layout by T.Y. Molchanova
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

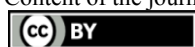
For citation:

Russian Universities Reports. Mathematics. – 2022. – Vol. 27, no. 137. – 124 p. – <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137>

Signed for printing 15.03.2022. Release date 25.03.2022
Format A4 (60×84 1/8). Typeface “Times New Roman”. Printed on risograph.
Pr. sheet 15,5. Conv. pr. sheet 14,5. Copies printed 1000. Order no. 22262. Free price

Publisher: FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”
Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region.
Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

Content of the journal is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



© FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”, 2022
© The journal “Russian Universities Reports. Mathematics”, 2022
While reprinting, citing materials, including in electronic media, a reference to the journal is required.
The author is responsible for the contents of publications

© Афанасьев А.П., Дзюба С.М., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-5-15

УДК 517.938



Новые свойства рекуррентных движений и предельных множеств динамических систем

Александр Петрович АФАНАСЬЕВ^{1,2}, Сергей Михайлович ДЗЮБА³

¹ ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича» Российской академии наук
127051, Российская Федерация, г. Москва, Большой Каретный переулок, 19

² ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

³ ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»
170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. В более ранней статье авторов [А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба. “О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем”, Вестник российских университетов. Математика, **26**:133 (2021), 5–14] установлена связь между движениями общего вида и рекуррентными движениями в компактном метрическом пространстве и доказан весьма простой характер поведения рекуррентных движений. В данной работе на основании этих результатов вводится новое определение рекуррентного движения, которое, в отличие от широко используемого в современной литературе, дает достаточно полную информацию относительно строения рекуррентного движения как функции времени и поэтому является более наглядным. При этом мы показываем, что в абстрактном метрическом пространстве предлагаемое определение эквивалентно определению Биркгофа, а в полном метрическом пространстве эквивалентно общепринятому современному определению.

Получены необходимые и достаточные условия рекуррентности (в смысле предложенного в статье определения) движения в компактном метрическом пространстве. Доказано, что в компактном метрическом пространстве α - и ω -предельные множества любого движения являются минимальными (это утверждение было анонсировано в более ранней статье авторов). Из минимальности α - и ω -предельных множеств выведено, что в компактном метрическом пространстве каждая положительно (отрицательно) устойчивая по Пуассону точка лежит на траектории рекуррентного движения, т. е. является точкой минимального множества, и таким образом, в компактном метрическом пространстве с конечной положительной инвариантной мерой почти все точки являются точками минимальных множеств.

Ключевые слова: динамические системы, минимальные множества, рекуррентные и устойчивые по Пуассону движения

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00347_а).

Для цитирования: Афанасьев А.П., Дзюба С.М. Новые свойства рекуррентных движений и предельных множеств динамических систем // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 5–15. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-5-15.

New properties of recurrent motions and limit sets of dynamical systems

Aleksandr P. AFANAS'EV^{1,2}, Sergei M. DZYUBA³

¹ Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences
 19 Bolshoy Karetny per., Moscow 127051, Russian Federation

² Lomonosov Moscow State University
 GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation

³ Tver State Technical University
 22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. In the earlier article by the authors [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba “About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems”, Russian Universities Reports. Mathematics, **26**:133 (2021), 5–14] a connection between general motions and recurrent motions in a compact metric space is established, and a very simple behavior of recurrent motions is proved. Based on these results, we introduce here a new definition of recurrent motion which, in contrast to the one widely used in modern literature, provides fairly complete information about the structure of a recurrent motion as a function of time and, therefore, is more illustrative. At the same time, we show that in an abstract metric space, the proposed definition is equivalent to Birkhoff's definition and is equivalent to the generally accepted modern definition in a complete metric space.

Necessary and sufficient conditions for recurrence (in the sense of the definition proposed in the article) of a motion in a compact metric space are obtained. It is proved that α - and ω -limit sets of any motion are minimal in a compact metric space (this assertion was announced in an earlier paper by the authors). From the minimality of α - and ω -limit sets, it is deduced that in a compact metric space, each positively (negatively) Poisson-stable point lies on the trajectory of a recurrent motion, i.e. is a point of a minimal set, and thus, in a compact metric space with a finite positive invariant measure almost all points are points of minimal sets.

Keywords: dynamical systems, minimal sets, recurrent and stable in the sense of Poisson motions

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00347_a).

Mathematics Subject Classification: 73B20.

For citation: Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M. Novyye svoystva rekurrentnykh dvizheniy i predel'nykh mnozhestv dinamicheskikh sistem [New properties of recurrent motions and limit sets of dynamical systems]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 5–15. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-5-15. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow \Sigma$ и положим

$$f(t, p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

- (а) отображение f непрерывно по совокупности переменных на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$;
- (б) для всех $p \in \Sigma$

$$g^0 p = p;$$

- (с) для всех $t, s \in \mathbb{R}$

$$g^{t+s} = g^t g^s.$$

Тогда, следуя работе [1], будем говорить, что группа преобразований g^t — *динамическая система*, а функция $t \rightarrow f(t, p)$ — *движение*, если точка $p \in \Sigma$ фиксирована (см. также [2, с. 347]).

Основатель общей теории динамических систем Дж. Биркгоф изучал движения системы g^t , заданной на n -мерном замкнутом многообразии (см. [3, с. 194]). Он ввел определение минимального множества, а произвольное движение, расположенное в минимальном множестве, назвал рекуррентным. Исходя из этих определений, Дж. Биркгоф получил необходимое и достаточное условие рекуррентности. Во многих современных источниках это условие принято за определение рекуррентного движения системы g^t , заданной в абстрактном метрическом пространстве (см., например, [2, с. 402]).

Дж. Биркгоф показал, что каждое непустое замкнутое компактное инвариантное множество содержит компактное минимальное множество. Поэтому фундаментальное значение определения Биркгофа состоит в том, что из существования движения, расположенного в компактном множестве, следует существование рекуррентного движения. Однако, это определение мало наглядно, поскольку не содержит почти никакой информации относительно строения рекуррентного движения.

В настоящей работе будет введено новое более конструктивное определение рекуррентного движения. Основной целью работы является изучение новых свойств движений и их предельных множеств, которые связаны с данным определением.

1. Новое определение рекуррентного движения

Прежде всего, коротко изложим основные свойства рекуррентных движений и минимальных множеств.

Следуя монографии [2, с. 402], приведем определение рекуррентного движения, которое прочно устоялось в современных источниках.

О п р е д е л е н и е 1.1. Движение $f(t, p)$ называется *рекуррентным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $T_\varepsilon > 0$, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ дуга

$$K_{\tau, T_\varepsilon} = \{f(t, p): t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]\}$$

траектории

$$K = \{f(t, p): t \in \mathbb{R}\}$$

этого движения аппроксимирует всю траекторию K с точностью ε , т. е. при заданном ε и соответствующим ему T_ε для всех $s \in \mathbb{R}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ найдется такое $t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]$, что

$$d(f(s, p), f(t, p)) < \varepsilon.$$

Установим связь между определением рекуррентности Биркгофа и определением 1.1.

Напомним, что множество $M \subset \Sigma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами (см., например, [2, с. 400]). Более того, заметим, что в полном пространстве Σ замыкание $\bar{K}$ траектории K рекуррентного движения $f(t, p)$ является компактным минимальным множеством M , а каждое движение $f(t, p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M , рекуррентно (см. [2, с. 402, 404]).

Таким образом, в компактном пространстве Σ определения рекуррентного движения и минимального множества относятся к одному и тому же математическому объекту. Это фактически и есть определение Биркгофа. Что же касается необходимого и достаточного условия рекуррентности Биркгофа, то в наши дни оно обычно берется за ее определение.

Новое необходимое и достаточное условие рекуррентности движений, эквивалентное необходимому и достаточному условию Биркгофа, устанавливает следующая теорема.

Теорема 1.1. *В компактном пространстве Σ необходимое и достаточное условие рекуррентности движения $f(t, p)$ состоит в том, что для каждой пары положительных чисел (ε, T) можно указать такое натуральное число $N_{\varepsilon, T}$, что*

$$d(p, f(N_{\varepsilon, T}T, p)) < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Доказательство. Зафиксируем некоторое число $T > 0$. Пусть для всех $\varepsilon > 0$ и соответствующих им $N_{\varepsilon, T}$ выполнено неравенство (1.1). Тогда для некоторой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(N_k T, p) = p. \quad (1.2)$$

Отсюда следует, что $f(t, p)$ — рекуррентное движение вне зависимости от значения T (см. [4, теорема 1.1]).

Предположим теперь, что $f(t, p)$ — рекуррентное движение, но не существует последовательности $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, для которой выполнено равенство (1.2). Обозначим через K — траекторию движения $f(t, p)$. Тогда, поскольку отображение f непрерывно, для заданного значения T и каждой точки $q \in K$ не существует последовательности $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(N_k T, q) = q. \quad (1.3)$$

Положим

$$\Omega_{q, T} = \bigcap_{i \geq 0} \overline{\bigcup_{j \geq i} g^{jT} q},$$

где i и j — целые. Тогда множество

$$M_T = \{r \in \Omega_{q, T} : q \in K\} \quad (1.4)$$

компактно и представляет собой объединение всех минимальных множеств, содержащихся в ω -предельном множестве Ω движения $f(t, p)$ (см. [5, теорема 2]). Более того, для каждой точки $q \in K$ множество $\Omega_{q,T}$ исчерпывает предельные точки последовательности

$$q_k = f(kT, q), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Значит, множество M_T исчерпывает предельные точки всех последовательностей вида (1.5).

Заметим теперь, что из компактности пространства Σ следует его полнота. Следовательно, в силу рекуррентности движения $f(t, p)$ замыкание $\bar{K}$ траектории K является компактным минимальным множеством. Поэтому имеет место равенство

$$\bar{K} = M_T,$$

которое в силу равенства (1.4) противоречит предположению о том, что равенство (1.3) не выполняется.

Полученное противоречие означает, что для заданного числа T справедливо равенство (1.2). Отсюда следует неравенство (1.1). $\square$

Теорема 1.1 позволяет дать новое определение рекуррентного движения.

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем говорить, что $f(t, p)$ — *рекуррентное движение*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(d) замыкание $\bar{K}$ траектории K движения $f(t, p)$ компактно;

(e) для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N_ε , что

$$d(p, f(N_\varepsilon, p)) < \varepsilon. \quad (1.6)$$

Эквивалентность определений 1.1 и 1.2 устанавливает следующее утверждение.

Теорема 1.2. В полном метрическом пространстве Σ определения 1.1 и 1.2 эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению 1.1 каждое движение, расположенное в компактном минимальном множестве M , рекуррентно. Поэтому в силу теоремы 1.1 для движения $f(t, p)$ выполнено условие (1.6) и обратно. Значит, для доказательства теоремы 1.2 остается показать, что в полном пространстве Σ из определения 1.1 следует определение 1.2. Проделаем это.

Согласно определению 1.1 в полном пространстве Σ замыкание $\bar{K}$ траектории K рекуррентного движения $f(t, p)$ является компактным минимальным множеством. Следовательно, в силу теоремы 1.1 для $f(t, p)$ выполнено также и условие (1.6). $\square$

Очевидно, что определение 1.2 эквивалентно определению Биркгофа. Отметим, однако, что определение 1.2 более конструктивно, поскольку оно позволяет выявить новые важные свойства рекуррентных движений (см. теорему 2.1 и следствие 2.1).

2. Новые свойства движений и предельных множеств

Установим новые свойства движений и предельных множеств динамических систем, связанные с определением 1.2. Для этого, прежде всего, заметим, что теорему 1.1 дополняет следующая

Теорема 2.1. Пусть $f(t, p)$ — некоторое рекуррентное движение. Тогда, если пространство Σ компактно, то для каждой пары положительных чисел (ε, T) можно указать такое натуральное число $N_{\varepsilon, T}$, что одновременно выполнены неравенства (1.1) и

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} d(f(t, p), f(t + N_{\varepsilon, T}T, p)) \leq \varepsilon. \quad (2.1)$$

Доказательство. Поскольку движение $f(t, p)$ рекуррентно, а пространство Σ компактно, то согласно теореме 1.1 для каждой пары положительных чисел (ε, T) существует такое натуральное число $N_{\varepsilon, T}$, что выполнено неравенство (1.1). Поэтому для каждого фиксированного $T > 0$ и некоторой последовательности $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, составленной из чисел $N_{\varepsilon, T}$, выполнено равенство (1.2). Следовательно, для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(t + N_k T, p) = f(t, p). \quad (2.2)$$

Покажем, что равенство (2.2) выполняется равномерно на всей оси $\mathbb{R}$.

В самом деле, зафиксируем некоторое положительное число T и обозначим через F множество функций

$$t \rightarrow f(t \pm NT, p), \quad N = 0, 1, \dots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$. Поскольку пространство Σ компактно, то очевидно, что множество F равномерно непрерывно (см., например, [6, с. 212]). Следовательно, согласно теореме Арцела замыкание $\bar{F}$ множества F компактно в топологии равномерной сходимости. В силу равенства (2.2) это означает, что

$$\bar{F} = \bigcap_{k \geq 1} g^{N_k T} \bar{F} \quad (2.3)$$

(см., например, [7, с. 105]).

Предположим, что сходимость в (2.2) не равномерна на всей оси $\mathbb{R}$. Тогда существует такое положительное число ε , что для всех $k = 1, 2, \dots$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} d(f(t + N_k T, p), f(t, p)) \geq \varepsilon.$$

Поэтому найдутся такие последовательности $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow \varepsilon$ положительных и $(m_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ натуральных чисел, что

$$\delta_k = \max_{-m_k T \leq t \leq m_k T} d(f(t + N_k T, p), f(t, p)) \geq \varepsilon_k.$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \delta_k \geq \varepsilon.$$

Последнее, однако, противоречит равенству (2.3).

Таким образом, равенство (2.2) выполняется равномерно на всей оси $\mathbb{R}$. Отсюда следует неравенство (2.1). $\square$

З а м е ч а н и е 2.1. В силу теоремы 2.1 несложно заметить, что вместе с неравенством (1.1) справедливо также неравенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} d(f(t, p), f(t - N_{\varepsilon, T}T, p)) \leq \varepsilon. \quad (2.4)$$

Неравенства (1.1), (2.1) и (2.4) определяют новое конструктивное свойство рекуррентных движений. Новое свойство предельных множеств движений устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть p — некоторая точка пространства Σ и Ω — ω -предельное множество движения $f(t, p)$. Тогда, если пространство Σ компактно, то Ω — минимальное множество.

Доказательство. Для всех $N = 0, 1, \dots$ обозначим через P_N — множество функций

$$t \rightarrow f(t + N + l, p), \quad l = 0, 1, \dots,$$

определенных на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\bar{P}_N$ — замыкание множества P_N . При этом положим

$$P = \bigcap_{N \geq 0} \bar{P}_N. \quad (2.5)$$

Очевидно, что

$$\bar{P}_0 \supset \bar{P}_1 \supset \dots \supset \bar{P}_N \supset \dots$$

Поэтому для каждой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$

$$P = \bigcap_{k \geq 1} \bar{P}_{N_k}. \quad (2.6)$$

Если пространство Σ компактно, то каждое из множеств P_N равностепенно непрерывно (см., например, [6, с. 212]). В этом случае множество P непусто, компактно в топологии равномерной сходимости и инвариантно (см. [7, с. 105]). Значит, P содержит компактное (в топологии равномерной сходимости) минимальное множество M (см. [2, с. 401]). Более того, в силу равенств (2.5) и (2.6) несложно заметить, что P — объединение компактных (в топологии равномерной сходимости) минимальных множеств (см. [4, теорема 1.1]). Покажем, что M не является собственной частью P , т. е. что P — минимальное множество.

В самом деле, зафиксируем некоторую последовательность $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$. Тогда без какой-либо потери общности можем считать, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(N_k, p) = q.$$

Предположим, что функция $t \rightarrow f(t, q)$, определенная на отрезке $[0, 1]$, принадлежит множеству M . Пусть $(N'_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ — такая последовательность натуральных чисел, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(N'_k, p) = q',$$

и пусть функция $t \rightarrow f(t, q')$, определенная на отрезке $[0, 1]$, принадлежит другому минимальному множеству $M' \subset P$. Если

$$\sup_{k \geq 1} |N_k - N'_k| < +\infty,$$

то, очевидно,

$$M' \cap M \neq \emptyset.$$

Однако, пересечение минимальных множеств по определению пусто, а объединение всех последовательностей $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ исчерпывает множество $\mathbb{N}$. Значит, P — минимальное множество.

Заметим теперь, что по определению

$$\Omega = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} f(s, p)}.$$

Следовательно, Ω — минимальное множество. $\square$

З а м е ч а н и е 2.2. Легко видеть, что утверждение, аналогичное теореме 2.2, справедливо также и для α -предельного множества A движения $f(t, p)$.

Значение теоремы 2.2 подчеркивает следующий

П р и м е р 2.1. Для полноты картины рассмотрим одну попытку построения компактного ω -предельного множества, которое не является минимальным.

На действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = [-x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)][(x_1 - 1)^2 + x_2^2], \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_2 = [x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)][(x_1 - 1)^2 + x_2^2] \quad (2.8)$$

(см., например, [2, с. 375]). В полярных координатах (r, θ) система (2.7), (2.8) может быть записана в следующем виде:

$$\dot{r} = r(1 - r^2)(1 + r^2 - 2r \cos \theta), \quad \dot{\theta} = (1 + r^2 - 2r \cos \theta). \quad (2.9)$$

Положим $x_1(0) \in (0, 1)$ и $x_2(0) \in (0, 1)$. В [2, с. 375] считается, что движения системы (2.7), (2.8) осуществляются по кривым дифференциального уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = r(1 - r^2).$$

Если это так, то ω -предельным множеством движения $(x_1(t), x_2(t))$ является окружность

$$C = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Окружность C содержит положение равновесия $\{r=1\}, \{\theta=0\}$ и дугу $\{r=1\}, \{\theta \in (0, 2\pi)\}$, причем траектория K движения $(x_1(t), x_2(t))$ наматывается на C как спираль. Последнее, однако, неверно.

В самом деле, при всех $r_0 \in (0, 1)$ и $\theta_0 \in \mathbb{R}$ непродолжаемое решение $(r(t), \theta(t))$ системы (2.9) с начальным условием

$$r(0) = r_0, \quad \theta(0) = \theta_0$$

ограничено при $t \rightarrow +\infty$. Но из ограниченности $\theta(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ следует, что траектория K не может наматываться на C .

Более важное значение теоремы 2.2 состоит в том, что она позволяет установить прямую связь между определением 1.2 и понятием устойчивости по Пуассону.

Напомним, что точка p называется *положительно устойчивой по Пуассону*, если $p \in \Omega$ (см., например, [2, с. 363]). Аналогичным образом, точка p называется *отрицательно устойчивой по Пуассону*, если $p \in \Lambda$. Если же $p \in \Omega$ и $p \in \Lambda$, то точка p называется (просто) *устойчивой по Пуассону*.

Если точка p устойчива по Пуассону (соответственно положительно или отрицательно), то каждая точка q траектории K движения $f(t, p)$ также устойчива по Пуассону (соответственно положительно или отрицательно). Поэтому говорят, что движение $f(t, p)$ *устойчиво по Пуассону* (соответственно положительно или отрицательно).

Как известно, каждое рекуррентное движение устойчиво по Пуассону (см., например, [2, с. 402]). Теорема 2.2 позволяет существенно уточнить это утверждение, поскольку из нее сразу вытекает

Следствие 2.1. *В компактном метрическом пространстве Σ каждая положительно (отрицательно) устойчивая по Пуассону точка $p \in \Sigma$ лежит на траектории рекуррентного движения, т. е. каждое положительно (отрицательно) устойчивое по Пуассону движение $f(t, p)$ является рекуррентным.*

Следствие 2.1 закрывает проблему существования устойчивых по Пуассону нереккуррентных движений в компактном метрическом пространстве Σ . В частности, оно позволяет существенно уточнить теорему Пуанкаре–Каратеодори о возвращении точек (см., например, [2, с. 471]), так как из него вытекает

Следствие 2.2. *В компактном метрическом пространстве Σ с конечной положительной инвариантной мерой μ (относительно системы g^t) почти все точки $p \in \Sigma$ (в смысле меры μ) лежат на траекториях рекуррентных движений, т. е. почти все точки $p \in \Sigma$ являются точками минимальных множеств.*

3. Устойчивые по Пуассону движения на торе

В дополнение к следствию 2.1 обсудим проблему построения устойчивых по Пуассону нереккуррентных движений на торе. Нам удалось найти лишь одну концептуальную попытку построения таких движений. Эта попытка содержится в монографии [2, с. 365] и является неудачной. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий

Пример 3.2. Зафиксируем тор $\mathbb{T}^2$ с циклическими координатами (ξ_1, ξ_2) с периодом, равным единице. Следуя [2, с. 365], на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = \sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda(\sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2), \quad (3.1)$$

где λ — некоторое положительное иррациональное число. В [2, с. 365] считается, что движения системы (3.1) осуществляются по кривым уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda. \quad (3.2)$$

Кривые уравнения (3.2) порождают на торе $\mathbb{T}^2$ эргодический поток (см., например, [8, с. 450]). Отсюда делается вывод, что на $\mathbb{T}^2$ на кривой $x_2 = \lambda x_1$ система (3.1) порождает три типа движений:

- (α) положение равновесия $(0, 0)$;
- (β) положительно асимптотические и отрицательно устойчивые по Пуассону;
- (γ) отрицательно асимптотические и положительно устойчивые по Пуассону.

В случае эргодического потока тор $\mathbb{T}^2$ является минимальным множеством, т. е. эргодический поток порождает на $\mathbb{T}^2$ движения рекуррентного типа. В случае системы (3.1) минимальным множеством является положение равновесия O , что позволяет предположить существование на торе $\mathbb{T}^2$ устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений. Последнее, однако, неверно. Именно доказательство существования устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений, порожденных на торе $\mathbb{T}^2$ системой (3.1), принципиально невозможно, поскольку конструкция примера в [2, с. 365] неверна и противоречит теореме Биркгофа о специальных центральных движениях (см. [3, с. 206]). Это означает, что не существует устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений, порожденных на торе $\mathbb{T}^2$ системой (3.1); последнее, очевидно, можно объяснять только тем, что движения системы (3.1) не осуществляются по кривым уравнения (3.2).

З а м е ч а н и е 3.1. Для полноты картины наряду с системой (3.1) рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = \sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2 + \delta, \quad \dot{x}_2 = \lambda(\sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2 + \delta), \quad (3.3)$$

где δ — некоторое положительное число. Тогда мы можем говорить об устойчивости по Пуассону движений рекуррентного типа в системе (3.3) (см. [8, с. 455]). Отсюда сразу следует, что система (3.1) является системой первой степени негрубости, т. е. в ней отсутствуют устойчивые по Пуассону нерекуррентные движения (см. [9]).

References

- [1] A. A. Markov, “Sur une propriété générale des ensembles minimaux de Birkhoff”, *C.R. Acad. Sci.*, **193** (1931), 823–825.
- [2] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].
- [3] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].
- [4] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 5–14. [A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 5–14 (In Russian)].
- [5] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “Метод построения минимальных множеств динамических систем”, *Дифференциальные уравнения*, **51**:7 (2015), 835–841; англ. пер.: A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “Method for constructing minimal sets of dynamical systems”, *Differential Equations*, **51**:7 (2015), 831–837.
- [6] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, *Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах*, ЛКИ, М., 2007. [A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, *Poisson Stability in Dynamical and Continuous Periodic Systems*, LKI Publ., Moscow, 2007 (In Russian)].
- [7] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984. [J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Mir Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].
- [8] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ЛКИ, М., 2007. [E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, LKI Publ., Moscow, 2007 (In Russian)].

- [9] С. Х. Арансон, “Об отсутствии незамкнутых устойчивых по Пуассону полутраекторий и траекторий двоякоасимптотических к двойному предельному циклу у динамических систем первой степени негрубости на ориентируемых двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **76(118)**:2 (1968), 214–230; англ. пер.: S. Kh. Aranson, “The absence of nonclosed Poisson-stable semitrajectories and trajectories doubly asymptotic to a double limit cycle for dynamical systems of the first degree of structural instability on orientable two-dimensional manifolds”, *Math. USSR-Sb.*, **5**:2 (1968), 205–219.

Информация об авторах

Афанасьев Александр Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий центром распределенных вычислений, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук; профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: apa@iitp.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4171-5745>

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем. Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2981-8549>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Дзюба Сергей Михайлович
E-mail: sdzyuba@mail.ru

Поступила в редакцию 17.12.2021 г.

Поступила после рецензирования 25.02.2022 г.

Принята к публикации 10.03.2022 г.

Information about the authors

Aleksandr P. Afanas'ev, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Center for Distributed Computing, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences; Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: apa@iitp.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4171-5745>

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department. Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2981-8549>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Sergei M. Dzyuba
E-mail: sdzyuba@mail.ru

Received 17.12.2021

Reviewed 25.02.2022

Accepted for press 10.03.2022

© Волдеаб М.С., Родина Л.И., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26

УДК 517.935



О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции

Мebraхтом Себхату ВОЛДЕАБ¹, Людмила Ивановна РОДИНА^{1,2}

¹ ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

² ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
119049, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 4

Аннотация. Рассматривается задача оптимальной добычи ресурса из структурированной популяции, состоящей из отдельных видов, либо разделенной на возрастные группы. Динамика популяции при отсутствии эксплуатации задана системой обыкновенных дифференциальных уравнений, и в определенные моменты времени из популяции извлекается часть ресурса. В частности, можно предполагать, что производится добыча различных видов рыбы, каждый из которых имеет определенную стоимость; кроме того, между этими видами существуют взаимодействия типа «хищник-жертва» или отношения конкуренции за пищу и места обитания. Исследуются свойства средней временной выгоды, которая равна пределу от средней стоимости ресурса при неограниченном увеличении моментов изъятия. Получены условия, при которых средняя временная выгода равна бесконечности, и указан способ построения управления для достижения этого значения. Показано, что для некоторых моделей взаимодействия двух видов такой способ добычи ресурса может привести к полному уничтожению одного из видов и неограниченному росту второго. Поэтому представляется целесообразным исследовать представленную здесь задачу построения управления для достижения фиксированного конечного значения средней временной выгоды. Полученные результаты проиллюстрированы на примерах модели «хищник-жертва» и модели конкуренции двух видов и могут быть применены к другим всевозможным моделям динамики популяций.

Ключевые слова: подверженная промыслу модель популяции, структурированная популяция, средняя временная выгода

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00293_а).

Для цитирования: Волдеаб М.С., Родина Л.И. О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 16–26. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26.

© M. S. Woldeab, L. I. Rodina, 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26



About the methods of renewable resource extraction from the structured population

Mebrahtom S. WOLDEAB¹, Lyudmila I. RODINA^{1,2}

¹ Vladimir State University

87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation

² National University of Science and Technology “MISIS”

4 Leninskii Pr., Moscow 119049, Russian Federation

Abstract. The problem of optimal extraction of a resource from the structured population consisting of individual species or divided into age groups, is considered. Population dynamics, in the absence of exploitation, is given by a system of ordinary differential equations and at certain time moments, part of the population, is extracted. In particular, it can be assumed that we extract various types of fish, each of which has a certain value. Moreover, there exist predator-prey interactions or competition relationships for food and habitat between these species. We study the properties of the average time benefit which is equal to the limit of the average cost of the resource with an unlimited increase in times of withdrawals. Conditions are obtained under which the average time benefit goes to infinity and a method for constructing a control system to achieve this value is indicated. We show that for some models of interaction between two species, this method of extracting a resource can lead to the complete extinction of one of the species and unlimited growth to the other. Therefore, it seems appropriate to study the task of constructing a control to achieve a fixed final value of the average time benefit. The results obtained here are illustrated with examples of predator-prey models and models of competition of two species and can be applied to other various models of population dynamics.

Keywords: model of the population subject to harvesting, structured population, average time benefit

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00293_a).

Mathematics Subject Classification: 34A37, 34H05, 49J15.

For citation: Woldeab M.S., Rodina L.I. O sposobakh dobychi vozobnovlyayemogo resursa iz strukturirovannoy populyatsii [About the methods of renewable resource extraction from the structured population]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 16–26. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Многие ученые, начиная с прошлого века, занимались исследованием оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными динамическими системами (см. [1, 2]). В настоящее время ведутся активные работы по изучению оптимального промысла и его влияния на характер динамики и состав структурированных популяций [3–5]. Множество работ также посвящено задачам периодического импульсного сбора возобновляемого ресурса, задачам оптимальной эксплуатации популяции с диффузией, исследованию максимальной эффективности сбора ресурса [6, 7], получению наибольшей выгоды от эксплуатации популяции, заданной разностными уравнениями [8, 9].

В работе [10] получены оценки средней временной выгоды для популяций, заданных обыкновенными дифференциальными уравнениями; рассматриваются как однородные популяции, не разделенные на группы, так и структурированные, состоящие из $n \geq 2$ групп. Описан способ добычи ресурса для режима сбора в долгосрочной перспективе, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления, и достигается максимальная средняя временная выгода. В продолжение [10] в данной статье мы исследуем условия, при которых средняя временная выгода равна бесконечности, и строим управления для достижения этого значения. Показано, что данные условия, в частности, выполняются для модели «хищник-жертва», но такой способ добычи ресурса может привести к полному уничтожению «хищников» и неограниченному росту «жертв». Поэтому представляется целесообразным исследовать представленную здесь задачу построения управления для достижения фиксированного конечного значения средней временной выгоды. Полученные результаты проиллюстрированы на примере модели конкуренции двух видов и могут быть применены к другим всевозможным моделям динамики популяций.

1. Основные определения и обозначения

Рассмотрим модель популяции, динамика которой при отсутствии эксплуатации задана системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Предполагаем, что в моменты времени $\tau(k) = kd$, где $d > 0$, из популяции извлекается некоторая доля возобновляемого ресурса

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что приводит к мгновенному уменьшению его количества. Если $n = 1$, то популяцию называют однородной. При $n \geq 2$ популяция является структурированной, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \dots, x_n$, либо разделена на n возрастных групп. В частности, можно считать, что мы рассматриваем добычу n различных видов рыб, между которыми существуют отношения конкуренции за пищу или места обитания, или среди этих видов могут быть хищные. Отметим, что в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $u_i(k)$ обозначается доля ресурса i -го вида, извлеченного из популяции в момент kd .

Таким образом, мы исследуем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= (1 - u_i(k)) \cdot x_i(kd - 0), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $x_i(kd - 0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$. Предполагаем, что решения данной системы непрерывны справа, функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы для всех $x \in \mathbb{R}_+^n$, решения системы уравнений $\dot{x} = f(x)$ существуют при всех $t \in [0, d]$.

Обозначим через $\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x))$ решение системы $\dot{x} = f(x)$ (без импульсного воздействия), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$, где $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}_+^n$. Всюду в данной работе полагаем, что решение $\varphi(t, x)$ является неотрицательным при любых неотрицательных начальных условиях. Чтобы данное условие выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ удовлетворяли следующему условию квазиположительности (см. [11, с. 34]):

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из равенств $x_i(kd) = (1 - u_i(k)) \cdot x_i(kd - 0)$ в (1.1) следует, что решение системы (1.1) при выполнении условия квазиположительности также неотрицательное при любых неотрицательных начальных условиях.

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$ — количество ресурса i -го вида до сбора в момент kd , $k = 1, 2, \dots$, зависящее от долей ресурса $u(1), \dots, u(k - 1)$, собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0)$; $C_i \geq 0$ — стоимость ресурса i -го вида (в предположении, что C_i одновременно не равны нулю). Тогда общая стоимость собранного ресурса в момент kd равна $Y(k) = \sum_{i=1}^n C_i X_i(k) u_i(k)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $\bar{u} \doteq (u(1), \dots, u(k), \dots) \in [0, 1]^\infty$. Средней временной выгодой от извлечения ресурса называется функция

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j).$$

Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^*(\bar{u}, x(0))$ и, если выполнено равенство $H_*(\bar{u}, x(0)) = H^*(\bar{u}, x(0))$, то определим предел

$$H(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j). \quad (1.2)$$

2. Построение управления, при котором средняя временная выгода бесконечная

Рассмотрим популяцию, динамика которой задана системой (1.1). Введем в рассмотрение функцию $D(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x) - x_i)$.

Теорема 2.1. *Предположим, что существует $\hat{x} \in \mathbb{R}_n^+$ такое, что*

- (1) $\varphi_i(d, \hat{x}) \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$;
- (2) последовательности $\{\varphi_i(kd, \hat{x})\}_{k=1}^{+\infty}$, $i = 1, \dots, n$ возрастают;
- (3) $D(\varphi(kd, \hat{x})) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_n^+$ выполнены неравенства

$$\hat{x}_i \leq \varphi_i(d, x(0)) \neq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

то существует режим эксплуатации $\bar{u}$, при котором $H(\bar{u}, x(0)) = +\infty$.

Доказательство. Укажем один из способов эксплуатации популяции $\bar{u}$, при котором можно достичь бесконечной средней временной выгоды. При $k = 1$ выберем управление

$$u(1) = (u_1(1), \dots, u_n(1)) = \left(1 - \frac{\hat{x}_1}{\varphi_1(d, x(0))}, \dots, 1 - \frac{\hat{x}_n}{\varphi_n(d, x(0))}\right).$$

Из условия квазиположительности и (2.1) следует, что $u(1) \in [0, 1]^n$. Тогда в момент времени $t = d$ количество собранного ресурса каждого вида равно

$$X_i(1)u_i(1) = \varphi_i(d, x(0)) \left(1 - \frac{\hat{x}_i}{\varphi_i(d, x(0))}\right) = \varphi_i(d, x(0)) - \hat{x}_i, \quad (2.2)$$

а количество оставшегося ресурса равно

$$x_i(d) = (1 - u_i(1))\varphi_i(d, x(0)) = \hat{x}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, $x(d) = \hat{x}$. Найдем $X(2) = \varphi(d, x(d)) = \varphi(d, \hat{x})$.

Дальнейшие управления полагаем равными $u(2k) = (0, \dots, 0)$,

$$u(2k+1) = \left(1 - \frac{\varphi_1(kd, \hat{x})}{\varphi_1((k+1)d, \hat{x})}, \dots, 1 - \frac{\varphi_n(kd, \hat{x})}{\varphi_n((k+1)d, \hat{x})}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Из условия квазиположительности и условия (2) теоремы следует, что $u(2k+1) \in [0, 1]^n$. Найдем $x(2d) = X(2) = \varphi(d, \hat{x})$, $X(3) = \varphi(d, x(2d)) = \varphi(2d, \hat{x})$,

$$x(3d) = (1 - u(3))X(3) = \frac{\varphi(d, \hat{x})}{\varphi(2d, \hat{x})}X(3) = \varphi(d, \hat{x}).$$

Аналогично находим, что $x(2kd) = x((2k+1)d) = \varphi(kd, \hat{x})$,

$$X(2k) = \varphi(kd, \hat{x}), \quad X(2k+1) = \varphi((k+1)d, \hat{x}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Отметим, что при данном способе эксплуатации в моменты времени $t = 2kd$, $k = 1, 2, \dots$ ресурс не извлекался; количество ресурса, извлеченного в момент $t = d$, определено в (2.2); а количество ресурса, добытого в момент $t = (2k+1)d$, $k = 1, 2, \dots$, составляет

$$X(2k+1)u(2k+1) = (\varphi_1((k+1)d, \hat{x}) - \varphi_1(kd, \hat{x}), \dots, \varphi_n((k+1)d, \hat{x}) - \varphi_n(kd, \hat{x})).$$

Стоимость ресурса, собранного в момент $t = d$, равна $\sum_{i=1}^n C_i(X_i(1) - \hat{x}_i)$, и для $t = (2k+1)d$, $k = 1, 2, \dots$, данная стоимость равна

$$\sum_{i=1}^n C_i(\varphi_i((k+1)d, \hat{x}) - \varphi_i(kd, \hat{x})) = D(\varphi(kd, \hat{x})). \quad (2.3)$$

Поэтому общая стоимость ресурса, извлеченного в моменты $t = d, 3d, \dots, (2k-1)d$, равна

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(2j-1) u_i(2j-1) = \sum_{i=1}^n C_i (X_i(1) - \hat{x}_i) + \sum_{j=2}^k D(\varphi(jd, \hat{x})).$$

Найдем среднюю временную выгоду

$$\begin{aligned} H(\bar{u}, x(0)) &\doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^{2k} \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{\ell=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(2\ell-1) u_i(2\ell-1) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^n C_i (X_i(1) - \hat{x}_i) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{\ell=2}^k D(\varphi(\ell d, \hat{x})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{\ell=2}^k D(\varphi(\ell d, \hat{x})). \end{aligned} \quad (2.4)$$

По свойству предела от среднего арифметического, из условия (3) теоремы следует, что $H(\bar{u}, x(0)) = +\infty$. $\square$

Следствие 2.1. *Предположим, что существует $\hat{x} \in \mathbb{R}_n^+$, такое, что*

- (1) $\varphi_i(d, \hat{x}) \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$;
- (2) последовательности $\{\varphi_i(kd, \hat{x})\}_{k=1}^{+\infty}$, $i = 1, \dots, n$ возрастают;
- (3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(kd, \hat{x}) = +\infty$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_n^+$ выполнено (2.1), то существует режим эксплуатации $\bar{u}$, при котором $H(\bar{u}, x(0)) = +\infty$.

Доказательство. Режим эксплуатации $\bar{u}$ выберем так же, как в доказательстве теоремы 2.1. Тогда из (2.3) следует, что суммарная стоимость ресурса, извлеченного в моменты времени $t = 3d, \dots, (2k-1)d$, равна

$$\sum_{\ell=2}^k D(\varphi(\ell d, \hat{x})) = \sum_{\ell=2}^k \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i((\ell+1)d, \hat{x}) - \varphi_i(\ell d, \hat{x})) = \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i((k+1)d, \hat{x}) - \varphi_i(2d, \hat{x})).$$

Таким образом, из условия (3) следствия получаем

$$H(\bar{u}, x(0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{\ell=2}^k D(\varphi(\ell d, \hat{x})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i((k+1)d, \hat{x}) = +\infty.$$

$\square$

Теорема 2.2. *Пусть существуют $\hat{x} \in \mathbb{R}_n^+$ и непустое подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ такие, что:*

- (1) $\varphi_i(d, \hat{x}) \neq 0$ для всех $i \in I$;
- (2) последовательности $\{\varphi_i(kd, \hat{x})\}_{k=1}^{+\infty}$, $i \in I$ возрастают;
- (3) $\varphi_i(kd, \hat{x}) = 0$ для всех $i \notin I$, $k = 1, 2, \dots$;
- (4) $D(\varphi(kd, \hat{x})) = \sum_{i \in I} C_i (\varphi_i((k+1)d, \hat{x}) - \varphi_i(kd, \hat{x})) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_n^+$ выполнены неравенства

$$\hat{x}_i \leq \varphi_i(d, x(0)), \quad i = 1, \dots, n; \quad \varphi_i(d, x(0)) \neq 0, \quad i \in I, \quad (2.5)$$

то существует режим эксплуатации $\bar{u}$, при котором $H(\bar{u}, x(0)) = +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим сначала, что если множество $J \doteq \{1, \dots, n\} \setminus I$ пустое, то доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 2.1.

Далее будем предполагать, что множество J непусто. Для всех $i \in J$ положим $u_i(k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Для $i \in I$ определим $u_i(k)$, как в теореме 2.1, то есть

$$u_i(1) = 1 - \frac{\hat{x}_i}{\varphi_i(d, x(0))}; \quad u_i(2k) = 0, \quad u_i(2k+1) = 1 - \frac{\varphi_i(kd, \hat{x})}{\varphi_i((k+1)d, \hat{x})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Аналогично (2.4) получаем, что

$$H(\bar{u}, x(0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{j=2}^k D(\varphi(jd, \hat{x})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{j=2}^k \sum_{i \in I} C_i (\varphi_i((j+1)d, \hat{x}) - \varphi_i(jd, \hat{x})).$$

Таким образом, если $D(\varphi(kd, \hat{x})) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, то $H(\bar{u}, x(0)) = +\infty$. $\square$

З а м е ч а н и е 2.1. Утверждение теоремы останется верным, если условие (4) заменить следующим условием:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i \in I} C_i \varphi_i(kd, \hat{x}) = +\infty.$$

Это доказывается так же, как в следствии 2.1.

П р и м е р 2.1. Покажем, что для модели «хищник-жертва» средняя временная выгода может быть бесконечной, и найдем управления, при которых она достигается. Рассмотрим модель, заданную системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\alpha - \beta x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (-\gamma + \delta x_1)x_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Здесь x_1 и x_2 — размеры популяций жертв и хищников соответственно, все коэффициенты системы положительные (свойства решений системы (2.6) описаны в [12]).

Пусть $\hat{x}_1$ — произвольное положительное число, $\hat{x} = (\hat{x}_1, 0)$, $I = \{1\}$. Найдем $\varphi_1(kd, \hat{x}) = \hat{x}_1 e^{\alpha kd}$, $\varphi_2(kd, \hat{x}) = 0$, где $k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что последовательность $\{\varphi_1(kd, \hat{x})\}_{k=1}^{+\infty}$ возрастает и

$$D(\varphi(kd, \hat{x})) = C_1 (\varphi_1((k+1)d, \hat{x}) - \varphi_1(kd, \hat{x})) = C_1 \hat{x}_1 (e^{\alpha d} - 1) e^{\alpha kd} \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.2, поэтому $H(\bar{u}, x(0)) = +\infty$.

Укажем один из способов управления, при котором $H(\bar{u}, x(0)) = +\infty$. Из доказательства теоремы 2.2 следует, что для начальной точки $x(0)$, такой, что $\varphi_i(d, x(0)) \geq \hat{x}_i$, $i = 1, 2$, можно выбрать следующие управления:

$$u(1) = \left(1 - \frac{\hat{x}_1}{\varphi_1(d, x(0))}, 1\right), \quad u(2k) = (0, 0), \quad u(2k+1) = (1 - e^{-\alpha d}, 0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь в момент $t = d$ производится отлов части «жертв» и всех «хищников», что создает благоприятные условия для «жертв». Бесконечное значение $H(\bar{u}, x(0))$ достигается только за счет популяции «жертв».

3. Построение управления для достижения фиксированной средней временной выгоды

Достижение бесконечной средней временной выгоды не всегда экономически оправдано и, как показано в примере 2.1, может привести к уничтожению одного из видов. Рассмотрим задачу построения управления для достижения фиксированной средней временной выгоды, которая будет ограничена максимальным значением функции

$$D(x) = \sum_{i=1}^n C_i(\varphi_i(d, x) - x_i),$$

или может равняться любому положительному числу, если $D(x)$ не ограничена сверху. В [10] показано, что если $D(x)$ достигает максимального значения в единственной точке $x^* \in \mathbb{R}_+^n$, такой, что $x_i^* \leq \varphi_i(d, x^*) \neq 0$ и $\varphi_i(d, x(0)) \geq x_i^*$ для всех $i = 1, \dots, n$, то наибольшее значение функции $H(\bar{u}, x(0))$ равно $D(x^*) = \sum_{i=1}^n C_i(\varphi_i(d, x^*) - x_i^*)$.

Обозначим через $E(D)$ множество значений функции $D(x)$.

Теорема 3.1. Пусть $h \in E(D) \cap [0, +\infty)$ фиксировано, и существует точка $\hat{x} \in \mathbb{R}_+^n$ такая, что $D(\hat{x}) = h$ и $\hat{x}_i \leq \varphi_i(d, \hat{x}) \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ такого, что $\varphi_i(d, x(0)) \geq \hat{x}_i$, $i = 1, \dots, n$, функция $H(\bar{u}, x(0))$ достигает значения h при следующем режиме эксплуатации:

$$u(1) = \left(1 - \frac{\hat{x}_1}{X_1(1)}, \dots, 1 - \frac{\hat{x}_n}{X_n(1)}\right); \quad u(k) = \left(1 - \frac{\hat{x}_1}{\varphi_1(d, \hat{x})}, \dots, 1 - \frac{\hat{x}_n}{\varphi_n(d, \hat{x})}\right), \quad k \geq 2. \quad (3.1)$$

Доказательство. Поскольку $\varphi_i(d, x(0)) \geq 0$ и $X_i(1) = \varphi_i(d, x(0)) \geq \hat{x}_i$, $i = 1, \dots, n$, то $u(1) \in [0, 1]^n$. Из условия $\hat{x}_i \leq \varphi_i(d, \hat{x}) \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ следует, что $u(k) \in [0, 1]^n$, $k \geq 2$. При управлениях $\bar{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots)$, указанных в (3.1), найдем

$$x(d) = (1 - u(1))X(1) = \frac{\hat{x}}{X(1)}X(1) = \hat{x},$$

$$X(2) = \varphi(d, x(1)) = \varphi(d, \hat{x}), \quad x(2d) = (1 - u(2))X(2) = \frac{\hat{x}}{\varphi(d, \hat{x})}\varphi(d, \hat{x}) = \hat{x}.$$

Аналогично,

$$x(kd) = \hat{x}, \quad X(k) = \varphi(d, \hat{x}), \quad \text{для всех } k \geq 2. \quad (3.2)$$

Далее, из (1.2) и (3.2) следует, что

$$\begin{aligned} H(\bar{u}, x(0)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^n C_i X_i(1) u_i(1) + \sum_{j=2}^k \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(d, \hat{x}) \left(1 - \frac{\hat{x}_i}{\varphi_i(d, \hat{x})}\right) \right) \\ &= 0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=2}^k \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, \hat{x}) - \hat{x}_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-1}{k} \cdot D(\hat{x}) = h. \end{aligned}$$

Таким образом, при режиме эксплуатации (3.1) выполнено $H(\bar{u}, x(0)) = h$. $\square$

Отметим, что при некоторых значениях h точку $\hat{x}$ можно выбрать только так, что у нее будет равна нулю одна из координат. Управления, при которых $H(\bar{u}, x(0))$ достигает данного значения h , приведены в следующем утверждении, которое доказывается аналогично теореме 3.1.

Теорема 3.2. Пусть $h \in E(D) \cap [0, +\infty)$ фиксировано. Предположим, что существуют точка $\hat{x} \in \mathbb{R}_+^n$ и непустое подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ такие, что:

- (1) $D(\hat{x}) = h$;
- (2) $\hat{x}_i \leq \varphi_i(d, \hat{x}) \neq 0$ для всех $i \in I$;
- (3) $\varphi_i(kd, \hat{x}) = 0$ для всех $i \notin I$, $k = 1, 2, \dots$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ выполнены неравенства (2.5), то функция $H(\bar{u}, x(0))$ достигает значения h при следующем режиме эксплуатации:

$$\begin{aligned} \text{если } i \in I, \text{ то } u_i(1) &= 1 - \frac{\hat{x}_i}{\varphi_i(d, x(0))} \text{ и } u_i(k) = 1 - \frac{\hat{x}_i}{\varphi_i(d, \hat{x})} \text{ при } k \geq 2; \\ \text{если } i \notin I, \text{ то } u_i(1) &= 1 \text{ и } u_i(k) = 0 \text{ при } k \geq 2. \end{aligned}$$

Пример 3.2. Рассмотрим модель конкуренции двух видов x_1 и x_2 , которая описана в [12, с. 147]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c - ax_1 - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (c - ax_2 - bx_1)x_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Предполагаем, что все коэффициенты системы положительные и $a \leq b$. Следующее утверждение доказано в [10] при $C_1 \leq C_2$; случай $C_1 > C_2$ рассматривается аналогично.

Предложение 3.1. Пусть в системе (3.3) $a \leq b$ и $C_1 \leq C_2$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^2$ такого, что $\varphi_2(d, x(0)) \geq x_2^* = \frac{c}{a(e^{cd/2} + 1)}$, функция $H_*(\bar{u}, x(0))$ достигает наибольшего значения

$$H(\bar{u}^*, x(0)) = D(0, x_2^*) = \frac{c C_2 (e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}$$

при следующем режиме эксплуатации:

$$u^*(1) = \left(1, 1 - \frac{x_2^*}{\varphi_2(d, x(0))}\right); \quad u^*(k) = (0, 1 - e^{-cd/2}), \quad k \geq 2.$$

Следовательно, для достижения наибольшей средней временной выгоды нужно извлекать только один вид ресурса — тот, который имеет большую стоимость.

Из теоремы 3.1 и предложения 3.1 получаем, что для модели (3.3) можно достичь фиксированной средней временной выгоды $H(\bar{u}, x(0)) = h \in [0, D(0, x_2^*)]$ и нельзя добиться значения $H(\bar{u}, x(0))$, большего, чем $D(0, x_2^*)$.

References

- [1] D.D. Bainov, “Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population”, *Applied Mathematics and Computation*, **39**:1 (1990), 37–48.
- [2] А. И. Абакумов, “Оптимальный сбор урожая в популяциях (модели с непрерывным временем)”, *Математическое моделирование*, **5**:11 (1993), 41–52. [A.I. Abakumov, “Populations optimal harvest (time continuous models)”, *Matem. Mod.*, **5**:11 (1993), 41–52 (In Russian)].
- [3] Г. П. Неверова, О. Л. Жданова, Е. Я. Фрисман, “Динамические режимы структурированного сообщества хищник-жертва и их изменение в результате антропогенного изъятия особей”, *Математическая биология и биоинформатика*, **15**:1 (2020), 73–92. [G.P. Neverova, O.L. Zhdanova, E.Ya. Frisman, “Dynamics of predator-prey community with age structures and its changing due to harvesting”, *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **15**:1 (2020), 73–92 (In Russian)].

- [4] А. И. Абакумов, Ю. Г. Израильский, “Эффекты промыслового воздействия на рыбную популяцию”, *Математическая биология и биоинформатика*, **11:2** (2016), 191–204. [A. I. Abakumov, Yu. G. Izraily, “The harvesting effect on a fish population”, *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **11:2** (2016), 191–204 (In Russian)].
- [5] Г. П. Неверова, А. И. Абакумов, Е. Я. Фрисман, “Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования”, *Математическая биология и биоинформатика*, **11:1** (2016), 1–13. [G. P. Neverova, A. I. Abakumov, E. Ya. Frisman, “Dynamic modes of exploited limited population: results of modeling and numerical study”, *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **11:1** (2016), 1–13 (In Russian)].
- [6] А. О. Беляков, А. А. Давыдов, “Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса”, *Труды ИММ УрО РАН*, **22:2** (2016), 38–46; англ. пер.: А. О. Belyakov, A. A. Davydov, “Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **299:suppl. 1** (2017), 14–21.
- [7] А. А. Давыдов, “Существование оптимальных стационарных состояний эксплуатируемых популяций с диффузией”, *Избранные вопросы математики и механики*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Валерия Васильевича Козлова, Труды МИАН, **310**, МИАН, М., 2020, 135–142; англ. пер.: А. А. Davydov, “Existence of optimal stationary states of exploited populations with diffusion”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **310** (2020), 124–130.
- [8] А. В. Егорова, Л. И. Родина, “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **29:4** (2019), 501–517. [A. V. Egorova, L. I. Rodina, “On optimal harvesting of renewable resource from the structured population”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **29:4** (2019), 501–517 (In Russian)].
- [9] А. В. Егорова, “Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26:133** (2021), 15–25. [A. V. Egorova, “Optimization of discounted income for a structured population exposed to harvesting”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26:133** (2021), 15–25 (In Russian)].
- [10] М. С. Волдеаб, Л. И. Родина, “О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, **1** (2022), 12–24. [M. S. Woldeab, L. I. Rodina, “About the methods of biological resource extraction, providing the maximum average time benefit”, *Russian Mathematics*, **1** (2022), 12–24 (In Russian)].
- [11] О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, *Математическое моделирование процессов отбора*, Изд-во Нижегородского ун-та, Нижний Новгород, 2007. [O. A. Kuzenkov, E. A. Ryabova, *Matematicheskoe Modelirovanie Processov Otbora*, Nizhny Novgorod University Press, Nizhny Novgorod, 2007 (In Russian)].
- [12] Г. Ю. Ризниченко, *Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1*, Математическая биология, биофизика, Издательство «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2002, 560 с. [G. Yu. Riznichenko, *Lectures on Mathematical Models in Biology. Part 1*, Mathematical biology, biophysics, Publisher “Regular and Chaotic Dynamics”, Izhevsk, 2002 (In Russian), 560 pp.]

Информация об авторах

Волдеаб Мебрахтом Себхату, аспирант, кафедра функционального анализа и его приложений. Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация. E-mail: mebseb2018@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1586-4728>

Information about the authors

Mebrahtom S. Woldeab, Post-Graduate Student, Functional Analysis and its Applications Department. Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation.
 E-mail: mebseb2018@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1586-4728>

Родина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений. Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, г. Владимир; профессор кафедры математики. Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация. E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Родина Людмила Ивановна
E-mail: LRodina67@mail.ru

Поступила в редакцию 03.12.2021 г.
Поступила после рецензирования 15.02.2022 г.
Принята к публикации 10.03.2022 г.

Ludmila I. Rodina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis and its Applications Department. Vladimir State University, Vladimir; Professor of the Mathematics Department. National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation. E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Lyudmila I. Rodina
E-mail: LRodina67@mail.ru

Received 03.12.2021
Reviewed 15.02.2022
Accepted for press 10.03.2022

© Мерчела В., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-27-36

УДК 517.988.6, 515.124.2



Включения с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием

Вассим МЕРЧЕЛА^{1,2}

¹ ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

² ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9

Аннотация. В статье исследуется включение, в котором многозначное отображение действует из метрического пространства (X, ρ) во множество Y с расстоянием d . Это расстояние удовлетворяет только первой аксиоме метрики: $d(y_1, y_2)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $y_1 = y_2$. Расстояние не обязано быть симметричным и удовлетворять неравенству треугольника. Для пространства (Y, d) определены простейшие понятия (шара, сходимости, расстояния от точки до множества), а для многозначного отображения $G : X \rightrightarrows Y$ введены множества накрывания, липшицевости и замкнутости. В этих терминах (позволяющих адаптировать к отображениям со значениями в (Y, d) классические условия накрывания, липшицевости и замкнутости отображений метрических пространств и ослабить такие условия) формулируется теорема о разрешимости включения $F(x, x) \ni \hat{y}$ и дается оценка отклонения в пространстве (X, ρ) множества решений от заданного элемента $x_0 \in X$. Основными условиями полученного утверждения являются принадлежность при любом x из некоторого шара пары $(x, \hat{y})$ множеству α -накрывания отображения $F(\cdot, x)$ и множеству β -липшицевости отображения $F(x, \cdot)$, где $\alpha > \beta$. Доказательство соответствующего утверждения основано на построении последовательностей $\{x_n\} \subset X$ и $\{y_n\} \subset Y$, удовлетворяющих соотношениям

$$y_n \in F(x_n, x_n), \quad \hat{y} \in F(x_{n+1}, x_n), \quad \alpha\rho(x_{n+1}, x_n) \leq d(\hat{y}, y_n) \leq \beta\rho(x_n, x_{n-1}).$$

Также в статье получены достаточные условия устойчивости решений рассматриваемого включения к изменениям многозначного отображения F и элемента $\hat{y}$.

Ключевые слова: метрика, расстояние, включение, существование решения, накрывающее многозначное отображение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075–15–2019–1619.

Для цитирования: Мерчела В. Включения с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 27–36. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-27-36.

Inclusions with mappings acting from a metric space to a space with distance

Wassim MERCHELA^{1,2}

¹ Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

² St. Petersburg University

7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg 1990342, Russian Federation

Abstract. The article deals with an inclusion in which a multivalued mapping acts from a metric space (X, ρ) into a set Y with distance d . This distance satisfies only the first axiom of the metric: $d(y_1, y_2)$ is equal to zero if and only if $y_1 = y_2$. The distance does not have to be symmetric or to satisfy the triangle inequality. For the space (Y, d) , the simplest concepts (of a ball, convergence, the distance from a point to a set) are defined, and for a multivalued map $G : X \rightrightarrows Y$, the sets of covering, Lipschitz and closedness are introduced. In these terms (allowing us to adapt the classical conditions of covering, Lipschitz property and closedness of mappings of metric spaces to the maps with values in (Y, d) and to weaken such conditions), a theorem on solvability of the inclusion $F(x, x) \ni \hat{y}$ is formulated, and an estimate for the deviation in the space (X, ρ) of the set of solutions from a given element $x_0 \in X$ is given. The main conditions of the obtained statement are the following: for any x from some ball, the pair $(x, \hat{y})$ belongs to the α -covering set of the mapping $F(\cdot, x)$ and to the β -Lipschitz set of the mapping $F(x, \cdot)$, where $\alpha > \beta$. The proof of the corresponding statement is based on the construction of the sequences $\{x_n\} \subset X$ and $\{y_n\} \subset Y$ satisfying the relations

$$y_n \in F(x_n, x_n), \quad \hat{y} \in F(x_{n+1}, x_n), \quad \alpha\rho(x_{n+1}, x_n) \leq d(\hat{y}, y_n) \leq \beta\rho(x_n, x_{n-1}).$$

Also, in the paper, we obtain sufficient conditions for the stability of solutions of the considered inclusion to changes in the multivalued mapping F and in the element $\hat{y}$.

Keywords: metric, distance, inclusion, existence of solution, covering multivalued mapping

Acknowledgements: The work is supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement № 075–15–2019–1619.

Mathematics Subject Classification: 47J22, 47H04, 47H04.

For citation: Merchela W. Vklucheniya s otobrazheniyami, dejstvuyushchimi iz metricheskogo prostranstva v prostranstvo s rasstoyaniem [Inclusions with mappings acting from a metric space to a space with distance]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 27–36. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-27-36. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теории накрывающих отображений нормированных и метрических пространств, ее приложениям к экстремальным задачам посвящены работы Е. Р. Авакова, А. В. Арутюнова, Б. Д. Гельмана, А. В. Дмитрука, А. Д. Иоффе, Е. С. Жуковского, С. Е. Жуковского, А. А. Милютина, Б. С. Мордуховича, В. В. Обуховского, Н. П. Осмоловского, В. М. Тихомирова, А. Удерзо, Т. Н. Фоменко и других авторов. Приведем краткое описание некоторых работ, наиболее близких по тематике к данному исследованию.

Более 40 лет назад А. А. Милютиным доказана теорема, утверждающая, что сумма α -накрывающего и β -липшицева отображений, действующих из метрического пространства X в линейное метрическое пространство Y , при $\alpha > \beta$ есть $\alpha - \beta$ -накрывающее отображение (см. [1]). Это утверждение играет важную роль в теории экстремума для оценки расстояния от произвольной точки $x \in X$ до уровня $G^{-1}(y)$ отображения $G : X \rightarrow Y$. Работа А. В. Арутюнова [2] открыла возможности использования накрывающих отображений в теории уравнений и включений, включая исследования точек совпадения отображений, действующих из метрического пространства X в метрическое пространство Y . Точкой совпадения отображений $\psi, \varphi : X \rightarrow Y$ называют $x \in X$, удовлетворяющий уравнению $\psi(x) = \varphi(x)$. Важно, что в [2] рассмотрены не только «обычные», но и многозначные отображения. Для многозначных отображений $\Psi, \Phi : X \rightrightarrows Y$ точка совпадения — это элемент $x \in X$ такой, что $\Psi(x) \cap \Phi(x) \neq \emptyset$. Согласно теореме Арутюнова, если одно из отображений α -накрывающее, а второе — β -липшицево и $\alpha > \beta$, то точка совпадения существует. Распространению и приложениям теоремы Арутюнова посвящены многие работы (см. [3–6] и библиографию этих работ). Существование точки совпадения при условиях локального накрывания и липшицевости отображений Ψ, Φ доказано в [7]; условия устойчивости точек совпадения к малым изменениям отображений исследованы в [8, 9]. В работах [10–12] получены утверждения о нелинейных липшицевых возмущениях накрывающих отображений метрических пространств, а именно рассмотрено уравнение $F(x, x) = \hat{y}$ относительно неизвестного $x \in X$, где отображение $F : X \times X \rightarrow Y$ предполагается α -накрывающим по первому аргументу и β -липшицевым по второму. Аналогичные результаты для многозначных отображений получены в [13].

В процитированных работах результаты о накрывающих отображениях применялись к исследованию неявных дифференциальных и интегральных уравнений и включений. В связи с исследованиями систем различных функциональных уравнений, краевых задач, задач управления и экстремальных задач возникла потребность в распространении результатов о накрывающих отображениях на пространства с обобщенными метриками. В [14–16] определен аналог свойства накрывания для отображений, действующих в пространствах с векторнозначными метриками, и для таких отображений получены утверждения о липшицевых возмущениях. В [17] доказана теорема о точках совпадения отображений в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах. Распространению утверждений о неподвижных точках и точках совпадений на отображения f -квазиметрических пространств посвящены работы [18, 19]. В [20–23] рассмотрена задача о липшицевых возмущениях накрывающих отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющим лишь аксиоме тождества.

В данной работе исследуется задача о липшицевых возмущениях многозначных накрывающих отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющим лишь аксиоме тождества.

1. Основные понятия

Будем обозначать $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$. Дополним «обычную» упорядоченность вещественных чисел отношением $+\infty > r$, справедливым при любом $r \in \mathbb{R}_+$.

Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho : X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Обозначим $B_X(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}$ — замкнутый шар в X с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (естественно полагаем, что $B_X(x_0, +\infty) = X$ при любом x_0).

Пусть также задано множество $Y \neq \emptyset$. Расстоянием в Y называют отображение $d : Y \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ такое, что

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2. \quad (1.1)$$

В отличие от метрики, расстояние может быть несимметричным (т. е. для некоторых $y_1, y_2 \in Y$ возможно, что $d(y_1, y_2) \neq d(y_2, y_1)$) и может не удовлетворять неравенству треугольника (т. е. для некоторых $y_1, y_2, y_3 \in Y$ возможно, что $d(y_1, y_3) \not\leq d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3)$).

Как и в метрическом пространстве, в пространстве с расстоянием определим замкнутый шар формулой $B_Y(y_0, r) = \{y \in Y : d(y_0, y) \leq r\}$. Определим еще и понятие сходимости в пространстве с расстоянием. А именно, будем говорить, что последовательность $\{y_i\} \subset Y$ *сходится* к элементу $y \in Y$ и писать $y_i \rightarrow y$, если $d(y, y_i) \rightarrow 0$. В отличие от метрического пространства, в пространстве с расстоянием предел последовательности может быть не единственным, а из сходимости $d(y, y_i) \rightarrow 0$ не следует «симметричная» сходимость $d(y_i, y) \rightarrow 0$.

Определим расстояние в Y от элемента $y \in Y$ до множества $V \subset Y$ формулой

$$\text{dist}(y, V) = \inf_{v \in V} d(y, v).$$

Ниже рассматриваются включения с многозначными отображениями, действующими из метрического пространства X в пространство Y , наделенное расстоянием. Напомним, что многозначным называется отображение $G : X \rightrightarrows Y$, сопоставляющее любому $x \in X$ некоторое непустое множество $G(x) \subset Y$. Пусть задано множество $U \subset X$ и числа $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. Для характеристики необходимых в нашем исследовании свойств многозначного отображения $G : X \rightrightarrows Y$ определим следующие множества:

$$\text{Cl}[G; U] = \{(x, y) \in X \times Y : \forall \{x_n\} \subset U \quad x_n \rightarrow x, \quad \forall y_n \in G(x_n) \quad y_n \rightarrow y \Rightarrow y \in G(x)\},$$

$$\text{Cov}_\alpha[G; U] = \{(x, y) \in X \times Y : \forall z \in G(x) \quad \exists u \in U \quad y \in G(u), \quad \rho(x, u) \leq \frac{d(y, z)}{\alpha}, \quad \rho(x, u) < \infty\},$$

$$\text{Lip}_\beta[G; U] = \{(x, y) \in X \times Y : \forall u \in U \quad y \in G(u) \Rightarrow \exists z \in G(x) \quad d(y, z) \leq \beta \rho(x, u)\},$$

которые будем называть, соответственно, множествами *замкнутости*, α -*накрывания* и β -*липшицевости* многозначного отображения G относительно U . Соответствующие множества для однозначных отображений метрических пространств были введены в [24], а в [20, 22] эти определения были распространены на однозначные отображения, действующие из метрического пространства в пространство с расстоянием. Предлагаемое определение распространяет определение [20, 22] на многозначные отображения.

Отметим, что для определенных здесь множеств замкнутости, α -накрывания и β -липшицевости многозначного отображения G выполнено следующее соотношение:

$$\forall U, \bar{U} \subset X \quad U \subset \bar{U} \Rightarrow \\ \text{Cl}[G; U] \supset \text{Cl}[G; \bar{U}], \quad \text{Cov}_\alpha[G; U] \subset \text{Cov}_\alpha[G; \bar{U}], \quad \text{Lip}_\beta[G; U] \supset \text{Lip}_\beta[G; \bar{U}]. \quad (1.2)$$

2. Включение с отображениями, действующими из метрического пространства в множество, снабженное расстоянием

Пусть заданы многозначное отображение $F : X \times X \rightrightarrows Y$ и элемент $\hat{y} \in Y$. Рассмотрим включение

$$G(x) := F(x, x) \ni \hat{y} \quad (2.1)$$

с неизвестным $x \in X$. Сформулируем условия его разрешимости.

Теорема 2.1. Пусть метрическое пространство X является полным, $\alpha > \beta \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$ и

$$R := \frac{1}{\alpha - \beta} \text{dist}(\hat{y}, F(x_0, x_0)) < \infty. \quad (2.2)$$

Предположим, что для любого $x \in U := B_X(x_0, (1 + \varepsilon)R)$ выполнены включения

$$(x, \hat{y}) \in \text{Cov}_\alpha[F(\cdot, x); X], \quad (x, \hat{y}) \in \text{Lip}_\beta[F(x, \cdot); U], \quad (x, \hat{y}) \in \text{Cl}[G; U].$$

Тогда в шаре U существует решение включения (2.1).

Доказательство. Если элемент x_0 является решением включения (2.1), то утверждение теоремы, очевидно, справедливо. Поэтому будем предполагать, что x_0 не удовлетворяет рассматриваемому включению.

В силу определения расстояния в пространстве Y от точки до множества существует элемент $y_0 \in Y$ такой, что

$$d(\hat{y}, y_0) \leq (1 + \varepsilon) \text{dist}(\hat{y}, F(x_0, x_0)).$$

Покажем, что существуют две последовательности $\{x_n\}_{n=0}^\infty \subset X$ и $\{y_n\}_{n=0}^\infty \subset Y$ такие, что при любом $n = 1, 2, \dots$ выполнены условия:

$$\begin{aligned} y_n &\in F(x_n, x_n), \quad \hat{y} \in F(x_{n+1}, x_n), \\ \alpha \rho(x_{n+1}, x_n) &\leq d(\hat{y}, y_n) \leq \beta \rho(x_n, x_{n-1}), \\ \rho(x_{n+1}, x_0) &\leq \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}(\alpha - \beta)} d(\hat{y}, y_0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Будем доказывать это утверждение методом математической индукции. Но прежде всего отметим, что в оценке расстояния $\rho(x_n, x_0)$ в заключительном соотношении (2.3) имеем

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^n(\alpha - \beta)} d(\hat{y}, y_0) \leq R.$$

Таким образом, для элементов определяемой здесь последовательности при любом n будет выполнено $x_n \in U$.

Сначала проверим соотношения (2.3) при $n = 1$. Очевидно, выполнено $x_0 \in U$, поэтому $(x_0, \hat{y}) \in \text{Cov}_\alpha[F(\cdot, x_0); X]$. Из этого включения следует существование элемента $x_1 \in X$ такого, что

$$\hat{y} \in F(x_1, x_0), \quad \rho(x_1, x_0) \leq \frac{1}{\alpha} d(\hat{y}, y_0) < R.$$

Так как $x_1 \in U$, имеем $(x_1, \hat{y}) \in \text{Lip}_\beta[F(x_1, \cdot); U]$, таким образом, существует $y_1 \in F(x_1, x_1)$ такой, что справедливо неравенство

$$d(\hat{y}, y_1) \leq \beta \rho(x_1, x_0).$$

И, повторяя рассуждения для $x_1 \in U$, получаем $(x_1, \hat{y}) \in \text{Cov}_\alpha[F(\cdot, x_1); X]$, вследствие чего существует элемент $x_2 \in X$ такой, что

$$\hat{y} \in F(x_2, x_1), \quad \rho(x_2, x_1) \leq \frac{1}{\alpha} d(\hat{y}, y_1) \leq \frac{\beta}{\alpha} \rho(x_1, x_0).$$

Из последнего неравенства получаем

$$\rho(x_2, x_0) \leq \rho(x_2, x_1) + \rho(x_1, x_0) \leq \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \rho(x_1, x_0) \leq \frac{\beta + \alpha}{\alpha^2} d(\hat{y}, y_0) = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2(\beta - \alpha)} d(\hat{y}, y_0).$$

Итак, для $n = 1$ соотношения (2.3) выполнены.

Предположим, что соотношения (2.3) справедливы для всех натуральных $n \leq k$, в частности, при $n = k$ имеем:

$$\begin{aligned} y_k &\in F(x_k, x_k), \quad \hat{y} \in F(x_{k+1}, x_k), \\ \alpha \rho(x_{k+1}, x_k) &\leq d(\hat{y}, y_k) \leq \beta \rho(x_k, x_{k-1}), \\ \rho(x_{k+1}, x_0) &\leq \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha^{k+1}(\alpha - \beta)} d(\hat{y}, y_0) < R. \end{aligned}$$

В силу принятых предположений, поскольку $x_{k+1} \in U$, имеем $(x_{k+1}, \hat{y}) \in \text{Lip}_\beta[F(x_{k+1}, \cdot); U]$ и $(x_{k+1}, \hat{y}) \in \text{Cov}_\alpha[F(\cdot, x_{k+1}); X]$. Согласно первому из этих включений найдется элемент $y_{k+1} \in Y$ такой, что

$$y_{k+1} \in F(x_{k+1}, x_{k+1}), \quad d(\hat{y}, y_{k+1}) \leq \beta \rho(x_{k+1}, x_k).$$

А согласно второму — существует $x_{k+2} \in X$, удовлетворяющий соотношениям

$$\hat{y} \in F(x_{k+2}, x_{k+1}), \quad \rho(x_{k+2}, x_{k+1}) \leq \frac{1}{\alpha} d(\hat{y}, y_{k+1}).$$

Таким образом,

$$\rho(x_{k+2}, x_{k+1}) \leq \frac{1}{\alpha} d(\hat{y}, y_{k+1}) \leq \frac{\beta}{\alpha} \rho(x_{k+1}, x_k).$$

Так как аналогичное соотношение $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{-1} \beta \rho(x_n, x_{n-1})$ справедливо при любом натуральном $n \leq k$, получаем

$$\rho(x_{k+2}, x_{k+1}) \leq \frac{\beta^{k+1}}{\alpha^{k+1}} \rho(x_1, x_0) \leq \frac{\beta^{k+1}}{\alpha^{k+2}} d(\hat{y}, y_0).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \rho(x_0, x_{k+2}) &\leq \rho(x_0, x_{k+1}) + \rho(x_{k+1}, x_{k+2}) \\ &\leq \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha^{k+1}(\alpha - \beta)} d(\hat{y}, y_0) + \frac{\beta^{k+1}}{\alpha^{k+2}} d(\hat{y}, y_0) = \frac{\alpha^{k+2} - \beta^{k+2}}{\alpha^{k+2}(\alpha - \beta)} d(\hat{y}, y_0). \end{aligned}$$

Итак, для $n = k + 1$ все соотношения (2.3) выполнены.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. При любых натуральных n, m , $n < m$ имеем

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=n}^{m-1} \frac{\beta^i}{\alpha^i} d(\hat{y}, y_0) \leq \frac{\beta^n}{\alpha^n} \frac{1}{\alpha - \beta} d(\hat{y}, y_0). \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$, полагая

$$N = \log_{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\varepsilon(\alpha - \beta)}{d(\hat{y}, y_0)},$$

получим, что при всех натуральных n, m , $m > n > N$ выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset U$ в полном пространстве X сходится к некоторой точке $\hat{x} \in U$. Из неравенства

$$d(\hat{y}, y_n) \leq \beta \rho(x_{n+1}, x_n)$$

следует сходимость $d(\hat{y}, y_n) \rightarrow 0$. А так как $(x, \hat{y}) \in \text{Cl}[G; U]$, то $\hat{y} \in G(x)$. $\square$

Отметим, что использование в теореме 2.1 понятия множества замкнутости $\text{Cl}[G; U]$ многозначного отображения G позволяет существенно ослабить требования непрерывности или замкнутости G на множестве U , традиционные для теорем о неподвижных точках (см. [18]), теорем о точках совпадения (см. [2, 16, 17, 25]) и теорем о более общих операторных уравнениях и включениях (см. [11, 13, 15]). В частности, для замкнутости однозначного отображения необходимо, чтобы любая сходящаяся последовательность его значений имела единственный предел, но для многих обобщенно метрических пространств ситуация единственности предела не типична (см. [17, 18]).

Из доказанной здесь теоремы 2.1 в случае, если пространство Y метрическое, следует результат о возмущениях многозначного накрывающего отображения, полученный в [13]. Для однозначных отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, из теоремы 2.1 выводятся утверждения, полученные в [20–23], а также соответствующие результаты [10–12] об отображениях метрических пространств.

3. Устойчивость решений включения к изменениям порождающего отображения и правой части

Здесь мы получим достаточные условия разрешимости включения, полученного из включения (2.1) изменениями многозначного отображения $F : X \times X \rightrightarrows Y$ и элемента $\hat{y} \in Y$, а также сходимости решений последовательности «возмущенных» включений к решению включения (2.1) при сходимости в некотором смысле последовательности измененных отображений $F_i : X \times X \rightrightarrows Y$ к отображению F и сходимости последовательности элементов $\hat{y}_i \in Y$ к элементу $\hat{y}$.

Итак, пусть для любого натурального i заданы элемент $\hat{y}_i \in Y$ и многозначное отображение $F_i : X \times X \rightrightarrows Y$. Рассмотрим включение

$$G_i(x) := F_i(x, x) \ni \hat{y}_i \quad (3.1)$$

относительно неизвестного $x \in X$. Пусть также задано решение ξ включения (2.1).

Теорема 3.1. Пусть метрическое пространство X является полным, при любом $i = 1, 2, \dots$ заданы $\alpha_i > \beta_i \geq 0$. Предположим, что существует такое $\delta > 0$, что при всех i для любого $x \in U_\delta := B_X(\xi, \delta)$ выполнены включения

$$(x, \widehat{y}_i) \in \text{Cov}_\alpha[F_i(\cdot, x); X], \quad (x, \widehat{y}_i) \in \text{Lip}_\beta[F_i(x, \cdot); U_\delta], \quad (x, \widehat{y}_i) \in \text{Cl}[G_i; U_\delta].$$

Тогда, если имеет место сходимость

$$R_i := \frac{1}{\alpha_i - \beta_i} \text{dist}(\widehat{y}_i, F_i(\xi, \xi)) \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

то найдется номер I , начиная с которого при любом $i > I$ включение (3.1) обладает таким решением ξ_i , что $\xi_i \rightarrow \xi$ (в метрическом пространстве X).

Доказательство. Определим номер I так, чтобы при всех $i > I$ было выполнено неравенство $R_i < \delta/3$. Выберем $\varepsilon = 1/2$ и определим шар $U_i := B_X(\xi, (1 + \varepsilon)R_i)$. Очевидно выполнено соотношение

$$U_i \subset B_X(\xi, \delta/2) \subset U_\delta.$$

В силу соотношений (1.2), из предположений доказываемого утверждения следует, что при каждом $i > I$ для любого $x \in U_i$ выполнены включения

$$(x, \widehat{y}_i) \in \text{Cov}_\alpha[F_i(\cdot, x); X], \quad (x, \widehat{y}_i) \in \text{Lip}_\beta[F_i(x, \cdot); U_i], \quad (x, \widehat{y}_i) \in \text{Cl}[G_i; U_i].$$

Таким образом, включение (3.1) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1 (если полагать $x_0 = \xi$). Согласно теореме 2.1 в шаре U_i существует решение ξ_i включения (3.1). Так как последовательность радиусов $(1 + \varepsilon)R_i$ шаров U_i при $i \rightarrow \infty$ сходится к нулю, получаем $\xi_i \rightarrow \xi$. $\square$

Отметим, что близкие утверждения об устойчивости решений уравнений и точек совпадения к малым изменениям отображений в случае, когда оба пространства X и Y метрические, получены в [8, 9].

References

- [1] А. В. Дмитрук, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, “Теорема Люстерника и теория экстремума”, *УМН*, **35**:6(216) (1980), 11–46; англ. пер.: A. V. Dmitruk, A. A. Milyutin, N. P. Osmolovskii, “Lyusternik’s theorem and the theory of extrema”, *Russian Math. Surveys*, **35**:6 (1980), 11–51.
- [2] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады Академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.
- [3] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, Z. T. Zhukovskaya, “Kantorovich’s Fixed Point Theorem and Coincidence Point Theorems for Mappings in Vector Metric Spaces”, *Set-Valued Var. Anal.*, 2021.
- [4] B. Zhang, W. Ouyang, “Coincidence points for set-valued mappings with directional regularity”, *Fixed Point Theory*, **22**:1 (2021), 391–406.
- [5] Ю. Н. Захарян, Т. Н. Фоменко, “О сохранении совпадений у однопараметрического семейства пар многозначных отображений типа Замфиреску”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех.*, 2021, № 1, 28–34. [Yu. N. Zakharyan, T. N. Fomenko, “Coincidence preservation for a one-parameter family of pairs of Zamfirescu type multi-valued mappings”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2021, № 1, 28–34 (In Russian)].

- [6] Е. С. Жуковский, “О точках совпадения векторных отображений”, *Изв. вузов. Матем.*, 2016, № 10, 14–28; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “On Coincidence Points for Vector Mappings”, *Russian Mathematics*, **60**:10 (2016), 10–22.
- [7] A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk, V. Obukhovskii, “Locally covering maps in metric spaces and coincidence points”, *J. Fixed Points Theory and Applications*, **5**:1 (2009), 105–127.
- [8] А. В. Арутюнов, “Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений”, *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 163–169; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Stability of coincidence points and properties of covering mappings”, *Mathematical Notes*, **86** (2009), 153–158.
- [9] A. V. Arutyunov, E. R. Avakov, S. E. Zhukovskiy, “Stability theorems for estimating the distance to a set of coincidence points”, *SIAM Journal on Optimization*, **25**:2 (2015), 807–828.
- [10] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634; англ. пер.: E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, “Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.
- [11] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **75**:3 (2012), 1026–1044.
- [12] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:11 (2011), 1523–1537; англ. пер.: A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, S. E. Zhukovskii, “On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **47**:11 (2011), 1541–1555.
- [13] Aram Arutyunov, Valeriano Antunes de Oliveira, Fernando Lobo Pereira, Evgeniy Zhukovskiy, Sergey Zhukovskiy, “On the solvability of implicit differential inclusions”, *Applicable Analysis*, **94**:1 (2015), 129–143.
- [14] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:4 (2013), 439–455; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, “Covering mappings in a product of metric spaces and boundary value problems for differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **49**:4 (2013), 420–436.
- [15] Е. С. Жуковский, “О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:2 (2016), 297–311; англ. пер.: E. S. Zhukovskii, “Perturbations of vectorial coverings and systems of equations in metric spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **57**:2 (2016), 230–241.
- [16] Е. С. Жуковский, “О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств”, *Матем. заметки*, **100**:3 (2016), 344–362; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “On Coincidence Points of Multivalued Vector Mappings of Metric Spaces”, *Mathematical Notes*, **100**:3 (2016), 363–379.
- [17] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2) -квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Докл. РАН*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2) -quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.
- [18] Е. С. Жуковский, “Неподвижные точки сжимающих отображений f -квазиметрических пространств”, *Сиб. матем. журн.*, **59**:6 (2018), 1338–1350; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “The fixed points of contractions of f -quasimetric spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **59**:6 (2018), 1063–1072.
- [19] Т. Н. Фоменко, “Существование нулей многозначных функционалов, совпадения и неподвижные точки в f -квазиметрическом пространстве”, *Матем. заметки*, **110**:4 (2021), 598–609; англ. пер.: T. N. Fomenko, “The Existence of Zeros of Multivalued Functionals, Coincidence Points, and Fixed Points in f -Quasimetric Spaces”, *Math. Notes*, **110**:4 (2021), 583–591.
- [20] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “О накрывающих отображениях в обобщенных метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений”, *Уфимский математический журнал*, **12**:4 (2020), 42–55; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, “On covering mappings in generalized metric spaces in studying implicit differential equations”, *Ufa Mathematical Journal*, **12**:4 (2020), 42–55.

- [21] В. Мерчела, “К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 65–73. [W. Merchela, “About Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 65–73 (In Russian)].
- [22] С. Бенараб, Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 52–63. [S. Benarab, E. S. Zhukovskii, W. Merchela, “Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **25**, 2019, 52–63 (In Russian)].
- [23] Т. В. Жуковская, В. Мерчела, А. И. Шиндяпин, “О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика.*, **26**:4 (2020), 52–63. [T. V. Zhukovskaia, A. I. Shindiapin, W. Merchela, “On the coincidence points of the mappings in generalized metric spaces”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:4 (2020), 52–63 (In Russian)].
- [24] Е. О. Бурлаков, Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, Н. П. Пучков, “Приложения накрывающих отображений в теории неявных дифференциальных уравнений”, *Материалы IV Международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики". Кабардино-Балкарская республика, Нальчик, Приэльбрусье, 22–26 мая 2018 г. Часть I, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **165**, ВИНТИ РАН, М., 2019, 21–33. [E. O. Burlakov, T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, N. P. Puchkov, “Applications of covering mappings in the theory of implicit differential equations”, *Proceedings of the IV International Scientific Conference "Actual Problems of Applied Mathematics". Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, Elbrus Region, May 22–26, 2018. Part I, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, **165**, VINITI, Moscow, 2019, 21–33].
- [25] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств”, *Матем. сб.*, **209**:8 (2018), 3–28; англ. пер.: A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On covering mappings in generalized metric spaces in studying implicit differential equations”, *Sbornik: Mathematics*, **209**:8 (2018), 1107–1130.

Информация об авторе

Мерчела Вассим, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов; Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург. Российская Федерация. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3702-0932>

Information about the author

Wassim Merchela, Post-Graduate Student. Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov; St. Petersburg University, St. Petersburg, Russian Federation. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3702-0932>

Поступила в редакцию 27.12.2021 г.
 Поступила после рецензирования 01.03.2022 г.
 Принята к публикации 10.03.2022 г.

Received 27.12.2021
 Reviewed 01.03.2022
 Accepted for press 10.03.2022

© Митрохин С.И., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-37-57

УДК 517.43



Спектральные свойства дифференциального оператора четного порядка с разрывной весовой функцией

Сергей Иванович МИТРОХИН

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. В статье предлагается новый метод исследования дифференциальных операторов с разрывной весовой функцией. Потенциал оператора предполагается кусочно-гладкой функцией на конечном отрезке задания оператора. В точке разрыва весовой функции требуется выполнение условий «сопряжения». Исследуются разделённые граничные условия общего вида. Изучены спектральные свойства дифференциального оператора, заданного на конечном отрезке. При больших значениях спектрального параметра выведена асимптотика фундаментальной системы решений дифференциальных уравнений, задающих исследуемый оператор. С помощью этой асимптотики изучены условия «сопряжения» рассматриваемого дифференциального оператора. Затем исследованы граничные условия изучаемого оператора. В результате получено уравнение на собственные значения оператора, которое представляет собой целую функцию. Изучена индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения, которая является правильным многоугольником. В различных секторах индикаторной диаграммы найдена асимптотика собственных значений исследуемого дифференциального оператора. При помощи найденной асимптотики собственных значений методом Лидского–Садовнического получена формула первого регуляризованного следа этого оператора. В случае предельных переходов полученная формула приводит к формуле следа для классического оператора с гладким потенциалом и постоянной весовой функцией.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, весовая функция, спектральный параметр, асимптотика решений, спектр оператора, регуляризованный след оператора

Для цитирования: Митрохин С.И. Спектральные свойства дифференциального оператора четного порядка с разрывной весовой функцией // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 37–57. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-37-57.

Spectral properties of an even-order differential operator with a discontinuous weight function

Sergey I. MITROKHIN

Lomonosov Moscow State University

GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract. This article proposes a new method for studying differential operators with a discontinuous weight function. It is assumed that the potential of the operator is a piecewise smooth function on the segment of the operator definition. The conditions of «conjugation» at the point of discontinuity of the weight function are required. The spectral properties of a differential operator defined on a finite segment with separated boundary conditions are studied. The asymptotics of the fundamental system of solutions of the corresponding differential equation for large values of the spectral parameter is obtained. With the help of this asymptotics, the «conjugation» conditions of the differential operator in question are studied. The boundary conditions of the operator under study are investigated. As a result, we obtain an equation for the eigenvalues of the operator, which is an entire function. The indicator diagram of the eigenvalue equation, which is a regular polygon, is studied. In various sectors of the indicator diagram, the asymptotics of the eigenvalues of the investigated differential operator is found. The formula for the first regularized trace of this operator by using the found asymptotics of the eigenvalues by the Lidsky–Sadovnichy method is obtained. In the case of the passage to the limit, the resulting formula leads to the trace formula for the classical operator with a smooth potential and constant weight function.

Keywords: differential operator, weight function, spectral parameter, asymptotics of solutions, spectrum of an operator, regularized trace of an operator

Mathematics Subject Classification: 34B09; 47A75; 47J10.

For citation: Mitrokhin S.I. Spektral'nyye svoystva differentsial'nogo operatora chetnogo porjadka s razryvnoy vesovoy funktsiyey [Spectral properties of an even-order differential operator with a discontinuous weight function]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 37–57. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-37-57. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Изучим спектральные свойства дифференциального оператора четного порядка, задаваемого дифференциальными уравнениями вида

$$y_1^{(2N)}(x) + q_1(x)y_1(x) = \lambda a^{2N}y_1(x), \quad 0 \leq x < x_1, \quad a > 0, \quad (0.1)$$

$$y_2^{(2N)}(x) + q_2(x)y_2(x) = \lambda b^{2N}y_2(x), \quad x_1 < x \leq \pi, \quad b > 0, \quad (0.2)$$

$N = 2, 3, 4, \dots$, с разделенными граничными условиями следующего вида:

$$y_1^{(m_1)}(0) = y_1^{(m_2)}(0) = \dots = y_1^{(m_{2N-1})}(0) = y_2^{(n_1)}(\pi) = 0, \quad (0.3)$$

$m_1 < m_2 < \dots < m_{2N-2} < m_{2N-1}$, $n_1, m_k \in \{0, 1, 2, \dots, 2N-1\}$, $k = 1, 2, \dots, 2N-1$. В точке x_1 разрыва коэффициентов предполагаем выполненными условия «сопряжения»

$$y_1(x_1 - 0) = y_2(x_1 + 0); \quad b^m y_1^{(m)}(x_1 - 0) = a^m y_2^{(m)}(x_1 + 0), \quad m = 1, 2, \dots, 2N-1, \quad (0.4)$$

и условия гладкости потенциала

$$q_1(x) \in C^{2N}[0; x_1), \quad q_2(x) \in C^{2N}(x_1; \pi], \quad (0.5)$$

вследствие которых существуют следующие односторонние пределы:

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x < x_1}} q_1(x) = q_1(x_1 - 0), \quad \exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ x > x_1}} q_2(x) = q_2(x_1 + 0).$$

1. Исторический обзор

Для изучения спектральных свойств дифференциальных операторов необходимо знать асимптотику фундаментальной системы решений дифференциальных уравнений, задающих эти операторы. Исторически сложилось так, что спектральные свойства дифференциальных операторов сначала изучались в том случае, когда коэффициенты дифференциальных уравнений, задающих эти операторы, были достаточно гладкими функциями. В случае условия гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений, задающих операторы, асимптотика фундаментальной системы решений выведена в монографии Наймарка [1, гл. 2]. Асимптотические формулы для корней квазиполиномов, которые получаются при изучении операторов высших порядков с регулярными граничными условиями с гладкими коэффициентами, были получены в работе [2].

В дальнейшем наблюдается прогресс в изучении дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами (кусочно-гладкими, разрывными, суммируемыми) и негладкой весовой функцией. Пример изучения дифференциальных операторов высших порядков с условиями разрыва во внутренней точке отрезка, на котором задан оператор, приведен в работе [3].

Краевые задачи для дифференциальных операторов с кусочно-гладкими весовыми функциями возникают при изучении поперечных и продольных колебаний стержней, балок и мостов, составленных из материалов различной плотности. В работе [4] приведены модельные примеры так называемых «изоспектральных» операторов второго и четвертого порядка с кусочно-постоянной весовой функцией. В работе [5] были изучены свойства сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциальных операторов второго порядка с кусочно-гладкой весовой функцией.

Дифференциальные операторы второго порядка с разрывными коэффициентами изучались в работах [6–8]. В работе [9] автором были изучены спектральные свойства дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией, также приведены примеры изоспектральных операторов. Трудности теоретического и практического исследования таких операторов многократно возрастают с возрастанием порядка дифференциальных операторов, поэтому операторы порядка выше четвертого фактически еще не исследованы, и их исследование является актуальной задачей нашего времени.

В работе [10] изучены операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами. Спектральные свойства дифференциального оператора высокого порядка с условиями разрыва во внутренней точке отрезка, на котором задан оператор, у которого при этом весовая функция являлась знакопеременной, исследовались в работе [11]. В работе [12] была изучена скорость роста системы собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с непрерывной весовой функцией. В работе [13] были изучены операторы первого и второго порядка со знакопеременной весовой функцией. Автором в работе [14] изучена асимптотика спектра дифференциального оператора шестого порядка со знакопеременной весовой функцией. В работе [15] изучены спектральные свойства дифференциального оператора третьего порядка с гладкой весовой функцией, была найдена асимптотика собственных значений этого оператора. Обобщение результатов этого исследования на случай дифференциальных операторов порядка выше четвертого с кусочно-гладкими весовыми функциями в настоящее время не представляется возможным в связи со сложностью возникающих при этом формул.

В последнее время активно изучается случай дифференциальных операторов с суммируемыми коэффициентами (см. работы [16–19]), при этом весовая функция полагается постоянной, чаще всего равной единице. В работе [16] изучен оператор второго порядка с суммируемым потенциалом, вычислены асимптотики собственных значений и собственных функций произвольной степени точности для краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке. Новая методика для изучения дифференциальных операторов с суммируемыми коэффициентами, у которых порядок выше второго, разработана автором в работах [17–19]. Во всех этих работах граничные условия были разделенными. В работе [18] автором изучена асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка со знакопеременной весовой функцией. Случай неразделенных граничных условий для операторов с суммируемым потенциалом изучен автором в работе [20].

2. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (0.1), (0.2) при больших значениях спектрального параметра λ

Пусть $\lambda = s^{2N}$, $s = \sqrt[2N]{\lambda}$, при этом $\sqrt[2N]{1} = +1$. Обозначим через ω_k ($k = 1, 2, 3, \dots, 2N$) различные корни $(2N)$ -й степени из единицы. Таким образом,

$$\begin{aligned} \omega_k^{2N} &= 1; \quad \omega_k = e^{\frac{2\pi(k-1)}{2N}i}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2N; \\ \omega_1 &= 1, \quad \omega_2 = e^{\frac{2\pi}{2N}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right); \quad \omega_3 = e^{\frac{4\pi}{2N}i} = \omega_2^2; \quad \dots; \\ \omega_m &= \omega_2^{m-1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, 2N. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Числа ω_k ($k = 1, 2, 3, \dots, 2N$) из (2.1) делят единичную окружность на $2N$ равных частей и образуют правильный $(2N)$ -угольник, для них справедливы следующие свойства:

$$\sum_{k=1}^{2N} \omega_k^m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, 2N-1; \quad \sum_{k=1}^{2N} \omega_k^m = 2N, \quad m = 0, \quad m = 2N;$$

$$\sum_{k=1}^{2N-1} \omega_k^m = 0, \quad k = 2, 3, 4, \dots, 2N. \quad (2.2)$$

Методами, описанными в монографии Наймарка [1, гл. 2], доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Общее решение дифференциального уравнения (0.1) имеет вид*

$$y_1(x, s) = \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} y_{1k}(x, s); \quad y_1^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} y_{1k}^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, 3, \dots, 2N-1, \quad (2.3)$$

где C_{1k} ($k = 1, 2, 3, \dots, 2N$) — произвольные постоянные, при этом для фундаментальной системы решений $\{y_{1k}(x, s)\}_{k=1}^{2N}$ справедливы следующие разложения и оценки:

$$y_{1k}(x, s) = e^{a\omega_k s x} \left[1 + \frac{\omega_k A_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^0(x)}{s^{2N}} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|ax}}{s^{2N+1}}\right) \right], \quad (2.4)$$

$$0 \leq x < x_1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2N;$$

$$y_{1k}^{(m)}(x, s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x} \left[1 + \frac{\omega_k A_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^m(x)}{s^{2N}} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}s|ax}}{s^{2N+1}}\right) \right], \quad (2.5)$$

$$k = 1, 2, \dots, 2N, \quad m = 1, 2, \dots, 2N-1;$$

$$A_{2N-1}(x) = -\frac{1}{2Na^{2N-1}} \int_0^x q_1(t) dt; \quad A_{2N-1}(0) = 0; \quad A'_{2N-1}(x) = -\frac{q_1(x)}{2Na^{2N-1}}; \quad (2.6)$$

$$A_{2N}^0(x) = \frac{(2N-1)q_1(x) - (2N-1)q_1(0)}{4Na^{2N}}; \quad A_{2N}^1(x) = \frac{(2N-3)q_1(x) - (2N-1)q_1(0)}{4Na^{2N}}; \quad \dots;$$

$$A_{2N}^m(x) = \frac{(2N-1-2m)q_1(x) - (2N-1)q_1(0)}{4Na^{2N}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, 2N-1;$$

$$A_{2N}^{2N-1}(x) = \frac{-(2N-1)q_1(x) - (2N-1)q_1(0)}{4Na^{2N}}. \quad (2.7)$$

Отметим, что коэффициенты $A_{2N}^m(x)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$) из (2.7) обладают следующим свойством:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} A_{2N}^k(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} A_{2N}^k(0) = D_{2N} = \frac{-(2N-1)q_1(0)}{2a^{2N}}. \quad (2.8)$$

Аналогичное утверждение верно для дифференциального уравнения (0.2).

Теорема 2.2. *Общее решение дифференциального уравнения (0.2) имеет вид*

$$y_2(x, s) = \sum_{k=1}^{2N} C_{2k} y_{2k}(x, s); \quad y_2^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^{2N} C_{2k} y_{2k}^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, \dots, 2N-1, \quad (2.9)$$

где C_{2k} ($k = 1, 2, 3, \dots, 2N$) — произвольные постоянные, причем для фундаментальной системы решений $\{y_{2k}(x, s)\}_{k=1}^{2N}$ справедливы следующие разложения и оценки:

$$y_{2k}(x, s) = e^{b\omega_k s x} \left[1 + \frac{\omega_k B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^0(x)}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\text{Im}s|bx}}{s^{2N+1}}\right) \right], \quad (2.10)$$

$$k = 1, 2, \dots, 2N;$$

$$y_{2k}^{(m)}(x, s) = (b\omega_k s)^m e^{b\omega_k s x} \left[1 + \frac{\omega_k B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^m(x)}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\text{Im}s|bx}}{s^{2N+1}}\right) \right], \quad (2.11)$$

$$k = 1, 2, \dots, 2N, \quad b = 1, 2, \dots, 2N-1;$$

$$B_{2N-1}(x) = -\frac{1}{2Nb^{2N-1}} \int_{x_1}^x q_2(t) dt; \quad B_{2N-1}(x_1) = 0; \quad B'_{2N-1}(x) = -\frac{q_2(x)}{2Nb^{2N-1}}; \quad (2.12)$$

$$B_{2N}^0(x) = \frac{(2N-1)q_2(x) - (2N-1)q_2(x_1)}{4Nb^{2N}}; \quad B_{2N}^1(x) = \frac{(2N-3)q_2(x) - (2N-1)q_1(x_1)}{4Nb^{2N}}; \quad \dots;$$

$$B_{2N}^m(x) = \frac{(2N-1-2m)q_2(x) - (2N-1)q_2(x_1)}{4Nb^{2N}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, 2N-1;$$

$$B_{2N}^{2N-1}(x) = \frac{-(2N-1)q_2(x) - (2N-1)q_2(x_1)}{4Nb^{2N}}; \quad (2.13)$$

$$\sum_{k=0}^{2N-1} B_{2N}^k(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} B_{2N}^k(\pi) = E_{2N} = \frac{-(2N-1)q_2(x_1)}{2b^{2N}}. \quad (2.14)$$

Справедливы также следующие начальные условия:

$$A_{2N-1}(0) = 0; \quad A_{2N}^0(0) = 0; \quad y_{1k}(0, s) = 1;$$

$$y_{1k}^{(m)}(0) = (a\omega_k s)^m \left[1 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^m(0)}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right];$$

$$B_{2N-1}(x_1) = 0; \quad B_{2N}^0(x_1) = 0; \quad y_{2k}(x_1, s) = e^{b\omega_k s x_1};$$

$$y_{2k}^{(m)}(x_1, s) = (b\omega_k s)^m e^{b\omega_k s x_1} \left[1 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^m(x_1)}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right]; \quad (2.15)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, 2N; \quad m = 1, 2, 3, \dots, 2N-1.$$

Если требовать условие гладкости потенциала $q_1(x) \in C^{4N}[0, x_1]$, $q_2(x) \in C^{4N}(x_1, \pi]$, то асимптотические формулы (2.4)–(2.7) и (2.10)–(2.13) можно уточнить

$$y_{1k}^{(m)}(x, s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x} \left[1 + \frac{\omega_k A_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^m(x)}{s^{2N}} + \sum_{n=2N+1}^{4N} \frac{A_n^m(x)}{s^n} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\text{Im}s|ax}}{s^{4N+1}}\right) \right],$$

$$y_{2k}^{(m)}(x, s) = (b\omega_k s)^m e^{b\omega_k s x} \left[1 + \frac{\omega_k B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^m(x)}{s^{2N}} + \sum_{n=2N+1}^{4N} \frac{B_n^m(x)}{s^n} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\text{Im}s|bx}}{s^{2N+1}}\right) \right],$$

$$k = 1, 2, \dots, 2N; \quad m = 0, 1, 2, \dots, 2N-1.$$

Такая точность нужна для вычисления второго регуляризованного следа дифференциального оператора (0.1)–(0.5).

3. Изучение определителя Вронского

Обозначим через $\Delta_{02}(x, s)$ определитель Вронского фундаментальной системы решений $\{y_{2k}(x, s)\}_{k=1}^{2N}$ дифференциального уравнения (0.2)

$$\Delta_{02}(x, s) = \det \text{Wr}[y_{21}(x, s); y_{22}(x, s); \dots; y_{2,2N}(x, s)]$$

$$= \begin{vmatrix} y_{21}(x, s) & y_{22}(x, s) & \dots & y_{2,2N-1}(x, s) & y_{2,2N}(x, s) \\ \frac{y'_{21}(x, s)}{bs} & \frac{y'_{22}(x, s)}{bs} & \dots & \frac{y'_{2,2N-1}(x, s)}{bs} & \frac{y'_{2,2N}(x, s)}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{21}^{(2N-1)}(x, s)}{(bs)^{2N-1}} & \frac{y_{22}^{(2N-1)}(x, s)}{(bs)^{2N-1}} & \dots & \frac{y_{2,2N-1}^{(2N-1)}(x, s)}{(bs)^{2N-1}} & \frac{y_{2,2N}^{(2N-1)}(x, s)}{(bs)^{2N-1}} \end{vmatrix}, \quad (3.1)$$

который по свойствам линейных дифференциальных уравнений вида (0.2) не должен зависеть от x и не должен равняться нулю ни в одной точке x из промежутка $(x_1, \pi]$

$$\Delta_{02}(x, s) = \Delta_{02}(s) = \Delta_{02}(\pi, s) = \Delta_{02}(x_1, s) \neq 0.$$

Обозначим $\Theta_m = e^{b\omega_m s x}$, $m = 1, 2, \dots, 2N$, и используя формулы (2.10)–(2.13), перепишем определитель $\Delta_{02}(x, s)$ из (3.1) в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \Theta_1[1 + \frac{\omega_1 B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^0(x)}{s^{2N}} + \dots] & \dots & \Theta_{2N}[1 + \frac{\omega_{2N} B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^0(x)}{s^{2N}} + \dots] \\ \omega_1 \Theta_1[1 + \frac{\omega_1 B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^1(x)}{s^{2N}} + \dots] & \dots & \omega_{2N} \Theta_{2N}[1 + \frac{\omega_{2N} B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^1(x)}{s^{2N}} + \dots] \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{2N-1} \Theta_1[1 + \frac{\omega_1 B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^{2N-1}(x)}{s^{2N}} + \dots] & \dots & \omega_{2N}^{2N-1} \Theta_{2N}[1 + \frac{\omega_{2N} B_{2N-1}(x)}{s^{2N-1}} + \frac{B_{2N}^{2N-1}(x)}{s^{2N}} + \dots] \end{vmatrix}. \quad (3.2)$$

В определителе (3.2) вынесем из k -го столбца ($k = 1, 2, \dots, 2N$) множитель Θ_k (при этом произведение $\prod_{k=1}^{2N} \Theta_k = \prod_{k=1}^{2N} e^{b\omega_k s x} = \exp(b \sum_{k=1}^{2N} \omega_k s x) \stackrel{(2.2)}{=} e^0 = 1$ не зависит от x), затем получившийся определитель разложим по столбцам на сумму определителей:

$$\Delta_{02}(x, s) = \Delta_{00} + \frac{\Delta_{02,2N-1}(x, s)}{s^{2N-1}} + \frac{\Delta_{02,2N}(x, s)}{s^{2N}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right). \quad (3.3)$$

В полученном представлении (3.3) Δ_{00} — определитель Вандермонда чисел $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2N}$

$$\Delta_{00} = \det \text{Wandermound}'s(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2N})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \dots & \omega_{2N-1} & \omega_{2N} \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \dots & \omega_{2N-1}^2 & \omega_{2N}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{2N-1} & \omega_2^{2N-1} & \omega_3^{2N-1} & \dots & \omega_{2N-1}^{2N-1} & \omega_{2N}^{2N-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k > m; \\ k, m = 1, 2, \dots, 2N}} (\omega_k - \omega_m) = \Delta_{00} \neq 0, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\Delta_{02,2N-1}(x, s) &= \omega_1 B_{2N-1}(x) \Delta_{00} + \omega_2 B_{2N-1}(x) \Delta_{00} + \dots + \omega_{2N} B_{2N-1}(x) \Delta_{00} \\ &= \Delta_{00} B_{2N-1}(x) (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{2N}) \stackrel{(2.2)}{=} \Delta_{00} B_{2N-1} \cdot 0 = 0,\end{aligned}\quad (3.5)$$

т. е. величины $\Delta_{02,2N-1}(x, s)$ не зависят от x ;

$$\begin{aligned}\Delta_{02,2N}(x) &= B_{2N}^0(x) \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{k-1} \delta_{1k} + B_{2N}^1(x) \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \omega_k \delta_{2k} \\ &+ B_{2N}^2(x) \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{k-1} \omega_k^2 \delta_{3k} + \dots + B_{2N}^{2N-1}(x) \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k \omega_k^{2N-1} \delta_{2N,k} \\ &= \Delta_{00} \sum_{k=0}^{2N-1} B_{2N}^k(x) \stackrel{(2.14)}{=} \Delta_{00} E_{2N}, \quad E_{2N} = -\frac{(2N-1)q_2(x_1)}{2b^{2N}},\end{aligned}\quad (3.6)$$

где δ_{mk} — алгебраические миноры к элементам h_{mk} определителя Δ_{00} из (3.4), значит $\Delta_{02,2N}(x, s)$ также не зависит от x . Из формул (3.3)–(3.6) получаем

$$\Delta_{02}(x, s) = \Delta_{02}(s) = \Delta_{00} \left[1 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{E_{2N}}{s^{2N}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right], \quad (3.7)$$

т. е. $\Delta_{02}(x, s)$ не зависит от x и не равен нулю, что фактически подтверждает справедливость асимптотических формул (2.10)–(2.14).

Аналогичным образом вычисляется определитель Вронского $\Delta_{01}(x, s)$ фундаментальной системы $\{y_{1k}(x, s)\}_{k=1}^{2N}$ для дифференциального уравнения (0.1)

$$\Delta_{01}(x, s) = \Delta_{01}(s) = \Delta_{00} \left[1 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{D_{2N}}{s^{2N}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right], \quad D_{2N} \stackrel{(2.8)}{=} -\frac{(2N-1)q_1(0)}{2a^{2N}}.$$

4. Изучение условий «сопряжения» (0.4)

Из условий «сопряжения» (0.4) с помощью формул (2.3) и (2.9) получаем

$$\begin{cases} y_2(x_1 + 0, s) \stackrel{(0.4)}{=} y_1(x_1 - 0, s) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2N} C_{2k} y_{2k}(x_1 + 0, s) = \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} y_{1k}(x_1 - 0, s), \\ \frac{y_2^{(m)}(x_1 + 0, s)}{(bs)^m} \stackrel{(0.4)}{=} \frac{y_1^{(m)}(x_1 - 0, s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2N} C_{2k} \frac{y_{2k}^{(m)}(x_1 + 0, s)}{(bs)^m} = \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m)}(x_1 - 0, s)}{(as)^m}, \\ m = 1, 2, \dots, 2N-1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Система (4.1) содержит $2N$ линейных уравнений с $2N$ неизвестными $C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2,2N}$ (при этом $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1,2N}$ — параметры). Ее определитель — это определитель Вронского $\Delta_{02}(x_1, s) = \Delta_{02}(s) \neq 0$ из (3.7), поэтому система (4.1) имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера

$$C_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{02}(s) \neq 0}; \quad C_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{02}(s)}; \quad \dots; \quad C_{2,2N} = \frac{\Delta_{2,2N}}{\Delta_{02}(s)}. \quad (4.2)$$

Определители Δ_{2k} ($k = 1, 2, \dots, 2N$) получаются из определителя $\Delta_{02}(x_1, s)$ заменой k -го столбца на столбец

$$\left(\sum_{k=1}^{2N} C_{1k} y_{1k}(x_1 - 0, s); \quad \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \frac{y_{1k}'(x_1 - 0, s)}{as}; \quad \dots; \quad \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(2N-1)}(x_1 - 0, s)}{(as)^{2N-1}} \right)^*.$$

Таким образом, имеем

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} y_{1k}(x_1 - 0, s) & y_{22}(x_1, s) & \dots & y_{2,2N-1}(x_1, s) & y_{2,2N}(x_1, s) \\ \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \frac{y'_{1k}(x_1 - 0, s)}{as} & \frac{y'_{22}(x_1, s)}{bs} & \dots & \frac{y'_{2,2N-1}(x_1, s)}{bs} & \frac{y'_{2,2N}(x_1, s)}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(2N-1)}(x_1 - 0, s)}{(as)^{2N-1}} & \frac{y_{22}^{(2N-1)}(x_1, s)}{(bs)^{2N-1}} & \dots & \frac{y_{2,2N-1}^{(2N-1)}(x_1, s)}{(bs)^{2N-1}} & \frac{y_{2,2N}^{(2N-1)}(x_1, s)}{(bs)^{2N-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \Delta_{21,k} = C_{11} \Delta_{21,1} + C_{12} \Delta_{21,2} + \dots + C_{1,2N} \Delta_{21,2N}; \quad (4.3)$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} y_{21}(x_1, s) & \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} y_{1k}(x_1 - 0, s) & y_{23}(x_1, s) & \dots & y_{2,2N}(x_1, s) \\ \frac{y'_{21}(x_1, s)}{bs} & \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \frac{y'_{1k}(x_1 - 0, s)}{as} & \frac{y'_{23}(x_1, s)}{bs} & \dots & \frac{y'_{2,2N}(x_1, s)}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{21}^{(2N-1)}(x_1, s)}{(bs)^{2N-1}} & \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(2N-1)}(x_1 - 0, s)}{(as)^{2N-1}} & \frac{y_{23}^{(2N-1)}(x_1, s)}{(bs)^{2N-1}} & \dots & \frac{y_{2,2N}^{(2N-1)}(x_1, s)}{(bs)^{2N-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \Delta_{22,k} = C_{11} \Delta_{22,1} + C_{12} \Delta_{22,2} + \dots + C_{1,2N} \Delta_{22,2N}; \quad (4.4)$$

.....

Определители $\Delta_{21,k}$ ($k = 1, 2, \dots, 2N$), определяемые формулой (4.3), получаются заменой первого столбца в определителе $\Delta_{02}(x_1, s)$ из (3.1), (3.2) на столбец

$$\vec{v}_k(x_1, s) = \left(y_{1k}(x_1 - 0, s); \frac{y'_{1k}(x_1 - 0, s)}{as}; \dots; \frac{y_{1k}^{(2N-1)}(x_1 - 0, s)}{(as)^{2N-1}} \right)^*.$$

Определители $\Delta_{22,k}$ ($k = 1, 2, \dots, 2N$), определяемые формулой (4.4), получаются заменой второго столбца в определителе $\Delta_{02}(x_1, s)$ на столбец $\vec{v}_k(x_1, s)$. В общем случае получаем

$$\Delta_{2m} = \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \Delta_{2m,k} = C_{11} \Delta_{2m,1} + C_{12} \Delta_{2m,2} + \dots + C_{1,2N} \Delta_{2m,2N}, \quad m = 1, 2, \dots, 2N, \quad (4.5)$$

определители $\Delta_{2m,k}$ ($k = 1, 2, \dots, 2N$) в (4.5) получаются из определителя $\Delta_{02}(x_1, s)$ заменой m -го столбца ($m = 1, 2, \dots, 2N$) на столбец $\vec{v}_1(x_1, s)$.

Определитель $\Delta_{21,1}$ из (4.3) с помощью формул (2.4)–(2.7) и (2.10)–(2.13) можно выписать в следующем виде (после вынесения из столбцов соответствующих множителей):

$$\Delta_{21,1} = e^{a\omega_1 s x_1} e^{b\omega_2 s x_1} e^{b\omega_3 s x_1} (\dots) e^{b\omega_{2N} s x_1}$$

$$\times \begin{vmatrix} 1[1 + \frac{\omega_1 A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^0(x_1)}{s^{2N}} + \dots] & b_{12} & \dots & 1[1 + \frac{B_{2N}^0(x_1)}{s^{2N}} + \dots] \\ \omega_1[1 + \frac{\omega_1 A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^1(x_1)}{s^{2N}} + \dots] & b_{22} & \dots & \omega_{2N}[1 + \frac{B_{2N}^1(x_1)}{s^{2N}} + \dots] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{2N-1}[1 + \frac{\omega_1 A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^{2N-1}(x_1)}{s^{2N}} + \dots] & b_{2N,2} & \dots & \omega_{2N}^{2N-1}[1 + \frac{B_{2N}^{2N-1}(x_1)}{s^{2N}} + \dots] \end{vmatrix},$$

$$b_{12} = 1 \left[1 + \frac{B_{12}^0(x_1)}{s^{2N}} + \dots \right], \quad b_{22} = \omega_2 \left[1 + \frac{B_{12}^1(x_1)}{s^{2N}} + \dots \right], \quad \dots, \\ b_{2N,2} = \omega_2^{2N-1} \left[1 + \frac{B_{12}^{2N-1}(x_1)}{s^{2N}} + \dots \right]. \quad (4.6)$$

Для удобного и точного нахождения асимптотики определителя $\Delta_{21,1}$ из (4.6) полезно знать следующее свойство, доказательство которого можно найти в работе автора [14].

С в о й с т в о 4.1. Пусть (δ_{km}) ($k, m = 1, 2, \dots, 2N$) — матрица алгебраических миноров к элементам h_{km} определителя Δ_{00} из (3.4). Тогда (δ_{km}) имеет вид

$$(\delta_{km}) = \begin{pmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \dots & \delta_{1,2N} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \dots & \delta_{2,2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{2N,1} & \delta_{2N,2} & \dots & \delta_{2N,2N} \end{pmatrix} \\ = \frac{\Delta_{00}}{2N} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ -\omega_1^{-1} & \omega_2^{-1} & -\omega_3^{-1} & \omega_4^{-1} & \dots & -\omega_{2N-1}^{-1} & \omega_{2N}^{-1} \\ \omega_1^{-2} & -\omega_2^{-2} & \omega_3^{-2} & -\omega_4^{-2} & \dots & \omega_{2N-1}^{-2} & -\omega_{2N}^{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{-(2N-2)} & -\omega_2^{-(2N-2)} & \omega_3^{-(2N-2)} & -\omega_4^{-(2N-2)} & \dots & \omega_{2N-1}^{-(2N-2)} & -\omega_{2N}^{-(2N-2)} \\ -\omega_1^{-(2N-1)} & \omega_2^{-(2N-1)} & -\omega_3^{-(2N-1)} & \omega_4^{-(2N-1)} & \dots & -\omega_{2N-1}^{-(2N-1)} & \omega_{2N}^{-(2N-1)} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Раскладывая определитель $\Delta_{21,1}$ из (4.6) по столбцам на сумму определителей, применяя формулы (2.2), (3.4) и свойство (4.7), получаем

$$\Delta_{21,1} = e^{(a\omega_1 - b\omega_1)sx_1} \left[\Delta_{00} + \frac{\Delta_{21,1,2N-1}}{s^{2N-1}} + \frac{\Delta_{21,1,2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right], \quad (4.8)$$

$$\Delta_{21,1,2N-1} = \omega_1 A_{2N-1}(x_1) \Delta_{00}, \quad (4.9)$$

$$\Delta_{21,1,2N} = \sum_{k=1}^{2N} A_{2N}^{k-1}(x_1) \omega_1^{k-1} (-1)^{k-1} \delta_{k_1} + \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k B_{2N}^{k-1}(x_1) \omega_2^{k-1} \delta_{k_2} + \dots \\ + \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k B_{2N}^{k-1}(x_1) \omega_{2N}^{k-1} \delta_{k,2N} \stackrel{(4.7)}{=} \frac{\Delta_{00}}{2N} \left[\sum_{k=1}^{2N} A_{2N}^{k-1}(x_1) + (2N-1) \sum_{k=1}^{2N} B_{2N}^{k-1}(x_1) \right] = \Delta_{00} H_{2N}, \\ H_{2N} \stackrel{(2.8),(2.14)}{=} \frac{D_{2N} + (2N-1)E_{2N}}{2N}. \quad (4.10)$$

Из формул (4.8)–(4.10) следует, что

$$\Delta_{21,1} = \Delta_{00} e^{(a\omega_1 - b\omega_1)sx_1} \left[1 + \frac{\omega_1 A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^{2N-1}(x_1)}{s^{2N}} + \frac{H_{2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right]. \quad (4.11)$$

Для вычисления определителей $\Delta_{21,m}$ ($m = 2, 3, \dots, 2N$) в представлении (4.3) применим формулы (2.4)–(2.7), (2.10)–(2.13), получим определитель, аналогичный определителю $\Delta_{21,1}$ из (4.6), у которого первый столбец заменен на столбец

$$\left(1 \left[1 + \frac{\omega_m A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^0(x_1)}{s^{2N}} + \dots \right]; \omega_m \left[1 + \frac{\omega_m A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^1(x_1)}{s^{2N}} + \dots \right]; \dots; \right. \\ \left. \omega_m^{2N-1} \left[1 + \frac{\omega_m A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^{2N-1}(x_1)}{s^{2N}} + \dots \right] \right)^*.$$

Затем из первого столбца вычтем m -ый столбец и получившийся определитель разложим по первому столбцу, таким образом для всех $m = 2, 3, \dots, 2N$ получим:

$$\Delta_{21,m} = e^{(a\omega_m - b\omega_1)sx_1} \left[0 + \frac{\omega_m A_{2N-1}(x_1) \cdot 0}{s^{2N-1}} + \frac{\Delta_{21,m,2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right], \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{21,m,2N} &= \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{k-1} [A_{2N}^{k-1}(x_1) - B_{2N}^{k-1}(x_1)] \omega_m^{k-1} \delta_{k,1} \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \frac{\Delta_{00}}{2N} \sum_{k=1}^{2N} A_{2N}^{k-1}(x_1) \left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)^{k-1} - \frac{\Delta_{00}}{2N} \sum_{k=1}^{2N} B_{2N}^{k-1}(x_1) \left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)^{k-1}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Применяя формулы (2.7), (2.13), (2.1), (2.2), из представления (4.13) выводим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta_{21,m,2N} &= \frac{\Delta_{00}}{2N} \frac{(1-2N)q_1(0)}{4Na^{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)^k + \frac{\Delta_{00}}{2N} \frac{q_1(x_1-0)}{4Na^{2N}} D_m \\ &\quad - \frac{\Delta_{00}}{2N} \frac{(1-2N)q_2(x_1+0)}{4Nb^{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} \left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)^k - \frac{\Delta_{00}}{2N} \frac{q_2(x_1+0)}{4Nb^{2N}} D_m = -\frac{\Delta_{00} D_m \Delta \tilde{q}(x_1)}{2N4N}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$D_m = \sum_{k=0}^{2N-1} (2N-1-2k) \left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)^k, \quad m = 2, 3, \dots, 2N; \quad \sum_{k=0}^{2N-1} \left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right)^k \stackrel{(2.2)}{=} 0, \quad (4.15)$$

где через $\Delta \tilde{q}(x_1) = \frac{q_2(x_1+0)}{b^{2N}} - \frac{q_1(x_1-0)}{a^{2N}}$ обозначен так называемый «обобщенный скачок» потенциала $q(x)$ в точке разрыва x_1 .

Величины D_m ($m = 2, 3, \dots, 2N$) из (4.15) можно вычислить с помощью формул (2.1)

$$D_{N+1} = 2N; \quad D_{N+2} = \bar{D}_N; \quad D_{N+3} = \bar{D}_{N-1}; \quad \dots; \quad D_{N+m} = \bar{D}_{N+2-m}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (4.16)$$

Определители $\Delta_{22,m}$ ($m = 1, 2, \dots, 2N$) из (4.4) и определители $\Delta_{2m,n}$ из (4.5) вычисляются аналогичным образом. В результате приходим к выводу о справедливости следующего утверждения.

Теорема 4.1. *Матрица*

$$(\Delta_{2mn}) = \begin{pmatrix} \Delta_{2,1,1} & \Delta_{2,1,2} & \dots & \Delta_{2,1,2N} \\ \Delta_{2,2,1} & \Delta_{2,2,2} & \dots & \Delta_{2,2,2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{2,2N,1} & \Delta_{2,2N,2} & \dots & \Delta_{2,2N,2N} \end{pmatrix}, \quad m, n = 1, 2, \dots, 2N,$$

определителей (4.2)–(4.16) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta_{2mm} &= \Delta_{00} e^{(a\omega_m - b\omega_1)sx_1} \left[1 + \frac{\omega_m A_{2N-1}(x_1)}{s^{2N-1}} + \frac{H_{2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right], \\ H_{2N} &= \frac{D_{2N} + (2N-1)E_{2N}}{2N}, \quad m = 1, 2, \dots, 2N; \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{21m} &= \Delta_{00} e^{(a\omega_m - b\omega_1)sx_1} \left[0 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{H_{1,m}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right], \\ H_{1,m} &= -\frac{D_m \Delta \tilde{q}(x_1)}{8N^2}, \quad m = 2, 3, \dots, 2N; \quad \Delta \tilde{q}(x_1) = \frac{q_2(x_1+0)}{b^{2N}} - \frac{q_1(x_1-0)}{a^{2N}}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

величины D_m ($m = 2, 3, \dots, 2N$) определены формулой (4.16);

$$\Delta_{22m} = \Delta_{00} e^{(a\omega_m - b\omega_2)sx_1} \left[0 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{H_{1,m-1}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right],$$

$$m = 1, 3, 4, \dots, 2N; \quad H_{1,0} = H_{1,2N}; \quad (4.19)$$

$$\Delta_{2nm} = \Delta_{00} e^{(a\omega_m - b\omega_n)sx_1} \left[0 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{H_{1,m+1-n}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right],$$

$$m, n = 1, 2, \dots, 2N, \quad m \neq n; \quad H_{1,k} = H_{1,k+2N}, \quad k = 0, -1, -2, \dots, -(2N-1). \quad (4.20)$$

5. Изучение граничных условий (0.3)

Из первых граничных условий (0.3) с помощью формул (2.3)–(2.8) и (2.15) получаем

$$\frac{y_1^{(m_p)}(0, s)}{(as)^{m_p}} \stackrel{(0.3)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m_p)}(0, s)}{(as)^{m_p}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \omega_k^{m_p} \left[1 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^{m_p}(0)}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right] = 0, \quad p = 1, 2, \dots, 2N-1. \quad (5.1)$$

Из заключительного граничного условия (0.3) с помощью формул (2.9), (4.2)–(4.5) выводим соотношения

$$\frac{y_2^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_1}} \stackrel{(0.3)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2N} C_{2k} \frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_1}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2N} \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{02}(s)} \frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\Delta_{02}(s) \neq 0} \sum_{k=1}^{2N} \left(\sum_{n=1}^{2N} C_{1n} \Delta_{2kn} \right) \frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_1}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2N} C_{1k} \phi_{1k}^{n_1}(\pi, s) = 0, \quad (5.2)$$

$$\phi_{1k}^{n_1}(\pi, s) = \frac{1}{\Delta_{02}(s)} \sum_{p=1}^{2N} \Delta_{2pk} \frac{y_{2p}^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_1}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2N. \quad (5.3)$$

Система (5.1)–(5.3) из $2N$ линейных однородных уравнений с $2N$ неизвестными $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1,2N}$ имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (0.1)–(0.5) имеет следующий вид:

$$f(s) \doteq \begin{vmatrix} \frac{y_{11}^{(m_1)}(0, s)}{(as)^{m_1}} & \frac{y_{12}^{(m_1)}(0, s)}{(as)^{m_1}} & \dots & \frac{y_{1,2N-1}^{(m_1)}(0, s)}{(as)^{m_1}} & \frac{y_{1,2N}^{(m_1)}(0, s)}{(as)^{m_1}} \\ \frac{y_{11}^{(m_2)}(0, s)}{(as)^{m_2}} & \frac{y_{12}^{(m_2)}(0, s)}{(as)^{m_2}} & \dots & \frac{y_{1,2N-1}^{(m_2)}(0, s)}{(as)^{m_2}} & \frac{y_{1,2N}^{(m_2)}(0, s)}{(as)^{m_2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{11}^{(m_{2N-1})}(0, s)}{(as)^{m_{2N-1}}} & \frac{y_{12}^{(m_{2N-1})}(0, s)}{(as)^{m_{2N-1}}} & \dots & \frac{y_{1,2N-1}^{(m_{2N-1})}(0, s)}{(as)^{m_{2N-1}}} & \frac{y_{1,2N}^{(m_{2N-1})}(0, s)}{(as)^{m_{2N-1}}} \\ \phi_{11}^{n_1}(\pi, s) & \phi_{12}^{n_1}(\pi, s) & \dots & \phi_{1,2N-1}^{n_1}(\pi, s) & \phi_{1,2N}^{n_1}(\pi, s) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.4)$$

Применяя формулы (2.4)–(2.7), (2.10)–(2.15), (4.17)–(4.20) и (5.3), уравнение (5.4) можно переписать в следующем виде (после вынесения из первых $(2N-1)$ строчек некоторых сомножителей):

$$f(s) = v_{2N-1}(s) \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,2N-1} & b_{1,2N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,2N-1} & b_{2,2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2N-1,1} & b_{2N-1,2} & \dots & b_{2N-1,2N-1} & b_{2N-1,2N} \\ b_{2N,1} & b_{2N,2} & \dots & b_{2N,2N-1} & b_{2N,2N} \end{vmatrix} \\ = v_{2N-1}(s) \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_1} & \omega_{2N}^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_2^{m_2} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_2} & \omega_{2N}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{m_{2N-1}} & \omega_2^{m_{2N-1}} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_{2N-1}} & \omega_{2N}^{m_{2N-1}} \\ \phi_{11}^{n_1}(\pi, s) & \phi_{12}^{n_1}(\pi, s) & \dots & \phi_{1,2N-1}^{n_1}(\pi, s) & \phi_{1,2N}^{n_1}(\pi, s) \end{vmatrix} = 0, \quad (5.5)$$

$$v_{2N-1}(s) = \prod_{p=1}^{2N-1} \left[1 + \frac{0}{s^{2N-1}} + \frac{A_{2N}^{m_p}(0)}{s^{2N}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right] \\ = 1 + \frac{R_{1,2N}}{s^{2N}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right); \quad R_{1,2N} = \sum_{p=1}^{2N-1} A_{2N}^{m_p}(0). \quad (5.6)$$

Разложим по последней строке определитель $f(s)$, определенный соотношениями (5.5), (5.6), на сумму определителей:

$$\frac{f(s)}{v_{2N-1}(s)} = \phi_{11}^{n_1}(\pi, s) \begin{vmatrix} \omega_2^{m_1} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_1} & \omega_{2N}^{m_1} \\ \omega_2^{m_2} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_2} & \omega_{2N}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_2^{m_{2N-1}} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_{2N-1}} & \omega_{2N}^{m_{2N-1}} \end{vmatrix}_1 \\ - \phi_{12}^{n_1}(\pi, s) \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_3^{m_1} & \omega_4^{m_1} & \dots & \omega_{2N}^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_3^{m_2} & \omega_4^{m_2} & \dots & \omega_{2N}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{m_{2N-1}} & \omega_3^{m_{2N-1}} & \omega_4^{m_{2N-1}} & \dots & \omega_{2N}^{m_{2N-1}} \end{vmatrix}_2 \\ + \phi_{13}^{n_1}(\pi, s) \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \omega_4^{m_1} & \dots & \omega_{2N}^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_2^{m_2} & \omega_4^{m_2} & \dots & \omega_{2N}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{m_{2N-1}} & \omega_2^{m_{2N-1}} & \omega_4^{m_{2N-1}} & \dots & \omega_{2N}^{m_{2N-1}} \end{vmatrix}_3 - \dots \\ - \phi_{1,2N}^{n_1}(\pi, s) \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_2^{m_2} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{m_{2N-1}} & \omega_2^{m_{2N-1}} & \dots & \omega_{2N-1}^{m_{2N-1}} \end{vmatrix}_{2N-1} = 0. \quad (5.7)$$

Определители $|\dots|_p$ ($p = 1, 2, \dots, 2N$) из (5.7) легко вычисляются с помощью формул (2.1) и свойств определителей

$$\begin{aligned}
 |\dots|_{2N} &\stackrel{(5.7)}{=} \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & \dots & z^{(2N-2)m_1} \\ 1^{m_2} & z^{m_2} & \dots & z^{(2N-2)m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{m_{2N-1}} & z^{m_{2N-1}} & \dots & z^{(2N-2)m_{2N-1}} \end{vmatrix}_{2N} \\
 &= \begin{vmatrix} 1^{m_1} & 1^{m_2} & 1^{m_3} & \dots & 1^{m_{2N-1}} \\ z^{m_1} & z^{m_2} & z^{m_3} & \dots & z^{m_{2N-1}} \\ z^{2m_1} & z^{2m_2} & z^{2m_3} & \dots & z^{2m_{2N-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{(2N-2)m_1} & z^{(2N-2)m_2} & z^{(2N-2)m_3} & \dots & z^{(2N-2)m_{2N-1}} \end{vmatrix} \\
 &= \prod_{\substack{p > n, \\ p, n = 1, 2, \dots, 2N-1}} (z^{m_p} - z^{m_n}) = \psi_{2N-1} \neq 0, \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

определитель $|\dots|_{2N}$ — определитель Вандермонда чисел $z^{m_1}, z^{m_2}, \dots, z^{m_{2N-1}}$;

$$\begin{aligned}
 |\dots|_1 &\stackrel{(5.7)}{=} \begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & \dots & z^{(2N-1)m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \dots & z^{(2N-1)m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{m_{2N-1}} & z^{2m_{2N-1}} & \dots & z^{(2N-1)m_{2N-1}} \end{vmatrix} \\
 &= z^{m_1} z^{m_2} \dots z^{m_{2N-1}} |\dots|_{2N} = z^{M_{2N-1}} \psi_{2N-1}, \quad M_{2N-1} = \sum_{p=1}^{2N-1} m_p; \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

аналогичным образом доказываются следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 |\dots|_2 &\stackrel{(5.7)}{=} z^{2M_{2N-1}} \psi_{2N-1}; \quad |\dots|_3 = z^{3M_{2N-1}} \psi_{2N-1}; \quad \dots; \\
 |\dots|_p &= z^{pM_{2N-1}} \psi_{2N-1}, \quad p = 1, 2, 3, \dots, 2N. \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

Подставим формулы (5.8)–(5.10) в уравнение (5.7), поделим на $z^{M_{2N-1}} \psi_{2N-1} \neq 0$ и перепишем уравнение (5.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(s)}{v_{2N-1}(s)} &= \phi_{11}^{n_1}(\pi, s) - z^{M_{2N-1}} \phi_{12}^{n_1}(\pi, s) + z^{2M_{2N-1}} \phi_{13}^{n_1}(\pi, s) - \dots \\
 &\quad - z^{(2N-1)M_{2N-1}} \phi_{1,2N}^{n_1}(\pi, s) = 0,
 \end{aligned}$$

где величины $\phi_{1k}^{n_1}(\pi, s)$ ($k = 1, 2, \dots, 2N$) определены формулами (5.3), (4.17)–(4.20), (2.10)–(2.15). Левая часть этого уравнения представляет собой квазимногочлен, для нахождения корней которого рассмотрим индикаторную диаграмму (см. [21, гл. 12]), т.е. выпуклую оболочку показателей экспонент, входящих в уравнение (5.7). Изучив показатели экспонент, приходим к выводу, что индикаторная диаграмма уравнения (5.7)–(5.10) имеет вид, представленный на рис. 1.

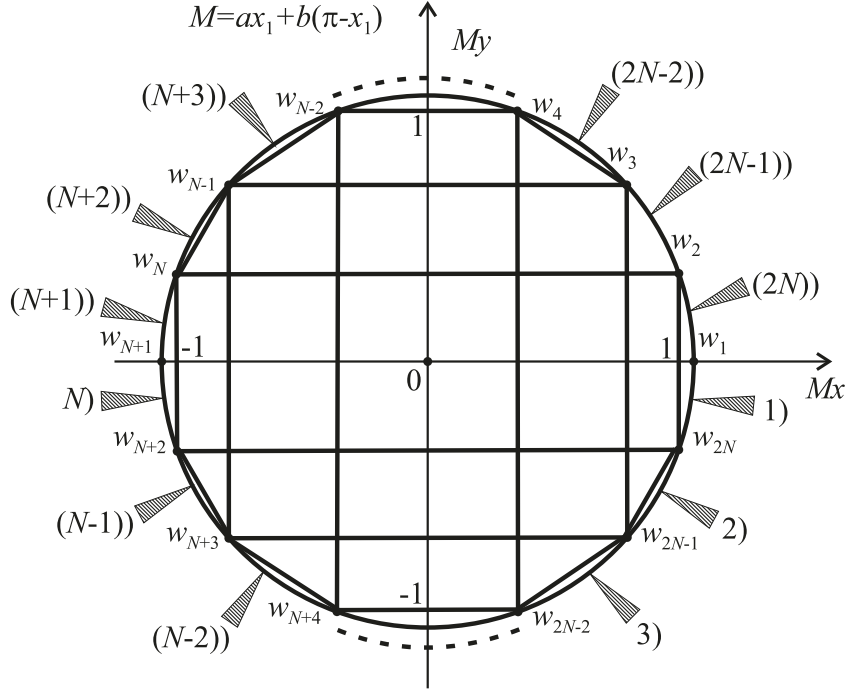


Рис. 1.

Из общих результатов об асимптотическом расположении нулей квазиполиномов (см. [21, гл. 12]) и вида представленной на рис. 1 индикаторной диаграммы следует, что для нахождения корней уравнения (5.7) в этом уравнении необходимо оставить только экспоненты с показателями $\bar{M}\omega_{2N} = M\omega_2$ и $\bar{M}\omega_1 = M\omega_1$ (где $M = ax_1 + b(\pi - x_1)$); в секторе 2) необходимо оставить только экспоненты с показателями $\bar{M}\omega_{2N} = M\omega_2$ и $\bar{M}\omega_{2N-1} = M\omega_3$ и т. д.

6. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (0.1)–(0.5) в секторе 1) индикаторной диаграммы рис. 1

Из вышесказанного следует, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (0.1)–(0.5) в секторе 1) индикаторной диаграммы рис. 1 имеет вид

$$g_1(s) = \phi_{11}^{n_1}(\pi, s) - z^{M_{2N-1}} \phi_{12}^{n_1}(\pi, s) = 0. \quad (6.1)$$

Применяя формулы (4.17)–(4.20), (5.1)–(5.3) и (2.10)–(2.15), уравнение (6.1) можно привести к следующему виду:

$$g_1(s) = \left[g_{1,0}(s) + \frac{g_{1,2N-1}(s)}{s^{2N-1}} + \frac{g_{1,2N,1}(s)}{s^{2N}} + \frac{g_{1,2N,2}(s)}{s^{2N}} + O\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right] - z^{M_{2N-1}} \left[g_{2,0}(s) + \frac{g_{2,2N-1}}{s^{2N-1}} + \frac{g_{2,2N,1}}{s^{2N}} + \frac{g_{2,2N,2}}{s^{2N}} + O\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right] = 0, \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} g_{1,0}(s) &= \omega_1^{n_1} e^{M\omega_1 s}; & g_{2,0}(s) &= \omega_2^{n_1} e^{M\omega_2 s}; & M &= ax_1 + b(\pi - x_1); \\ g_{1,2N-1} &= \omega_1 \omega_1^{n_1} T_{2N-1} e^{M\omega_1 s}; & g_{2,2N-1} &= \omega_2 \omega_2^{n_1} T_{2N-1} e^{M\omega_2 s}; \\ & & T_{2N-1} &= A_{2N-1}(x_1) + B_{2N-1}(\pi); \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$g_{1,2N,1} = \omega_1^{n_1} T_{2N} e^{M\omega_1 s}; \quad g_{2,2N,1} = \omega_2^{n_1} T_{2N} e^{M\omega_2 s}; \quad T_{2N} = H_{2N} + B_{2N}^{n_1}(\pi);$$

$$H_{2N} = \frac{D_{2N} + (2N-1)E_{2N}}{2N}; \quad (6.4)$$

$$g_{1,2N,2} = \omega_2^{n_1} H_{1,2N} e^{(a\omega_1 - b\omega_2)sx_1} e^{b\omega_2 s\pi}; \quad g_{2,2N,2} = \omega_1^{n_1} H_{1,2} e^{(a\omega_2 - b\omega_1)sx_1} e^{b\omega_1 s\pi}. \quad (6.5)$$

Поделив уравнение (6.2)–(6.5) на $\omega_1^{n_1} e^{M\omega_2 s} \neq 0$, приведем его к следующему виду:

$$g_1(s) = e^{M(\omega_1 - \omega_2)s} \left[1 + \frac{\omega_1 T_{2N-1}}{s^{2N-1}} + \frac{T_{2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right]$$

$$- \frac{\omega_2^{n_1}}{\omega_1^{n_1}} z^{M_{2N-1}} \left[1 + \frac{\omega_2 T_{2N-1}}{s^{2N-1}} + \frac{T_{2N}}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) \right]$$

$$+ \frac{U_{2N,1}(s)}{s^{2N}} - \frac{z^{M_{2N-1}} U_{2N,2}(s)}{s^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{2N+1}}\right) = 0, \quad \omega_2 = z = e^{\frac{2\pi}{2N}i}, \quad (6.6)$$

$$U_{2N,1}(s) = g_{1,2N,2}(s) \omega_1^{-n_1} e^{-M\omega_2 s}; \quad U_{2N,2}(s) = g_{2,2N,2}(s) \omega_1^{-n_1} e^{-M\omega_2 s}. \quad (6.7)$$

Основное приближение уравнения (6.6), (6.7) имеет вид

$$e^{M(\omega_1 - \omega_2)s} = \frac{\omega_2^{n_1}}{\omega_1^{n_1}} z^{M_{2N-1}} = e^{2\pi i k} e^{\frac{2\pi i n_1}{2N}} e^{\frac{2\pi i M_{2N-1}}{2N}} \Leftrightarrow s_{k,1,\text{оч}} = \frac{2\pi i \tilde{k}}{M(\omega_1 - \omega_2)}, \quad (6.8)$$

$$\tilde{k} = k + \frac{M_{2N-1}}{2N} + \frac{n_1}{2N}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.9)$$

Поэтому (см. [21, гл. 12] и [2]) справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.2. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (0.1)–(0.5) в секторе 1) индикаторной диаграммы рис. 1 имеет вид*

$$s_{k,1} = \frac{2\pi i}{M(\omega_1 - \omega_2)} \left[\tilde{k} + \frac{d_{2N-1,k,1}}{\tilde{k}^{2N-1}} + \frac{d_{2N,k,1}}{\tilde{k}^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{2N+1}}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.10)$$

Доказательство. Применяя формулы Тейлора, получаем

$$e^{M(\omega_1 - \omega_2)s} \Big|_{s_{k,1}} \stackrel{(6.10)}{=} \exp \left[M(\omega_1 - \omega_2) \frac{2\pi i}{M(\omega_1 - \omega_2)} \left(\tilde{k} + \frac{d_{2N-1,k,1}}{\tilde{k}^{2N-1}} + \dots \right) \right]$$

$$= z^{M_{2N-1}} z^{n_1} \left[1 + \frac{2\pi i d_{2N-1,k,1}}{\tilde{k}^{2N-1}} + \frac{2\pi i d_{2N,k,1}}{\tilde{k}^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{2N+1}}\right) \right]; \quad (6.11)$$

$$\frac{1}{s^p} \Big|_{s_{k,1}} \stackrel{(6.10)}{=} \frac{M^p(\omega_1 - \omega_2)^p}{2^p \pi^p i^p} \frac{1}{\tilde{k}^p} \left(1 - \frac{p d_{2N-1,k,1}}{\tilde{k}^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{2N+1}}\right) \right). \quad (6.12)$$

Подставляя формулы (6.10)–(6.12) в уравнение (6.6), (6.7), получаем

$$z^{M_{2N-1}} z^{n_1} \left[1 + \frac{2\pi i d_{2N-1,k,1}}{\tilde{k}^{2N-1}} + \frac{2\pi i d_{2N,k,1}}{\tilde{k}^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{2N+1}}\right) \right]$$

$$\times \left[1 + \frac{\omega_1 E_{2N-1}}{\tilde{k}^{2N-1}} + \frac{G_{2N} T_{2N}}{\tilde{k}^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{2N+1}}\right) \right]$$

$$- z^{M_{2N-1}} z^{n_1} \left[1 + \frac{\omega_2 E_{2N-1}}{\tilde{k}^{2N-1}} + \frac{G_{2N} T_{2N}}{\tilde{k}^{2N}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{2N+1}}\right) \right]$$

$$+ \frac{U_{2N,1}(s) G_{2N}}{\tilde{k}^{2N}} \Big|_{s_{k,1}} - \frac{z^{M_{2N-1}} z^{n_1} U_{2N,2}(s) G_{2N}}{\tilde{k}^{2N}} \Big|_{s_{k,1}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{2N+1}}\right) = 0, \quad (6.13)$$

$$E_{2N-1} = \frac{M^{2N-1}(\omega_1 - \omega_2)^{2N-1}T_{2N-1}}{2^{2N-1}\pi^{2N-1}i^{2N-1}}; \quad G_{2N} = \frac{M^{2N}(\omega_1 - \omega_2)^{2N}}{2^{2N}\pi^{2N}i^{2N}}. \quad (6.14)$$

При $\tilde{k}^0$ в уравнении (6.13), (6.14) мы имеем верное равенство: $z^{M_{2N-1}}z^{n_1} - z^{M_{2N-1}}z^{n_1} = 0$, что подтверждает правильность выбора асимптотического разложения (6.10). Поделив уравнение (6.13), (6.14) на $z^{M_{2N-1}}z^{n_1} \neq 0$ и приравняв коэффициенты при $\frac{1}{k^{2N-1}}$, получим

$$d_{2N-1,k,1} = -\frac{1}{2\pi i}(\omega_1 - \omega_2)E_{2N-1} = -\frac{(\omega_1 - \omega_2)^{2N}M^{2N-1}T_{2N-1}}{2^{2N}\pi^{2N}i^{2N}}. \quad (6.15)$$

Из формулы (2.1) следует

$$(\omega_1 - \omega_2)^{2N} = (1 - e^{\frac{2\pi i}{2N}})^{2N} = (e^{\frac{\pi i}{2N}}(e^{-\frac{\pi i}{2N}} - e^{\frac{\pi i}{2N}}))^{2N} = -2^{2N} \sin^{2N} \left(\frac{\pi}{2N} \right) (-1)^N. \quad (6.16)$$

Подставляя величины (6.16), (6.3), (2.6), (2.12) в (6.15), получаем

$$d_{2N-1,k,1} = \frac{(-1)^{N+1}M^{2N-1}\sin^{2N}(\frac{\pi}{2N})}{2N\pi^{2N}} \left[\frac{1}{a^{2N-1}} \int_0^{x_1} q_1(t)dt + \frac{1}{b^{2N-1}} \int_{x_1}^{\pi} q_2(t)dt \right], \quad (6.17)$$

где $M = ax_1 + b(\pi - x_1)$; $k = 1, 2, 3, \dots$

Приравнивая в уравнении (6.13), (6.14) коэффициенты при $\frac{1}{k^{2N}}$ и учитывая соотношение (6.16), получаем

$$d_{2N,k,1} = \frac{(-1)^{N+1}M^{2N}\sin^{2N}(\frac{\pi}{2N})}{2i\pi^{2N+1}} [T_{2N} + z^{-n_1}H_{1,2}e^{-ax_1(\omega_1-\omega_2)s}e^{b(\pi-x_1)(\omega_1-\omega_2)s} \Big|_{s_{k,1,\text{оч}}} - T_{2N} - z^{M_{2N-1}}z^{n_1}\bar{H}_{1,2}e^{ax_1(\omega_1-\omega_2)s}e^{-b(\pi-x_1)(\omega_1-\omega_2)s} \Big|_{s_{k,1,\text{оч}}}]. \quad (6.18)$$

Здесь и далее обозначаем $H_{12} = |H_{12}|e^{i\varphi_{12}}$, $\bar{H}_{12} = |H_{12}|e^{-i\varphi_{12}}$, $\varphi_{12} = \arg(H_{12})$. После преобразований в формуле (6.18), использующих формулы (6.8), (6.9), получаем

$$d_{2N,k,1} = \frac{(-1)^N M^{2N} |H_{12}| \sin^{2N}(\frac{\pi}{2N})}{\pi^{2N+1}} (-1)^{k+1} \sin^{2N} \left[\frac{ax_1 - b(\pi - x_1)}{M} \pi \tilde{k} - \varphi_{12} - \frac{\pi M_{2N-1}}{2N} + \frac{\pi n_1}{2N} \right],$$

$$M = ax_1 + b(\pi - x_1), \quad \varphi_{12} = \arg(H_{12}),$$

$$M_{2N-1} = \sum_{k=1}^{2N-1} m_k, \quad \tilde{k} = k + \frac{M_{2N-1}}{2N} + \frac{n_1}{2N}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.19)$$

Формулы (6.17), (6.19) показывают, что все коэффициенты разложения (6.10) находятся единственным образом. Приведены явные формулы для их вычисления. Таким образом, теорема 6.2 полностью доказана. $\square$

Изучая аналогичным образом сектора $2), 3), \dots, 2N)$ индикаторной диаграммы рис. 1, приходим к выводу: спектр дифференциального оператора (0.1)–(0.5) подчиняется следующему закону:

$$s_{k,2} = s_{k,1}e^{-\frac{2\pi}{2N}i}; \quad s_{k,3} = s_{k,2}e^{-\frac{2\pi}{2N}i} = s_{k,1}e^{-\frac{4\pi}{2N}i}; \quad \dots; \quad s_{k,p} = s_{k,p-1}e^{-\frac{2\pi}{2N}i} = s_{k,1}e^{-\frac{2\pi}{2N}(p-1)i},$$

$$p = 1, 2, \dots, 2N; \quad \lambda_{k,n} = s_{k,n}^{2N}, \quad n = 1, 2, \dots, 2N; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.20)$$

7. Вычисление первого регуляризованного следа дифференциального оператора (0.1)–(0.5)

Из формул (6.10), (6.16), (6.20) получаем

$$s_{k,1}^{2N} = s_{k,m}^{2N} = \lambda_{k,m} = \lambda_{k,1} = -\frac{\pi^{2N}}{M^{2N} \sin^{2N}(\frac{\pi}{2N})} \left[\tilde{k}^{2N} + 2N d_{2N-1,k,1} + \frac{2N d_{2N,k,1}}{\tilde{k}} + O\left(\frac{1}{\tilde{k}^2}\right) \right],$$

$$k = 1, 2, 3, \dots; \quad N = 2, 3, 4, \dots; \quad m = 1, 2, \dots, 2N,$$

откуда следует, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[s_{k,m}^{2N} + \Theta_N \tilde{k}^{2N} + 2N \Theta_N d_{2N-1,k,1} + 2N \Theta_N \frac{d_{2N,k,1}}{\tilde{k}} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{\tilde{k}^2}\right), \quad \Theta_N = \frac{\pi^{2N}}{M^{2N} \sin^{2N}(\frac{\pi}{2N})},$$

сходятся, и их сумму можно найти методами работ [22] и [23, гл. 5].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Формула первого регуляризованного следа дифференциального оператора (0.1)–(0.5) имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_{k,1} + \Theta_N \tilde{k}^{2N} + 2N \Theta_N d_{2N-1,k,1}] \\ = \frac{(2N-1 + 2 \sum_{p=1}^{2N-1} m_p) q_1(0)}{2a^{2N}} + \frac{(2N-1 + 2n_1) q_2(\pi)}{2b^{2N}} \\ - N \Theta_N d_{2N-1,k,1} - \Theta_N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2N,k,1}}{\tilde{k}}, \quad \Theta_N = \frac{\pi^{2N}}{M^{2N} \sin^{2N}(\frac{\pi}{2N})}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

при этом в силу формулы (6.19) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} d_{2N,k,1}/\tilde{k}$ является сходящимся тригонометрическим рядом Фурье.

Доказательство. Из работы [23, гл. 5] следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{2N} \left[s_{k,p}^{2N} + \Theta_N \tilde{k}^{2N} + 2N \Theta_N d_{2N-1,k,p} + 2N \Theta_N \frac{d_{2N,k,p}}{\tilde{k}} \right] \right) = \omega_{2N+1}^{(1)} - \phi_{2N+1}^{(1)}(-2N).$$

Здесь $\omega_{2N+1}^{(1)}$ — коэффициент при $1/s^{2N+1}$ в разложении функции $h'_1(s)/h_1(s)$, где

$$h_1(s) = \frac{g_1(s) v_{2N-1}(s)}{\Delta_{02}(s)},$$

функции $g_1(s)$, $v_{2N-1}(s)$, $\Delta_{02}(s)$ определены формулами (6.6), (5.6), (3.7) соответственно, а функция

$$\phi_{2N+1}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{p=1}^{2N} (\Theta_N \tilde{k}^{2N} + 2N \Theta_N d_{2N-1,k,p} \tilde{k}^0) \right]$$

выражается через ζ -функцию Римана. Поэтому в силу формулы (6.20) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[s_{k,1}^{2N} + \Theta_N \tilde{k}^{2N} + 2N \Theta_N d_{2N-1,k,1} + 2N \Theta_N \frac{d_{2N,k,1}}{\tilde{k}} \right] = \frac{\omega_{2N+1}^{(1)}}{2N} - \frac{\phi_{2N+1}^{(1)}(-2N)}{2N}, \quad (7.2)$$

где

$$\begin{aligned}\phi_{2N+1}^{(1)}(-2N) &= 2N \sum_{k=1}^{\infty} [\Theta_N \tilde{k}^{2N} + 2N \Theta_N d_{2N-1,k,1} \tilde{k}^0] \\ &= 2N [\Theta_N \zeta(-2N) + 2N \Theta_N d_{2N-1,k,1} \zeta(0)] = -2N^2 \Theta_N d_{2N-1,k,1},\end{aligned}\quad (7.3)$$

так как $\zeta(-2N) = 0$ ($N = 1, 2, 3, \dots$), $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Так как $h_1(s) = \frac{g_1(s)v_{2N-1}(s)}{\Delta_{02}(s)}$, то $\frac{h_1'(s)}{h_1(s)} = \frac{g_1'(s)}{g_1(s)} + \frac{v_{2N-1}'(s)}{v_{2N-1}(s)} - \frac{\Delta_{02}'(s)}{\Delta_{02}(s)}$, поэтому

$$\omega_{2N+1}^{(1)} = \omega_{2N+1,1}^{(1)} + \omega_{2N+1,2}^{(1)} - \omega_{2N+1,3}^{(1)},$$

где числа $\omega_{2N+1,1}^{(1)}$, $\omega_{2N+1,2}^{(1)}$, $\omega_{2N+1,3}^{(1)}$ — коэффициенты при $1/s^{2N+1}$ в разложении функций $g_1'(s)/g_1(s)$, $v_{2N-1}'(s)/v_{2N-1}(s)$, $\Delta_{02}'(s)/\Delta_{02}(s)$ соответственно, переменная s принадлежит сектору 1) индикаторной диаграммы рис. 1. Применяя формулы (3.7), (5.6), (6.6), учитывая, что s принадлежит сектору 1), получаем

$$\begin{aligned}\omega_{2N+1,3}^{(1)} &= -2NE_{2N}, \quad E_{2N} \stackrel{(3.6)}{=} -\frac{(2N-1)q_2(x_1)}{2b^{2N}}; \\ \omega_{2N+1,2}^{(1)} &= -2NR_{1,2N}, \quad R_{1,2N} \stackrel{(5.6)}{=} \sum_{p=1}^{2N-1} A_{2N}^{m_p}(0); \\ \omega_{2N+1,1}^{(1)} &= -2NT_{2N}, \quad T_{2N} \stackrel{(6.4)}{=} H_{2N} + B_{2N}^{n_1}(\pi), \quad H_{2N} \stackrel{(6.4)}{=} \frac{D_{2N} + (2N-1)E_{2N}}{2N}.\end{aligned}\quad (7.4)$$

Применяя формулы (2.7), (2.13), (2.8), (2.14), из формулы (7.4) получаем

$$\begin{aligned}\omega_{2N+1,1}^{(1)} + \omega_{2N+1,2}^{(1)} - \omega_{2N+1,3}^{(1)} &= \frac{((2N-1) + 2 \sum_{p=1}^{2N-1} m_p)q_1(0)2N}{2a^{2N}} \\ &\quad + \frac{(2N-1) + 2n_1}{2b^{2N}} q_2(\pi)2N + \frac{q_2(x_1) \cdot 0}{4Nb^{2N}}.\end{aligned}\quad (7.5)$$

Подставляя формулы (7.3)–(7.5) в формулу (7.2), получаем формулу (7.1), что завершает доказательство теоремы 7.1. $\square$

В случае предельных переходов $x_1 \rightarrow 0$, $x_1 \rightarrow \pi$ или $b \rightarrow a$ полученные нами формулы (6.10), (6.17), (6.19), (7.1) переходят в формулы для дифференциального оператора (0.1)–(0.5) с непрерывным потенциалом $q(x)$.

References

- [1] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, 2-е изд., Наука, М., 1969, 528 с.; англ. пер.: М. А. Naimark, *Linear Differential Operators*, 2nd ed., Dover Publications, New-York, 2014, 528 pp.
- [2] В. Б. Лидский, В. А. Садовничий, “Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций”, *Математический сборник*, **75(117)**:4 (1968), 558–566; англ. пер.: V. B. Lidskii, V. A. Sadovnichii, “Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions”, *Math. USSR-Sb.*, **4**:4 (1968), 519–527.
- [3] В. А. Юрко, “Спектральный анализ дифференциальных операторов высших порядков с условиями разрыва во внутренней точке”, *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума*, СМФН, **63**, Российский университет дружбы народов, М., 2017, 362–372. [V. A. Yurko, “Spectral analysis of higher-order differential operators with discontinuity conditions at an interior point”, *Proceedings of the Crimean autumn mathematical school-symposium*, CMFD, **63**, Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, 2017, 362–372 (In Russian)].

- [4] H. P. W. Gottlieb, “Iso-spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients”, *Journal of Math. Anal. and Appl.*, **132** (1988), 123–137.
- [5] В. А. Ильин, “О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора”, *Математические заметки*, **22**:5 (1977), 679–698; англ. пер.: V. A. Il'in, “Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator”, *Math. Notes*, **22**:5 (1977), 870–882.
- [6] В. А. Ильин, “Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка”, *Дифференциальные уравнения*, **22**:12 (1986), 2059–2071. [V. A. Ilyin, “Necessary and sufficient conditions for being a Riesz basis of root vectors of second-order discontinuous operators”, *Differ. Uravn.*, **22**:12 (1986), 2059–2071 (In Russian)].
- [7] В. Д. Будаев, “О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами”, *Дифференциальные уравнения*, **23**:6 (1987), 941–952. [V. D. Budaev, “The property of being an unconditional basis on a closed interval, for systems of eigen- and associated functions of a second-order operator with discontinuous coefficients”, *Differ. Uravn.*, **23**:6 (1987), 941–952 (In Russian)].
- [8] С. И. Митрохин, “О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами”, *Дифференциальные уравнения*, **28**:3 (1992), 530–532. [S. I. Mitrokhin, “Spectral properties of differential operators with discontinuous coefficients”, *Differ. Uravn.*, **28**:3 (1992), 530–532 (In Russian)].
- [9] С. И. Митрохин, “О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией”, *Доклады РАН*, **356**:1 (1997), 13–15. [S. I. Mitrokhin, “On some spectral properties of second-order differential operators with a discontinuous weight function”, *Dokl. Akad. Nauk*, **356**:1 (1997), 13–15 (In Russian)].
- [10] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Математические заметки*, **66**:6 (1999), 897–912; англ. пер.: A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “Sturm–Liouville operators with singular potentials”, *Mathematical Notes*, **66**:6 (1999), 741–753.
- [11] С. И. Митрохин, “Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка со знакопеременной весовой функцией”, *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*, 2018, №6, 46–58; англ. пер.: S. I. Mitrokhin, “Asymptotics of eigenvalues of fourth order differential operator with alternating weight function”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **73**:6 (2018), 254–265.
- [12] Г. А. Айгунов, М. М. Гехтман, “К вопросу о максимально возможной скорости роста системы собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с непрерывной весовой функцией на конечном отрезке”, *УМН*, **52**:3(315) (1997), 161–162; англ. пер.: G. A. Aigunov, M. M. Gekhtman, “On the question of maximal rate of growth of the system of eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator with a continuous weight function on a finite interval”, *Russian Math. Surveys*, **52**:3 (1997), 605–606.
- [13] А. П. Гуревич, А. П. Хромов, “Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией”, *Математические заметки*, **56**:1 (1994), 3–15; англ. пер.: A. P. Gurevich, A. P. Khromov, “First and second order differentiation operators with weight functions of variable sign”, *Mathematical Notes*, **56**:1 (1994), 653–661.
- [14] С. И. Митрохин, “Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией”, *Известия вузов. Математика*, 2018, №6, 31–47; англ. пер.: S. I. Mitrokhin, “Asymptotics of eigenvalues of differential operator with alternating weight function”, *Russian Mathematics*, **62**:6 (2018), 27–42.
- [15] С. И. Митрохин, “Об исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов с гладкой весовой функцией”, *Вестник Российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 25–47. [S. I. Mitrokhin, “On the study of the spectral properties of differential operators with a smooth weight function”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 25–47 (In Russian)].
- [16] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, “Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом”, *Известия РАН. Серия: Математика*, **64**:4 (2000), 47–108; англ. пер.: V. A. Vinokurov, V. A. Sadovnichii, “Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm–Liouville boundary-value problem on a segment with a summable potential”, *Izvestiya: Mathematics*, **64**:4 (2000), 695–754.

- [17] С. И. Митрохин, “О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Труды МИАН, **270**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 188–197; англ. пер.: S. I. Mitrokhin, “Spectral properties of a fourth-order differential operator with integrable coefficients”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270** (2010), 184–193.
- [18] С. И. Митрохин, “Спектральные свойства семейства дифференциальных операторов четного порядка с суммируемым потенциалом”, *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*, 2017, № 4, 3–15; англ. пер.: S. I. Mitrokhin, “Spectral properties of the family of even order differential operators with a summable potential”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **72:4** (2017), 137–148.
- [19] С. И. Митрохин, “О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом”, *Дифференциальные уравнения*, **47:12** (2011), 1808–1811; англ. пер.: S. I. Mitrokhin, “On the spectral properties of odd-order differential operators with integrable potential”, *Differential Equations*, **47:2** (2011), 1833–1836.
- [20] С. И. Митрохин, “Асимптотика спектра периодической краевой задачи для дифференциального оператора с суммируемым потенциалом”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 136–149. [S. I. Mitrokhin, “Asymptotics of the spectrum of a periodic boundary value problem for a differential operator with a summable potential”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **25**, 2019, 136–149 (In Russian)].
- [21] Р. Беллман, К. Л. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967. [R. Bellman, K. L. Cook, *Differential-Difference Equations*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].
- [22] В. А. Садовничий, “О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков”, *Математический сборник*, **72(114):2** (1967), 293–317; англ. пер.: V. A. Sadovnichii, “The trace of ordinary differential operators of high order”, *Math. USSR-Sb.*, **1:2** (1967), 263–288.
- [23] В. А. Садовничий, *Теория операторов*, Дрофа, М., 2001, 384 с. [V. A. Sadovnichii, *Operator Theory*, Drofa Publ., Moscow, 2001 (In Russian)].

Информация об авторе

Митрохин Сергей Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского вычислительного центра. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1896-0563>

Поступила в редакцию 09.12.2021 г.
 Поступила после рецензирования 21.02.2022 г.
 Принята к публикации 10.03.2022 г.

Information about the author

Sergey I. Mitrokhin, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Research Computer Center. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation.
 E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1896-0563>

Received 09.12.2021
 Reviewed 21.02.2022
 Accepted for press 10.03.2022

© Сумин М.И., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-58-79

УДК 517.9



О некорректных задачах, экстремальных функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа

Михаил Иосифович СУМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23

Аннотация. Задача поиска нормального решения операторного уравнения первого рода на паре гильбертовых пространств является классической в теории некорректных задач. В соответствии с теорией регуляризации ее решения аппроксимируются экстремальными функционала Тихонова. С точки зрения теории задач на условный экстремум эквивалентной классической некорректной задаче является задача минимизации функционала, равного квадрату нормы элемента, с операторным (т. е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством. В статье обсуждается возможность регуляризации принципа Лагранжа (ПЛ) в указанной задаче на условный экстремум. Эта регуляризация представляет собою такую трансформацию ПЛ, которая превращает его в универсальное средство устойчивого решения некорректных задач в терминах обобщенных минимизирующих последовательностей (ОМП) и сохраняет основанное на конструкциях классической функции Лагранжа его «общее структурное устройство». Трансформированный ПЛ «содержит» классический аналог в качестве своего предельного варианта при стремлении номеров элементов ОМП к бесконечности. Обсуждаются как неитеративный, так и итеративный варианты регуляризации ПЛ. Каждый из них приводит к устойчивому генерированию ОМП в исходной задаче на условный экстремум из экстремалей регулярного функционала Лагранжа, взятого при значениях двойственной переменной, вырабатываемой соответствующей процедурой регуляризации двойственной задачи. В заключение статьи обсуждается взаимосвязь экстремалей функционалов Тихонова и Лагранжа в рассматриваемой классической некорректной задаче.

Ключевые слова: некорректная задача, линейное операторное уравнение, регуляризирующий алгоритм, метод регуляризации Тихонова, условная минимизация, операторное ограничение-равенство, правило множителей Лагранжа, обобщенная минимизирующая последовательность, итеративная регуляризация, двойственная регуляризация, регуляризованный принцип Лагранжа

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00199_a).

Для цитирования: Сумин М.И. О некорректных задачах, экстремальных функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 58–79. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-58-79.

© M. I. Sumin, 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-58-79



On ill-posed problems, extremals of the Tikhonov functional and the regularized Lagrange principles

Mikhail I. SUMIN

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Nizhnii Novgorod State University

23 Gagarin Ave., Nizhnii Novgorod 603950, Russian Federation

Abstract. The problem of finding a normal solution to an operator equation of the first kind on a pair of Hilbert spaces is classical in the theory of ill-posed problems. In accordance with the theory of regularization, its solutions are approximated by the extremals of the Tikhonov functional. From the point of view of the theory of problems for constrained extremum, the problem of minimizing a functional, equal to the square of the norm of an element, with an operator equality constraint (that is, given by an operator with an infinite-dimensional image) is equivalent to the classical ill-posed problem. The paper discusses the possibility of regularizing the Lagrange principle (LP) in the specified constrained extremum problem. This regularization is a transformation of the LP that turns it into a universal tool of stable solving ill-posed problems in terms of generalized minimizing sequences (GMS) and preserves its “general structural arrangement” based on the constructions of the classical Lagrange function. The transformed LP “contains” the classical analogue as its limiting variant when the numbers of the GMS elements tend to infinity. Both non-iterative and iterative variants of the regularization of the LP are discussed. Each of them leads to stable generation of the GMS in the original constrained extremum problem from the extremals of the regular Lagrange functional taken at the values of the dual variable generated by the corresponding procedure for the regularization of the dual problem. In conclusion, the article discusses the relationship between the extremals of the Tikhonov and Lagrange functionals in the considered classical ill-posed problem.

Keywords: ill-posed problem, linear operator equation, Tikhonov’s regularization method, constrained minimization, operator equality constraint, Lagrange multiplier rule, generalized minimizing sequence, regularizing algorithm, iterative regularization, dual regularization, regularized Lagrange principle

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00199).

Mathematics Subject Classification: 47A52 49K27 90C25 90C46.

For citation: Sumin M.I. O nekorrektnykh zadachakh, ekstremalyakh funktsionala Tikhonova i regulyarizovannykh printsipakh Lagranzha [On ill-posed problems, extremals of the Tikhonov functional and the regularized Lagrange principles]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 58–79. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-58-79. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Основную цель данной статьи автор видит в ответе на вопрос, как, опираясь на классическое правило множителей Лагранжа или, другими словами, принцип Лагранжа (ПЛ), можно решать некорректные задачи. Как известно, некорректные задачи составляют в совокупности огромный класс математических задач, порожденный запросами современных естественнонаучных приложений. Существует несколько подходов к решению таких задач. Среди них наибольшую известность получил подход, за которым закрепилось название метода регуляризации Тихонова [1–4]. Метод регуляризации Тихонова был предложен для приближенного нахождения нормального (минимального по норме) решения операторного уравнения первого рода

$$(IP) \quad Az = h, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

где $A : Z \rightarrow H$ — линейный ограниченный оператор, $h \in H$ — заданный элемент, $\mathcal{D}$ — выпуклое замкнутое множество, Z, H — гильбертовы пространства. При этом в самых первых работах [1] некорректная задача (IP) рассматривалась для случая $\mathcal{D} = Z$ при условии, что оператор A является интегральным оператором Фредгольма, а в качестве Z, H используются пространства суммируемых с квадратом функций.

Основным в теории некорректных задач является понятие регуляризирующего алгоритма (оператора) по Тихонову [1–4]. Напомним его. С этой целью введем «приближенную» задачу (IP)

$$(IP^\delta) \quad A^\delta z = h^\delta, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

с линейным ограниченным оператором $A^\delta : Z \rightarrow H$ и заданным элементом $h^\delta \in H$ такими, что $\|A^\delta - A^0\| \leq \delta$, $\|h^\delta - h^0\| \leq \delta$, $A \equiv A^0$, $h \equiv h^0$. Здесь $\delta \in (0, \delta_0)$, $\delta_0 > 0$ — числовой параметр, характеризующий степень отклонения исходных данных приближенной задачи (IP^δ) от исходных данных точной задачи $(IP) = (IP^0)$. Предположим, наконец, что задача $(IP) = (IP^0)$ имеет точное нормальное решение $z^0 \in \mathcal{D}$.

О п р е д е л е н и е 0.1. Регуляризирующим для задачи (IP^0) называется зависящий от δ и действующий во множество $\mathcal{D}$ алгоритм (оператор) $R(A^\delta, h^\delta, \delta)$, ставящий в соответствие любой паре исходных данных $\{A^\delta, h^\delta\}$, удовлетворяющей оценкам $\|A^\delta - A^0\| \leq \delta$, $\|h^\delta - h^0\| \leq \delta$, элемент z^δ такой, что $\|z^\delta - z^0\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$.

Сам же метод регуляризации (стабилизации) Тихонова указывает конкретный способ построения регуляризирующего алгоритма, обеспечивающий устойчивое приближенное решение некорректной задачи — операторного уравнения первого рода. Он предполагает разрешимость задачи $(IP) = (IP^0)$ и заключается [2–4] в отыскании решений $z^{\delta, \alpha(\delta)}$ задачи минимизации сглаживающего функционала — функционала Тихонова $M^{\delta, \alpha(\delta)}(z) \equiv \|A^\delta z - h^\delta\|^2 + \alpha(\delta)\|z\|^2 \rightarrow \min$, $z \in \mathcal{D}$ при условии согласования

$$\delta^2/\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

что сводится к решению вариационного неравенства

$$\langle A^{\delta*} A^\delta z + \alpha(\delta)z - A^{\delta*} h^\delta, y - z \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}. \quad (0.1)$$

В этом случае для экстремалей $z^{\delta, \alpha(\delta)}$ функционала Тихонова — приближенных решений задачи $(IP) = (IP^0)$, как известно [2–4], имеет место при указанных условиях предельное соотношение $\|z^{\delta, \alpha(\delta)} - z^0\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$.

Изначально некорректные задачи ставились как задачи отыскания (нормальных) решений абстрактных операторных уравнений первого рода вида (IP) [2]. Такие задачи, будучи формально эквивалентными задачам минимизации функционала, равного квадрату нормы элемента, с операторным (т. е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством, решались тем не менее в классической теории некорректных задач не с помощью правила множителей Лагранжа, хотя при обосновании содержательного смысла метода регуляризации и применялись связанные с этим классическим правилом соображения эвристического характера [2, гл. 2, § 2, с. 56]. Это обстоятельство имеет простое объяснение и связано, во-первых, с недостаточной развитостью в шестидесятые годы прошлого века классического правила множителей для задач оптимизации с операторными ограничениями-равенствами и, во-вторых, со свойствами некорректности этого классического правила.

В данной работе показывается, что правило множителей Лагранжа как нельзя лучше подходит для решения задач отыскания (нормальных) решений абстрактных операторных уравнений первого рода вида (IP) [2–4], как, впрочем, и многих других некорректных задач, однако, прежде всего, оно само должно быть регуляризовано. Главная роль в такой регуляризации принадлежит конструкции классической функции Лагранжа. В работе: 1) обсуждаются проблемы, связанные с формулированием ПЛ в задаче отыскания нормальных решений абстрактных операторных уравнений первого рода; 2) обсуждаются два основанных на двойственности варианта регуляризации (внутренней, скрытой), т. е. регуляризации за счет подходящего выбора двойственной переменной в классической некорректной задаче, рассматриваемой как задачи условной минимизации с операторным ограничением-равенством; 3) показывается, что классический ПЛ является предельным вариантом своих регуляризованных аналогов.

Основное назначение обоих рассматриваемых в статье вариантов (неитеративного и итеративного) регуляризованного ПЛ — устойчивое генерирование обобщенных минимизирующих последовательностей (ОМП) в задаче условной минимизации, эквивалентной исходной некорректной задаче, из экстремалей (минималей) регулярного функционала Лагранжа, взятого при значениях двойственной переменной, вырабатываемых соответствующими вариантами регуляризации двойственной задачи (неитеративной и итеративной). В теории математического программирования применяемые в работе ОМП (см. ниже определение 2.1) известны под названием обобщенных оптимальных планов [5], в свою очередь, в теории оптимального управления они получили название минимизирующих приближенных решений [6, гл. III]. Благодаря сильной выпуклости целевого функционала (см. лемму 2.1 ниже) оба варианта регуляризованного ПЛ можно трактовать одновременно как выражаемые в секвенциальной форме необходимые и достаточные условия обычной оптимальности в этой задаче условной оптимизации. Применяемое в статье понятие ОМП-образующего (регуляризирующего) алгоритма в этой задаче условной минимизации (см. ниже определения 2.2, 2.3), подразумевающее сходимость приближенных решений как «по функции», так и «по ограничениям», можно охарактеризовать как совпадающее с введенным А. Н. Тихоновым [1, 2] классическим понятием регуляризирующего алгоритма определения 0.1. Последнее объясняется тем фактом, что за счет частного вида задачи

условной минимизации указанная сходимость «по функции» и «по ограничениям» влечет и сильную сходимость конструируемой ОМП к точному решению. В заключение статьи обсуждается взаимосвязь экстремалей функционалов Тихонова и Лагранжа в рассматриваемой классической некорректной задаче (IP) .

1. ПЛ в задаче решения операторного уравнения как задачи условной минимизации с ограничением-равенством

Задача нахождения нормального решения операторного уравнения (IP) может быть формально записана как эквивалентная задача выпуклого программирования с операторным ограничением-равенством

$$(P) \quad \|z\|^2 \rightarrow \inf, \quad Az = h, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z.$$

В этой связи естественно задаться вопросом: нельзя ли применить для решения некорректной задачи конструкции метода множителей Лагранжа или, другими словами, ПЛ? Здесь необходимо сразу отметить: а) сами задачи условной оптимизации — это типичные некорректные задачи [7]; б) свойства некорректности в полной мере присущи и ПЛ [8, 9]. Возникающие на данном пути принципиальные трудности начинаются при попытке формально записать ПЛ в задаче условной оптимизации (P) , представляющей собою эквивалентную запись задачи поиска нормального решения уравнения первого рода (IP) . При формальной записи ПЛ можно опереться на два подхода, один из которых имеет дело с «индивидуальным» ПЛ, т. е. с ПЛ в индивидуальной (не зависящей от параметров) задаче (см., например, [10, 11]), а другой — с «параметрическим», т. е. с ПЛ в параметрической (зависящей от параметра) задаче условной минимизации (см., например, [8, 12]). Охарактеризуем коротко по отдельности каждый из двух указанных выше подходов в теории ПЛ.

1.1. «Индивидуальный» ПЛ. В этом случае основным объектом исследования является обычная или, как можно еще сказать, индивидуальная (не зависящая от параметров) задача условной оптимизации (P) . Основное предположение индивидуального ПЛ [10, 11] связано с требованием замкнутости образа оператора, задающего равенство.

Применительно к задаче (P) в случае $\mathcal{D} = Z$ классический ПЛ для гладких задач с равенствами из книги [10, с. 253, 254], см. также [11, с. 12, следствие 1], при условии Z, H — гильбертовы пространства, формулируется следующим образом.

Предложение 1.1. Если точка z^0 есть решение задачи (P) и $R(A) = \overline{R(A)}$, то найдется невырожденный набор $(\mu_0, \lambda) \in \mathbb{R}_+^1 \times H$ такой, что $2\mu_0 z^0 + A^* \lambda = 0$, если же при этом $R(A) = H$, то в последнем равенстве можно считать $\mu_0 > 0$. Так как задача (P) выпуклая, то в этом случае равенство $2\mu_0 z^0 + A^* \lambda = 0$ эквивалентно неравенству

$$L(z^0, \mu_0, \lambda) \leq L^0(z, \mu_0, \lambda) \quad \forall z \in Z, \quad L(z, \mu_0, \lambda) \equiv \mu_0 \|z\|^2 + \langle \lambda, Az - h \rangle.$$

К сожалению, основное требование $R(A) = \overline{R(A)}$ этого предложения является достаточно жестким, причем, как отмечено в [10, п. 3.2.4, с. 260], невыполнение этого условия замкнутости может приводить к тому, что ПЛ вовсе не выполняется. Выполнение условия замкнутости невозможно, например, для вполне непрерывных операторов A [13, с. 225, теорема 1], «наиболее часто» встречающихся при рассмотрении различных содержательных некорректных задач [2–4]. В частности, к таким операторам, прежде всего, относятся различные интегральные операторы. Таким образом, применение индивидуального

ПЛ [10, 11] в задаче минимизации (P) встречается с трудностями принципиального характера уже при его формальном выписывании.

1.2. «Параметрический» ПЛ. «Параметрический» ПЛ основан на применении метода возмущений (см., например, [10, п. 3.3.2]). Он предполагает жесткую связь выполнимости всех участвующих в его формулировке соотношений с субдифференциальными свойствами функции значений задачи условной оптимизации. В нем не нужно знание, связанное с замкнутостью образа оператора, задающего равенство. Чтобы сформулировать указанный ПЛ, включим задачу (P) в семейство аналогичных задач, зависящих от параметра $p \in H$ в ограничении-равенстве

$$(P_p) \quad \|z\|^2 \rightarrow \inf, \quad Az = h + p, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z.$$

Задача (P) включена в это семейство при $p = 0$, т. е. $(P) = (P_0)$. Решения задачи (P_p) в случае их существования будем обозначать через z_p^0 .

Обозначим: $\mathcal{D}_p^\epsilon \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|Az - h - p\| \leq \epsilon\}$, $\epsilon \geq 0$. Определим классическую функцию значений задачи (P_p) формулой $\beta_0(p) = \inf_{z \in \mathcal{D}_p^0} \|z\|^2 \quad \forall p \in H$. Определим также обобщенную функцию значений $\beta : H \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ посредством соотношений $\beta(p) \equiv \beta_{+0}(p) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon(p)$, $\beta_\epsilon(p) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}_p^\epsilon} \|z\|^2$, $\beta_\epsilon(p) \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}_p^\epsilon = \emptyset$. Так как $\|\cdot\|^2$ — сильно выпуклый функционал, то справедливо следующее утверждение (см. леммы 1.1, 1.2, 1.3 в [12]).

Лемма 1.1. *Функции значений $\beta_0, \beta : H \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ совпадают, являясь полунепрерывными снизу и выпуклыми. При этом для любого $p \in H$ выполнено $\beta(p) = \{\|z_p^0\|^2, \text{ если } z_p^0 \text{ существует; } +\infty \text{ в ином случае}\}$.*

Справедливо также следующее важное, в контексте настоящей статьи, утверждение о плотности субдифференцируемости (см., например, [14, теорема 4.3]).

Лемма 1.2. *Субдифференциал собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции $f : H \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, где H — гильбертово пространство, не пуст в точках плотного в $\text{dom } f$ множества.*

Введем функцию Лагранжа

$$L_p(z, \mu_0, \lambda) \equiv \mu_0 \|z\|^2 + \langle \lambda, Az - h - p \rangle, \quad L_p(z, 1, \lambda) \equiv L_p(z, \lambda), \quad z \in \mathcal{D}, \quad \mu_0 \geq 0, \quad \lambda \in H.$$

Напомним, что вектором Куна–Таккера задачи (P_p) называется элемент $\lambda^* \in H$, для которого $\|z_p^0\|^2 \leq L_p(z, \lambda^*) \quad \forall z \in \mathcal{D}$. С учетом леммы 1.1 справедливо [8, теорема 2.1], [12, теорема 1.1] следующее утверждение (см. также замечания 1.1, 1.2 к теореме 1.1 в [12]).

Предложение 1.2. [Параметрический недифференциальный ПЛ] *Если $p \in H$ такая точка, что $\beta(p) < +\infty$, то:*

1. *Если $z_p^0 \in \mathcal{D}_p^0 \equiv \{z \in \mathcal{D} : Az - h - p = 0\}$ — оптимальный элемент в задаче (P_p) , т. е. $\|z_p^0\|^2 = \beta(p)$, и $\zeta \in \partial\beta(p)$, где $\partial\beta(p)$ — субдифференциал в смысле выпуклого анализа, то для множителя Лагранжа $\lambda \in H$, $\lambda = -\zeta$, при $\mu_0 = 1$ выполняется соотношение*

$$L_p(z_p^0, \mu_0, \lambda) \leq L_p(z, \mu_0, \lambda) \quad \forall z \in \mathcal{D} \quad (1.1)$$

и при этом $-\zeta = \lambda$ — вектор Куна–Таккера задачи (P_p) .

И, наоборот, если $\tilde{z} \in \mathcal{D}_p^0$ такой элемент, что при некоторых $\mu_0 > 0$, $\lambda \in H$ выполняется соотношение (1.1) с заменой z_p^0 на $\tilde{z}$, то этот элемент оптимален в задаче (P_p) , т. е. $\tilde{z} = z_p^0$, элемент λ/μ_0 является вектором Куна–Таккера для нее и одновременно $-\lambda/\mu_0 \in \partial\beta(p)$.

2. Если $z_p^0 \in \mathcal{D}_p^0$ — оптимальный элемент в задаче (P_p) , $p \in \partial \operatorname{dom} \beta$ и $\zeta \in \partial^\infty \beta(p)$, $\zeta \neq 0$, где $\partial^\infty \beta(p)$ — сингулярный (асимптотический) субдифференциал (см., например, [15]), определяемый формулой $\partial^\infty \beta(p) \equiv \{\lambda \in H : (\lambda, 0) \in N_{\operatorname{epi} \beta}(p, \beta(p))\}$, то для множителя Лагранжа $\lambda \in H$, $\lambda = -\zeta$, соотношение (1.1) выполняются при $\mu_0 = 0$.

И, наоборот, если $\tilde{z} \in \mathcal{D}_p^0$ — такой элемент, что при $\mu_0 = 0$ и некотором $\lambda \in H$, $\lambda \neq 0$, выполняется соотношение (1.1) с заменой z_p^0 на $\tilde{z}$, то $p \in \partial \operatorname{dom} \beta$ и одновременно $-\lambda \in \partial^\infty \beta(p)$.

З а м е ч а н и е 1.1. Одним из следствий предложения 1.2 является совпадение субдифференциала $\partial\beta(p)$ с множеством всех векторов Куна–Таккера задачи (P_p) или, что то же самое, с множеством всех решений двойственной к ней задачи, см. лемму 1.8 в [12].

В отличие от индивидуального ПЛ предложения 1.1 параметрический невырожденный (регулярный или нерегулярный) ПЛ предложения 1.2 может быть формально записан в задаче $(P) = (P_0)$ тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из двух соотношений $\partial\beta(0) \neq \emptyset$, $\partial^\infty \beta(0) \neq \{0\}$. Однако, к сожалению, проверка выполнимости нужных субдифференциальных свойств функции значений представляет собою трудную самостоятельную математическую задачу.

В данном контексте представляет интерес также сравнение двух ПЛ предложений 1.1, 1.2. Для упрощения ситуации рассматриваем задачу (P) при условии $\mathcal{D} = Z$. Можно заметить, что условие $R(A) = \overline{R(A)}$, $R(A) \neq H$ предложения 1.1 влечет наличие ненулевого элемента в сингулярном субдифференциале $\partial^\infty \beta(0)$, что в соответствии с первым утверждением второй части предложения 1.2 обеспечивает выполнимость нерегулярного ($\mu_0 = 0$) ПЛ (1.1) при $\mathcal{D} = Z$. В то же время условие $R(A) = \overline{R(A)} = H$, как можно заметить, обеспечивает непустоту субдифференциала $\partial\beta(0)$ и, как следствие первого утверждения первой части предложения 1.2, выполнимость регулярного ($\mu_0 > 0$) ПЛ (1.1) при $\mathcal{D} = Z$. Таким образом, условия $R(A) = \overline{R(A)}$, $R(A) \neq H$ и $R(A) = \overline{R(A)} = H$ предложения 1.1 (классического ПЛ для гладких задач с равенствами [10, с. 253, 254]) являются достаточными и для применимости соответствующих необходимых условий экстремума предложения 1.2. В то же время можно утверждать, что существует такой обширный класс задач, например вида (P) , для которого может быть записан невырожденный классический параметрический ПЛ предложения 1.2 (т. е. в (1.1) набор $(\mu_0, \lambda) \neq 0$), но, одновременно, не может быть применен ПЛ предложения 1.1 (для гладких задач с равенствами [10, с. 253, 254]). В случае $\mathcal{D} = Z$ к таким задачам относятся, например, задачи, в которых $R(A) \neq \overline{R(A)}$, но, одновременно, либо $\partial^\infty \beta(0) \neq \{0\}$, либо $\partial\beta(0) \neq \emptyset$, либо и то и другое выполняется совместно. Прежде всего, к таким задачам можно отнести задачи с интегральными операторами A , для которых в большом числе важнейших с точки зрения различных естественнонаучных приложений случаев неравенство $R(A) \neq \overline{R(A)}$ выполняется.

Итак, подводя итог сказанному выше в данном разделе, уже при выписывании формального ПЛ как в «индивидуальном», так и в «параметрическом» вариантах в задаче

поиска нормального решения операторного уравнения первого рода (IP), мы встречаемся с трудностями принципиального характера.

1.3. ПЛ как утверждение о существовании оптимального элемента. Представляется важным заметить далее, что второе утверждение первой части ПЛ предложения 1.2 можно переписать в форме теоремы существования оптимального элемента с одновременным представлением последнего.

Предложение 1.3. [*Теорема Куна–Таккера в форме теоремы существования оптимального элемента*] Если $\tilde{z} \in \mathcal{D}$ — такой элемент, что при некотором $\lambda \in H$ выполняются соотношения

$$\tilde{z} \in \mathcal{D}_p^0, \quad L_p(\tilde{z}, \lambda) \leq L_p(z, \lambda) \quad \forall z \in \mathcal{D}, \quad L_p(z, \lambda) \equiv \|z\|^2 + \langle \lambda, Az - h - p \rangle, \quad (1.2)$$

то этот элемент оптимален в задаче (P_p) , т. е. $\tilde{z} = z_p^0$, элемент λ является вектором Куна–Таккера для нее и одновременно $-\lambda \in \partial\beta(p)$.

Последнее предложение сформулировано как достаточное условие существования оптимального элемента. Оно не требует существования вектора Куна–Таккера в задаче или, другими словами, не требует непустоты субдифференциала $\partial\beta(p)$. В то же время, как хорошо известно, нельзя утверждать, что если $\tilde{z} \in \mathcal{D}$ — оптимальный элемент в задаче (P_p) , то он с необходимостью удовлетворяет при некотором λ неравенству в (1.2). Таким образом, в этом случае выполнимость двух условий (1.2) при некотором $\lambda \in H$ является лишь достаточным для существования оптимального элемента, но, вообще говоря, не необходимым. Чтобы они, в совокупности, стали и необходимым условием, надо потребовать существования вектора Куна–Таккера в задаче (P_p) . Важность предложения 1.3 состоит в том, что оно помогает понять, что регуляризованный ПЛ естественно и целесообразно формулировать как утверждение о существовании ОМП.

1.4. Некорректность ПЛ. Наряду с трудностями формальной записи ПЛ в обоих его отмеченных выше вариантах нас ждет здесь еще одна «неприятность», связанная со свойствами некорректности задач условной оптимизации, следствием которой является и некорректность соответствующего ПЛ. Здесь о некорректности ПЛ мы говорим, когда имеем в виду его возможные неустойчивость и невыполнимость. Мы говорим о неустойчивости ПЛ, если выделяемые им в задачах, «близких» к исходной (невозмущенной) задаче элементы, формально ему удовлетворяющие в этих возмущенных задачах, фактически не являются реальными приближениями к точному решению исходной задачи. Другими словами, при сколь угодно малых возмущениях оптимизационных задач эти удовлетворяющие «возмущенным» ПЛ элементы могут сколь угодно сильно отличаться как по аргументу, так и по функции от оптимальных элементов невозмущенных задач (см., например, [8, 9]). В свою очередь, невыполнимость ПЛ в той или иной конкретной задаче условной оптимизации мы понимаем как принципиальную невозможность записать их для этой задачи в той привычной (классической) форме, в которой принято записывать условия оптимальности в других задачах данного класса. Простейший пример невыполнимости ПЛ в задаче выпуклого, а точнее говоря, линейного программирования с ограничением-равенством в бесконечномерном пространстве, можно найти в [10, с. 260], другие содержательные примеры см. в [8, 9]. Отметим, что в некотором смысле родственной случаю невыполнимости ПЛ является ситуация, когда мы просто не можем сказать выполняется ПЛ или нет. В частности, это может быть тогда, когда мы затрудняемся с проверкой условий предложений 1.1, 1.2.

2. Регуляризация ПЛ, понятие регуляризирующего алгоритма в задаче условной минимизации, экстремали функционала Лагранжа

Оказывается, что внутренний потенциал классического правила множителей Лагранжа таков, что при соответствующей конструктивной коррекции-регуляризации оно эффективно трансформируется в универсальное средство практического решения некорректных задач. Центральную роль ниже при рассмотрении задач (P) , (P_p) будет играть понятие обобщенной минимизирующей последовательности (ОМП). Напомним его.

О п р е д е л е н и е 2.1. ОМП в задаче (P_p) называется последовательность элементов $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что выполняются соотношения $\|z^k\|^2 \rightarrow \beta(p)$, $z^k \in \mathcal{D}_p^{\epsilon^k}$, $k \rightarrow \infty$, для некоторой сходящейся к нулю последовательности ϵ^k , $k = 1, 2, \dots$, неотрицательных чисел.

В силу дифференцируемости по Фреше функционала $\|\cdot\|^2$ справедлива следующая лемма, доказательство которой проходит по стандартной схеме, основанной на слабой компактности ограниченного замкнутого выпуклого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве.

Лемма 2.1. Пусть $\beta(p) < +\infty$. Тогда для любой ОМП z^k , $k = 1, 2, \dots$, в разрешимой единственным образом в этом случае задаче (P_p) справедливо предельное соотношение $z^k \rightarrow z_p^0$, $k \rightarrow \infty$.

Далее в данном разделе мы получим так называемые регуляризованные ПЛ, которые: а) сохраняют структурное устройство классического аналога; б) формулируются в терминах ОМП, т. е. носят секвенциальный характер; в) представляют собою регуляризирующие алгоритмы. Здесь понятие регуляризирующего алгоритма в задаче условной оптимизации определяется следующим образом [16]. Для формулировки и доказательства регуляризованных ПЛ опять воспользуемся методом возмущений и перейдем к параметрической задаче минимизации. Рассматриваем наряду с задачей (P_p) и задачу

$$(P_p^\delta) \quad \|z\|^2 \rightarrow \inf, \quad A^\delta z = h^\delta + p, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

где $A^\delta : Z \rightarrow H$ — линейный ограниченный оператор, норма $\|A^\delta\|$ которого ограничена сверху некоторым не зависящим от $\delta \in [0, \delta_0]$ числом, $h^\delta \in H$ — заданный элемент, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число, $\mathcal{D}$ — выпуклое замкнутое множество, Z, H — гильбертовы пространства. Полагаем, как и выше, $(P_p^0) = (P_p)$, $A^0 = A$, $h^0 = h$. Верхний индекс δ в исходных данных задачи (P_p^δ) означает, что эти данные являются точными ($\delta = 0$) или возмущенными ($\delta > 0$), т. е. задаются с определяемой оценками

$$\|(A^\delta - A^0)z\| \leq C\delta(1 + \|z\|) \quad \forall z \in Z, \quad \|h^\delta - h^0\| \leq C\delta, \quad (2.1)$$

где $C > 0$ не зависит от δ , ошибкой, величину которой и характеризует число $\delta \in [0, \delta_0]$. Соответственно, задачу (P_p^0) называем точной, задачу (P_p^δ) при $\delta > 0$ — возмущенной. Как и ранее, обозначим единственное решение задачи (P_p^0) , в случае его существования, через z_p^0 .

О п р е д е л е н и е 2.2. Зависящий от параметра $\delta \in (0, \delta_0)$ оператор $R(\cdot, \cdot, \delta)$, ставящий в соответствие каждой паре исходных данных A^δ, h^δ , удовлетворяющих оценкам (2.1), элемент $R(A^\delta, h^\delta, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$ такой, что $\|z^\delta\|^2 \rightarrow \beta(p)$, $\|A^0 z^\delta - h^0 - p\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, называется регуляризирующим в задаче $(P_p^0) = (P_p)$.

З а м е ч а н и е 2.1. Определения регуляризирующих алгоритмов для задач математического программирования с конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства можно найти, например, в [7, гл. 9]. Эти определения даны в случае задач первого типа (т. е. задач, в которых ищется только нижняя грань, см. [7, гл. 9, с. 802]) и второго типа (т. е. задач, в которых ищется и нижняя грань и оптимальный элемент, см. [7, гл. 9, с. 837]). С формальной точки зрения данное выше определение 2.2 занимает промежуточное положение между двумя указанными выше определениями [7, гл. 9]. В отличие от определения [7, гл. 9, с. 802] в определении 2.2 речь идет не только о приближении к нижней грани задачи, но и, параллельно, о выполнении «в пределе» ее ограничений с одновременным представлением «сходящихся» при $\delta \rightarrow 0$ как по функции, так и по «ограничениям» элементов $R(A^\delta, h^\delta, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$. В то же время, в отличие от определения [7, гл. 9, с. 837], в определении 2.2 не идет речь о какой либо сходимости (сильной, слабой) при $\delta \rightarrow 0$ самих элементов семейства $R(A^\delta, h^\delta, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$ к какому-либо конкретному элементу, например, к точному решению задачи (P_p^0) в случае существования последнего. Такая сходимость (сильная, слабая) является уже следствием как того факта, что элементы $R(A^\delta, h^\delta, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$ при $\delta \rightarrow 0$ сходятся одновременно и по функции и по «ограничениям», так и дополнительных свойств исходных данных задачи.

Так как основной нашей целью является построение ОМП в задаче (P_p^0), а семейство $\{z^\delta \in \mathcal{D} : \delta \in (0, \delta_0]\}$ из определения 2.2 не является последовательностью, то помимо введенного выше определения регуляризирующего оператора в задаче (P_p^0) введем его «след» — определение ОМП-образующего оператора в задаче (P_p^0).

О п р е д е л е н и е 2.3. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k , $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(A^{\delta^k}, h^{\delta^k})$, удовлетворяющих оценкам (2.1) при $\delta = \delta^k$, элемент $z^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется ОМП-образующим в задаче (P_p^0), если последовательность z^{δ^k} , $k = 1, 2, \dots$, есть ОМП в этой задаче.

Автор придерживается точки зрения, в соответствии с которой задачи условной оптимизации занимают свое особое место в общей теории некорректных задач, и по этой причине для них естественно введение соответствующего специфического понятия регуляризирующего алгоритма.

Здесь представляется уместным сравнить на примере двух простейших и эквивалентных задач (IP) и (P) = (P^0) = (P_0^0) два определения 0.1 и 2.2 регуляризирующего алгоритма. Прежде всего заметим, что в соответствии с определением 0.1 строится семейство элементов $z^\delta \in \mathcal{D}$, $\delta \in (0, \delta_0)$, такое, что $\|z^\delta - z^0\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. В то же время, в соответствии с определением 2.2 мы имеем дело с семейством $\bar{z}^\delta \in \mathcal{D}$, $\delta \in (0, \delta_0)$, таким, что $\|\bar{z}^\delta\|^2 \rightarrow \beta = \|z^0\|^2$, $\|A^0 \bar{z}^\delta - h^0\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. Но, как легко заметить в силу леммы 2.1, для семейства $\bar{z}^\delta \in \mathcal{D}$, $\delta \in (0, \delta_0)$ выполняется и предельное соотношение $\|\bar{z}^\delta - z^0\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. Это означает, что любое такое семейство элементов, удовлетворяющее всем соотношениям определения 0.1, удовлетворяет и всем соотношениям определения 2.2. С другой стороны, рассуждая в обратную сторону, очевидно, что любое семейство элементов, удовлетворяющее всем соотношениям определения 2.2, удовлетворяет и всем соотношениям определения 0.1. Таким образом, применительно к двум простейшим эквивалентным задачам (IP) и (P) эти определения можно считать эквивалентными.

В то же время, сравнивая два определения 0.1 и 2.2, необходимо сказать следующее. Когда доказывается сходимость алгоритма регуляризации по Тихонову [3, гл. 1, теорема 1], [4, теорема 3.1], то прежде всего конструируется семейство элементов $z^\delta \in \mathcal{D}$, $\delta \in (0, \delta_0)$, такое, что $\|z^\delta\|^2 \leq \|z^0\|^2 + \psi(\delta)$, $\|A^0 z^\delta - h^0\| \leq \phi(\delta)$, $\psi(\delta) \rightarrow 0$, $\phi(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, а затем из этих двух соотношений на основе классических теорем о слабой компактности замкнутого шара и полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве выводится слабая сходимость элементов z^δ к z^0 при $\delta \rightarrow 0$ и сходимость норм $\|z^\delta\| \rightarrow \|z^0\|$, $\delta \rightarrow 0$, что, благодаря H -свойству гильбертова пространства, приводит к сильной сходимости $z^\delta \rightarrow z^0$, $\delta \rightarrow 0$. Другими словами, указанное доказательство, прежде всего, обеспечивает построение ОМП в задаче условной минимизации (P) , эквивалентной исходной некорректной задаче (IP) . Та же идея построения ОМП лежит и в основе определения регуляризирующего алгоритма 2.2. Как оказывается, регуляризация ПЛ обеспечивает такое построение при минимальных требованиях к исходным данным задач условной минимизации. Последнее объясняется тем, что такая важная трансформация привычного ПЛ оказалась возможной благодаря применению в задаче условной оптимизации основанных на двойственности подходов к регуляризации. Опора на теорию двойственности в совокупности с идеей регуляризации двойственной задачи позволяет при построении ОМП обходиться минимумом условий на задачу.

Введем необходимые обозначения: $\mathcal{D}_p^{\delta, \epsilon} \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|A^\delta z - h^\delta - p\| \leq \epsilon\}$, $\epsilon \geq 0$,

$$L_p^\delta(z, \lambda) \equiv \|z\|^2 + \langle \lambda, A^\delta z - h^\delta - p \rangle, \quad V_p^\delta(\lambda) \equiv \min_{z \in \mathcal{D}} L_p^\delta(z, \lambda)$$

и определим экстремаль (минималь)

$$z^\delta[\lambda] \equiv \operatorname{argmin}\{L_p^\delta(z, \lambda), z \in \mathcal{D}\}$$

функционала Лагранжа $L_p^\delta(z, \lambda)$, $z \in \mathcal{D}$, а также двойственную к (P_p^0) задачу

$$V_p^0(\lambda) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in H, \quad V_p^0(\lambda) \equiv \min_{z \in \mathcal{D}} L_p^0(z, \lambda).$$

Ниже при доказательстве регуляризованных ПЛ нам понадобятся следующие две связанные с двойственной задачей оценки.

Лемма 2.2. *Справедлива оценка $\|z^\delta[\lambda] - z^0[\lambda]\| \leq C\sqrt{\delta}(1 + \|\lambda\|)$, где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от δ и $\lambda \in H$.*

Доказательство. Так как функционал $\|z\|^2 + \langle \lambda, A^\delta z \rangle$, $z \in \mathcal{D}$ сильно выпуклый при $\lambda \in H$ и его постоянная сильной выпуклости равна 1, то можно утверждать, что благодаря известной оценке для сильно выпуклых функционалов (см., например, [7, теорема 8.2.10]) выполнено

$$\|z^\delta[\lambda^2] - z^\delta[\lambda^1]\|^2 \leq \|z^\delta[\lambda^2]\|^2 + \langle \lambda^1, A^\delta z^\delta[\lambda^2] \rangle - (\|z^\delta[\lambda^1]\|^2 + \langle \lambda^1, A^\delta z^\delta[\lambda^1] \rangle),$$

$$\|z^\delta[\lambda^1] - z^\delta[\lambda^2]\|^2 \leq \|z^\delta[\lambda^1]\|^2 + \langle \lambda^2, A^\delta z^\delta[\lambda^1] \rangle - (\|z^\delta[\lambda^2]\|^2 + \langle \lambda^2, A^\delta z^\delta[\lambda^2] \rangle).$$

Складывая эти два неравенства, получаем в силу условий на исходные данные для некоторой постоянной $K > 0$, которая не зависит от $\lambda \in H$ и $\delta \in [0, \delta_0]$

$$2\|z^\delta[\lambda^2] - z^\delta[\lambda^1]\|^2 \leq \langle \lambda^1 - \lambda^2, A^\delta z^\delta[\lambda^2] - A^\delta z^\delta[\lambda^1] \rangle \leq K\|\lambda^1 - \lambda^2\|\|z^\delta[\lambda^2] - z^\delta[\lambda^1]\|$$

или

$$\|z^\delta[\lambda^1] - z^\delta[\lambda^2]\| \leq (K/2)\|\lambda^1 - \lambda^2\|.$$

Следствием последней оценки является оценка

$$\|z^\delta[\lambda]\| \leq \|z^\delta[\lambda] - z^\delta[0]\| + \|z^\delta[0]\| \leq \frac{K}{2}\|\lambda\| + \|z^\delta[0]\| \leq \tilde{K}(1 + \|\lambda\|), \quad (2.2)$$

где $z^\delta[0] \equiv \operatorname{argmin}\{\|z\|^2, z \in \mathcal{D}\}$ и $\tilde{K} > 0$ не зависит от $\lambda \in H$.

Далее, благодаря опять же сильной выпуклости с постоянной 1 функционала $\|\cdot\|^2$ и, как следствие, функционала L^δ , можем записать две оценки (см. [7, теорема 8.2.10])

$$\begin{aligned} \|z^\delta[\lambda] - z^0[\lambda]\|^2 &\leq \|z^0[\lambda]\|^2 + \langle \lambda, A^\delta z^0[\lambda] - h^\delta \rangle - (\|z^\delta[\lambda]\|^2 + \langle \lambda, A^\delta z^\delta[\lambda] - h^\delta \rangle), \\ \|z^\delta[\lambda] - z^0[\lambda]\|^2 &\leq \|z^\delta[\lambda]\|^2 + \langle \lambda, A^0 z^\delta[\lambda] - h^0 \rangle - (\|z^0[\lambda]\|^2 + \langle \lambda, A^0 z^0[\lambda] - h^0 \rangle). \end{aligned}$$

Складывая эти два неравенства и пользуясь оценками (2.1), получаем неравенство

$$\begin{aligned} 2\|z^\delta[\lambda] - z^0[\lambda]\|^2 &\leq \langle \lambda, A^\delta z^0[\lambda] - A^0 z^0[\lambda] \rangle + \langle \lambda, A^0 z^\delta[\lambda] - A^\delta z^\delta[\lambda] \rangle \leq \\ &C\delta\|\lambda\|(1 + \|z^0[\lambda]\|) + C\delta\|\lambda\|(1 + \|z^\delta[\lambda]\|). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из оценок (2.3) и (2.2) получаем неравенство $2\|z^\delta[\lambda] - z^0[\lambda]\|^2 \leq C_1\delta(1 + \|\lambda\|)^2$, где $C_1 > 0$ — некоторая не зависящая от δ постоянная, следствием которого и является оценка из утверждения леммы. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $\|z^\delta[\lambda]\| \leq M$ и $\|z^0[\lambda]\| \leq M$ и M не зависит от δ . Тогда $|V_p^\delta(\lambda) - V_p^0(\lambda)| \leq C\delta\|\lambda\|$, где постоянная $C > 0$ зависит от M , но не зависит от p и δ , а также от $\lambda \in H$ таких, что $\|z^\delta[\lambda]\| \leq M$ и $\|z^0[\lambda]\| \leq M$.

Доказательство. Предположим без ограничения общности рассуждений, что $V_p^\delta(\lambda) \geq V_p^0(\lambda)$. Тогда можем записать следующую цепочку равенств и неравенств с $S_M \equiv \{z \in Z : \|z\| \leq M\}$

$$\begin{aligned} |V_p^\delta(\lambda) - V_p^0(\lambda)| &= V_p^\delta(\lambda) - V_p^0(\lambda) = V_p^\delta(\lambda) - \inf_{z \in \mathcal{D} \cap S_M} (L_p^0(z, \lambda) - L_p^\delta(z, \lambda) + L_p^\delta(z, \lambda)) \leq \\ &V_p^\delta(\lambda) - V_p^\delta(\lambda) - \inf_{z \in \mathcal{D} \cap S_M} (L_p^0(z, \lambda) - L_p^\delta(z, \lambda)) = - \inf_{z \in \mathcal{D} \cap S_M} (L_p^0(z, \lambda) - L_p^\delta(z, \lambda)) \leq \\ &\sup_{z \in \mathcal{D} \cap S_M} |L_p^\delta(z, \lambda) - L_p^0(z, \lambda)|, \end{aligned}$$

очевидным следствием которой, с учетом оценок (2.1), и является доказываемая оценка. $\square$

2.1. Двойственная регуляризация и итеративная двойственная регуляризация, экстремали функционала Лагранжа. Опишем методы двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации [17, 18] устойчивого построения в задаче (P_p^0) ОМП из экстремалей функционала Лагранжа и сформулируем соответствующие теоремы сходимости для них, доказательство которых можно найти в указанных работах [17, 18], а также в [8].

Метод двойственной регуляризации. Обозначим через $\lambda_p^{\delta, \alpha}$ единственную в H точку, дающую максимум функционалу Тихонова $R_p^{\delta, \alpha}(\lambda) \equiv V_p^\delta(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2$, $\lambda \in H$, т. е. его экстремаль. Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть задача (P_p^0) разрешима. Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P_p^0) задача, при условии согласования (2.4) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(\delta) \|\lambda_p^{\delta, \alpha(\delta)}\|^2 \rightarrow 0, \quad \|z^\delta[\lambda_p^{\delta, \alpha(\delta)}]\|^2 \rightarrow \|z_p^0\|^2, \quad A^0 z^\delta[\lambda_p^{\delta, \alpha(\delta)}] - h^0 - p \rightarrow 0, \\ \langle \lambda_p^{\delta, \alpha(\delta)}, A^\delta z^\delta[\lambda_p^{\delta, \alpha(\delta)}] - h^\delta - p \rangle \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

и, как следствие (благодаря дифференцируемости по Фреше функционала $\|\cdot\|^2$), предельное соотношение (см. лемму 2.1)

$$\|z^\delta[\lambda_p^{\delta, \alpha(\delta)}] - z_p^0\| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная задача, алгоритм двойственной регуляризации является регуляризующим в смысле определения 2.2 и, более того, справедливо предельное соотношение (2.5). Одновременно справедливо и предельное соотношение $V_p^0(\lambda_p^{\delta, \alpha(\delta)}) \rightarrow \sup_{\lambda \in H} V_p^0(\lambda) = \|z_p^0\|^2$, $\delta \rightarrow 0$. Если же двойственная к (P_p^0) задача разрешима, то имеет место сходимость $\lambda_p^{\delta, \alpha(\delta)} \rightarrow \lambda_p^0$ при $\delta \rightarrow 0$, где $\lambda_p^0 \in H$ есть ее нормальное решение.

З а м е ч а н и е 2.2. Можно показать, что в качестве регуляризованной возмущенной двойственной задачи в методе двойственной регуляризации может быть взята задача $V_p^\delta(\lambda) - \alpha(\delta) \|\lambda - \tilde{\lambda}\|^2 \rightarrow \sup$, $\lambda \in H$, где $\tilde{\lambda} \in H$ — произвольный фиксированный элемент. Тогда, в соответствии с классической теорией тихоновской стабилизации (см., например, [7, гл. 9, § 4]), в этом случае в качестве предельной точки λ_p^0 предельного соотношения $\lambda_p^{\delta, \alpha(\delta)} \rightarrow \lambda_p^0$ при $\delta \rightarrow 0$ выступает элемент, доставляющий минимальное значение функционалу $\|\lambda - \tilde{\lambda}\|^2$, $\lambda \in H$ среди всех решений двойственной к (P_p^0) задачи. При этом все полученные выше результаты, связанные с процедурой двойственной регуляризации, сохраняют силу.

Метод итеративной двойственной регуляризации. Введем в рассмотрение итерационный процесс

$$\bar{\lambda}_p^{k+1} = \bar{\lambda}_p^k + \beta^k (A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k] - h^{\delta^k} - p) - 2\beta^k \alpha^k \bar{\lambda}_p^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \bar{\lambda}_p^1 \in H \quad (2.6)$$

с условиями согласования: $\alpha^k > 0$, $\beta^k > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\delta^k + \alpha^k + \beta^k) = 0$,

$$\frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \leq C_0, \quad \frac{|\alpha^{k+1} - \alpha^k|}{(\alpha^k)^3 \beta^k} \rightarrow 0, \quad \frac{\beta^k}{(\alpha^k)^3} \rightarrow 0, \quad \frac{\delta^k}{(\alpha^k)^6} \rightarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \beta^k = +\infty. \quad (2.7)$$

З а м е ч а н и е 2.3. Последовательности α^k и β^k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие соотношениям (2.7), существуют. Например, в этом качестве можно использовать последовательности $\alpha^k = k^{-1/6}$, $\beta^k = k^{-1/(5/3)}$, $k = 1, 2, \dots$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть задача (P_p^0) разрешима и выполняются условия согласования (2.7). Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P_p^0) задача, для генерируемой итерационным процессом (2.6) последовательности $\bar{\lambda}^k$, $k = 1, 2, \dots$ выполняются предельные соотношения

$$\alpha^k \|\bar{\lambda}_p^k\| \rightarrow 0, \quad \|z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k]\|^2 \rightarrow \|z_p^0\|^2, \quad A^0 z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k] - h^0 - p \rightarrow 0, \\ \langle \bar{\lambda}_p^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k] - h^{\delta^k} - p \rangle \rightarrow 0, \quad \delta^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Как следствие, справедливо и предельное соотношение

$$\|z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k] - z_p^0\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная задача, алгоритм итеративной двойственной регуляризации является ОМП-образующим и, более того, справедливо предельное соотношение (2.8). Одновременно с указанными предельными соотношениями выполняется и предельное соотношение $\lim_{\delta^k \rightarrow +0} V_p^0(\bar{\lambda}_p^k) = \sup_{\lambda \in H} V_p^0(\lambda) = \|z_p^0\|^2$. Если двойственная к (P_p^0) задача разрешима, то имеет место сходимость $\bar{\lambda}_p^k \rightarrow \lambda_p^0$, $k \rightarrow \infty$, где $\lambda_p^0 \in H$ есть ее решение с минимальной нормой.

Эта теорема снабжается регуляризирующим правилом останова итерационного процесса (2.6) в случае, когда исходные данные оптимизационной задачи задаются с определенной фиксированной (конечной) погрешностью $\delta > 0$. Пусть числовые последовательности δ^k , α^k , β^k , $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям (2.7). Зафиксируем следующее правило останова итерационного процесса (2.6)

$$\bar{\lambda}_p^{k+1} = \bar{\lambda}_p^k + \beta^k (A^\delta z^\delta[\bar{\lambda}_p^k] - h^\delta - p) - 2\beta^k \alpha^k \bar{\lambda}_p^k, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \bar{\lambda}_p^1 \in H, \quad (2.9)$$

при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$: при каждом $\delta > 0$, $\delta \leq \delta^1$, итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенства

$$\delta^k \geq \delta, \quad k = 1, 2, \dots, k(\delta). \quad (2.10)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P_p^0) задача, справедливы предельные соотношения

$$\|z^\delta[\bar{\lambda}_p^{k(\delta)}]\|^2 \rightarrow \|z_p^0\|^2, \quad A^0 z^\delta[\bar{\lambda}_p^{k(\delta)}] - h^0 - p \rightarrow 0$$

и, как следствие, предельное соотношение $\|z^\delta[\bar{\lambda}_p^{k(\delta)}] - z_p^0\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, где $\bar{\lambda}_p^{k(\delta)}$ — результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (2.9) с правилом останова (2.10). Другими словами, указанное правило останова порождает регуляризирующий алгоритм в смысле определения 2.2 в задаче (P_p^0) .

З а м е ч а н и е 2.4. В итерационных процедурах (2.6), (2.9) регуляризирующий добавок $-2\beta^k \alpha^k \bar{\lambda}^k$ можно заменить на $-2\beta^k \alpha^k (\bar{\lambda}^k - \tilde{\lambda})$, где $\tilde{\lambda} \in H$ — произвольный фиксированный элемент. При этом все утверждения, связанные с методом итеративной двойственной регуляризации, останутся в силе. В то же время, как и в случае метода двойственной регуляризации, в этой ситуации, если двойственная к (P_p^0) задача разрешима,

то в качестве предела последовательности $\bar{\lambda}_p^k$, $k = 1, 2, \dots$ в предельном соотношении $\bar{\lambda}_p^k \rightarrow \lambda_p^0$, $k \rightarrow \infty$ также выступает точка $\lambda_p^0 \in H$, доставляющая минимальное значение функционалу $\|\lambda - \tilde{\lambda}\|^2$, $\lambda \in H$ среди всех решений двойственной к (P_p^0) задачи.

2.2. Регуляризованные ПЛ в «простейшей» задаче выпуклого программирования. Сформулируем и докажем в данном разделе регуляризованные ПЛ для задачи (P_p^0) . Приводимые ниже доказательства основаны на сформулированных в предыдущем разделе теоремах сходимости 2.1, 2.2, 2.3 методов двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации с правилом останова итерационного процесса [17, 18].

Формулируемые ниже регуляризованные ПЛ, которые можно также именовать регуляризованными теоремами Куна–Таккера (используемая функция Лагранжа регулярна) для задачи (P_p^0) , имеют вид утверждений о необходимых и достаточных условиях существования ограниченной ОМП в задаче и о возможности аппроксимации решения z_p^0 точками минимума ее регулярной функции Лагранжа. Учитывая лемму 2.1, их можно трактовать одновременно как необходимые и достаточные условия обычной оптимальности в задаче (P_p^0) , выраженные, однако, в секвенциальной форме. Одновременно в формулируемых ниже теоремах конструктивно предъявляются конкретные ОМП, аппроксимирующие решение z_p^0 и состоящие из указанных точек минимума регулярной функции Лагранжа.

Теорема 2.4. [Регуляризованный ПЛ] Пусть задана произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел δ^k , $k = 1, 2, \dots$. Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P_p^0) задача, для существования ограниченной ОМП в задаче (P_p^0) необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что выполняются соотношения

$$\delta^k \|\lambda^k\|^2 \rightarrow 0, \quad z^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}_p^{\delta^k, \epsilon^k}, \quad \epsilon^k \rightarrow 0, \quad \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k] - h^{\delta^k} - p \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (2.11)$$

а последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$ была ограничена. Эта последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомой ОМП в задаче (P_p^0) .

Другими словами, зависящий от δ^k , $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(A^{\delta^k}, h^{\delta^k})$, удовлетворяющих оценкам (2.1) при $\delta = \delta^k$, элемент $R(A^{\delta^k}, h^{\delta^k}, \delta^k) = z^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}$, является ОМП-образующим; причем в силу дифференцируемости по Фреше целевого функционала $\|\cdot\|^2$ имеет место и сильная сходимость $z^{\delta^k}[\lambda^k] \rightarrow z_p^0$, $k \rightarrow \infty$.

Кроме того, выполняется предельное соотношение

$$V_p^0(\lambda^k) \rightarrow \sup_{\lambda \in H} V_p^0(\lambda) = \|z_p^0\|^2. \quad (2.12)$$

В случае существования ограниченной ОМП и разрешимости двойственной к (P_p^0) задачи, т. е. в случае $\partial\beta(p) \neq \emptyset$ можно без ограничения общности считать, что $\lambda^k \rightarrow \lambda_p^0$, $k \rightarrow \infty$, где $\lambda_p^0 \in H$ есть любое наперед выбранное фиксированное решение указанной двойственной задачи (в частности, нормальное, т. е. минимальное по норме).

В качестве последовательности $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \dots$, может быть взята последовательность $\lambda_p^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}$, $k = 1, 2, \dots$, $\delta^k/\alpha(\delta^k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, генерируемая алгоритмом двойственной регуляризации теоремы 2.1 с учетом замечания 2.2, в соответствии с которым: $\lambda_p^{\delta, \alpha(\delta)} \equiv \operatorname{argmax}\{V_p^\delta(\lambda) - \alpha(\delta)\|\lambda - \tilde{\lambda}\|^2, \lambda \in H\}$, $\delta/\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, $\tilde{\lambda} \in H$ — произвольный фиксированный элемент. В случае разрешимости двойственной

к (P_p^0) задачи $\lambda_p^{\delta, \alpha(\delta)} \rightarrow \lambda_p^0$, $\delta \rightarrow 0$, где в качестве $\lambda_p^0 \in H$ может быть взято ее любое наперед выбранное и фиксированное решение (такая сходимость достигается за счет произвола в выборе $\tilde{\lambda} \in H$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимости, прежде всего, заметим, что задача (P_p^0) разрешима благодаря существованию ограниченной ОМП. Теперь выполнимость соотношений (2.11), (2.12) теоремы вытекает из теоремы 2.1, если в качестве точек λ^k и $z^{\delta^k}[\lambda^k]$ взять соответственно точки $\lambda_p^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}$ и $z^{\delta^k}[\lambda_p^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}]$, $k = 1, 2, \dots$.

Для доказательства достаточности заметим, прежде всего, что задача (P_p^0) разрешима ввиду включения $z^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}_p^{\delta^k, \epsilon^k}$, ограниченности последовательности $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$, и условий на исходные данные задачи (P_p^0) . Далее, так как точка $z^{\delta^k}[\lambda^k]$ минимизирует функционал $L_p^{\delta^k}(\cdot, \lambda^k)$, можем записать

$$\|z^{\delta^k}[\lambda^k]\|^2 + \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k] - h^{\delta^k} - p \rangle \leq \|z\|^2 + \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z - h^{\delta^k} - p \rangle \quad \forall z \in \mathcal{D}.$$

В силу условий теоремы отсюда следует, что

$$\|z^{\delta^k}[\lambda^k]\|^2 \leq \|z\|^2 + \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z - h^{\delta^k} - p \rangle + \psi^k \quad \forall z \in \mathcal{D}, \quad \psi^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Положим здесь $z = z^0$ и используем условие согласования $\delta^k \|\lambda^k\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Тогда получаем $\|z^{\delta^k}[\lambda^k]\|^2 \leq \|z_p^0\|^2 + \tilde{\psi}^k$, $\tilde{\psi}^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Так как одновременно мы имеем включение $z^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}_p^{\delta^k, \epsilon^k}$, а, следовательно, и $z^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}_p^{0, \bar{\epsilon}^k}$, $\bar{\epsilon}^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, то можем утверждать, что последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является ОМП в задаче (P_p^0) и, более того, $z^{\delta^k}[\lambda^k] \rightarrow z_p^0$, $k \rightarrow \infty$. Далее, так как последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$ ограничена, то в силу оценки леммы 2.2 и предельного соотношения $\delta^k \|\lambda^k\|^2 \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ последовательность $z^0[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$ также ограничена. Одновременно в силу равномерной по $k = 1, 2, \dots$ ограниченности элементов $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $z^0[\lambda^k]$ и оценки леммы 2.3 получаем предельное соотношение $V_p^{\delta^k}(\lambda^k) - V_p^0(\lambda^k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Так как при этом в силу доказанной сходимости $z^{\delta^k}[\lambda^k] \rightarrow z_p^0$, $k \rightarrow \infty$ и третьего из условий (2.11) имеет место сходимость $V_p^{\delta^k}(\lambda^k) \rightarrow \|z_p^0\|^2$, $k \rightarrow \infty$, то получаем окончательно $V_p^0(\lambda^k) \rightarrow \sup_{\lambda \in H} V_p^0(\lambda) = \|z_p^0\|^2$. $\square$

В отличие от теоремы 2.4, в формулируемой ниже теореме одновременное конструктивное предъявление конкретной ОМП, аппроксимирующей решение z_p^0 и состоящей из точек минимума регулярной функции Лагранжа, основано на итерационной процедуре регуляризованного градиентного подъема в процессе максимизации целевого функционала V_p^0 двойственной задачи.

Теорема 2.5. [*Регуляризованный итерационный ПЛ*] Для того чтобы в задаче (P_p^0) существовала ограниченная ОМП (и, следовательно, сильно сходилась к z_p^0), необходимо и достаточно, чтобы для последовательности $\bar{\lambda}^k \in H$, $k = 1, 2, \dots$, порождаемой итерационным процессом

$$\bar{\lambda}_p^{k+1} = \bar{\lambda}_p^k + \beta^k (A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k] - h^{\delta^k} - p) - 2\beta^k \alpha^k (\bar{\lambda}_p^k - \tilde{\lambda}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \bar{\lambda}_p^1 \in H, \quad (2.13)$$

где $\tilde{\lambda} \in H$ — произвольный фиксированный элемент, с условиями согласования (2.7) выполнялись соотношения

$$z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k] \in \mathcal{D}_p^{\delta^k, \epsilon^k}, \quad \epsilon^k \rightarrow 0, \quad \langle \bar{\lambda}^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k] - h^{\delta^k} - p \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

а последовательность $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k]$, $k = 0, 1, \dots$ была ограниченной. Эта последовательность $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомой ОМП в задаче (P_p^0) .

Другими словами, зависящий от δ^k , $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(A^{\delta^k}, h^{\delta^k})$, удовлетворяющих оценкам (2.1) при $\delta = \delta^k$, элемент $R(A^{\delta^k}, h^{\delta^k}, \delta^k) = z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k] \in \mathcal{D}$, является ОМП-образующим, причем в силу дифференцируемости по Фреше целевого функционала $\|\cdot\|^2$ имеет место и сильная сходимость $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k] \rightarrow z_p^0$, $k \rightarrow \infty$.

Одновременно выполняется и предельное соотношение

$$V_p^0(\bar{\lambda}_p^k) \rightarrow \sup_{\lambda \in H} V_p^0(\lambda) = \|z_p^0\|^2, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

В случае разрешимости двойственной к (P_p^0) задачи, т. е. если $\partial\beta(p) \neq \emptyset$, $\bar{\lambda}_p^k \rightarrow \lambda_p^0$, $k \rightarrow \infty$, где в качестве $\lambda_p^0 \in H$ выступает точка, доставляющая минимальное значение функционалу $\|\lambda - \tilde{\lambda}\|^2$, $\lambda \in H$, среди всех решений двойственной к (P_p^0) задачи. Таким образом, в случае разрешимости двойственной к (P_p^0) задачи в качестве точки к которой сходится последовательность $\bar{\lambda}_p^k$, $k = 1, 2, \dots$, за счет произвола в выборе $\tilde{\lambda} \in H$ может быть взято любое ее наперед выбранное и фиксированное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимости заметим, прежде всего, что задача (P_p^0) разрешима в силу существования ограниченной ОМП и условий на ее исходные данные. Поэтому предельные соотношения (2.14), (2.15) доказываемой теоремы являются следствиями теоремы 2.2 при учете замечания 2.4.

Далее, для доказательства достаточности, в первую очередь, заметим, что задача (P_p^0) разрешима благодаря включению $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k] \in \mathcal{D}_p^{\delta^k, \epsilon^k}$, $k = 1, 2, \dots$, ограниченности последовательности $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k]$, $k = 1, 2, \dots$, и условиям на исходные данные задачи. Тогда в силу той же теоремы 2.2 последовательность $\bar{\lambda}_p^k$, $k = 1, 2, \dots$, порождаемая итерационным процессом (2.13) с условиями согласования (2.7), удовлетворяет помимо предельных соотношений (2.14) и предельному соотношению $\|z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k]\|^2 \rightarrow \|z_p^0\|^2$, $k \rightarrow \infty$. По этой причине последовательность $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомой ОМП в задаче (P_p^0) , а значит, она и сходится к z_p^0 . Далее, так как последовательность $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k]$, $k = 1, 2, \dots$, ограничена, то в силу оценки леммы 2.2 условия согласования $\delta^k/(\alpha^k)^6 \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, в (2.7) и предельного соотношения $\alpha^k \|\bar{\lambda}_p^k\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, теоремы 2.2 последовательность $z^0[\bar{\lambda}_p^k]$, $k = 1, 2, \dots$, также ограничена. Одновременно в силу равномерной по $k = 1, 2, \dots$ ограниченности элементов $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k]$, $z^0[\bar{\lambda}_p^k]$, и оценки леммы 2.3 получаем предельное соотношение $V_p^{\delta^k}(\bar{\lambda}_p^k) - V_p^0(\bar{\lambda}_p^k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Так как при этом в силу доказанной сходимости $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}_p^k] \rightarrow z_p^0$, $k \rightarrow \infty$, и второго из условий (2.14) имеет место сходимость $V_p^{\delta^k}(\lambda_p^k) \rightarrow \|z_p^0\|^2$, $k \rightarrow \infty$, то получаем окончательно $V_p^0(\lambda_p^k) \rightarrow \sup_{\lambda \in H} V_p^0(\lambda) = \|z_p^0\|^2$, $k \rightarrow \infty$. $\square$

З а м е ч а н и е 2.5. Регуляризованный ПЛ в итерационной форме теоремы 2.5, как и метод итеративной двойственной регуляризации, в случае, когда исходные данные задачи (P_p^0) задаются с фиксированной конечной ошибкой, может быть снабжен и правилом останова итерационного процесса (2.13), подобным правилу теоремы 2.3.

З а м е ч а н и е 2.6. Подчеркнем, что сформулированные регуляризованные ПЛ 2.4, 2.5 принципиально отличаются от своего классического аналога двумя важными обстоятельствами: 1) они справедливы без каких-либо предположений регулярности (существования вектора Куна–Таккера) задачи (P_p^0) ; 2) они «устойчивы» по отношению к ошибкам исходных данных и могут использоваться, в частности, для решения некорректных задач, если последовательность λ^k , $k = 1, 2, \dots$ выбирается в соответствии с указанными в них алгоритмами регуляризации в двойственной задаче. При этом содержащиеся в них условия обеспечивают одновременно как достаточное, так и необходимое условие существования ОМП в задаче, что, благодаря лемме 2.1, позволяет трактовать их в то же время как выражаемые в секвенциальной форме необходимые и достаточные условия обычной оптимальности в задаче (P_p^0) .

3. ПЛ является предельным вариантом своих регуляризованных аналогов

ПЛ является предельным вариантом своих регуляризованных аналогов при стремлении номеров элементов ОМП к бесконечности. В этом смысле можно говорить, что вся информация о классическом параметрическом ПЛ содержится в соответствующем параметрическом регуляризованном ПЛ. Одновременно регуляризованные ПЛ вырождаются в пределе в случае невыполнимости своих классических аналогов. Для пояснения сказанного опять вернемся к «простейшей» задаче (P_p^0) . Действительно, в случае разрешимости двойственной задачи, т. е. в случае $\partial\beta(p) \neq \emptyset$, в соответствии с утверждениями теорем 2.4, 2.5, благодаря сильной сходимости соответствующих ОМП (напомним, что $z^\delta[\lambda] \equiv \operatorname{argmin}\{L_p^\delta(z, \lambda), z \in \mathcal{D}\}$) к оптимальному элементу z_p^0 и последовательности двойственной переменной к нормальному решению двойственной задачи λ_p^0 , получаем в пределе при $k \rightarrow \infty$ неравенство $L_p^0(z_p^0, \lambda_p^0) \leq L_p^0(z, \lambda_p^0) \quad \forall z \in \mathcal{D}$ (из (2.11) — в случае теоремы 2.4 и соответственно из (2.14) — в случае теоремы 2.5). Если же $\partial\beta(p) = \emptyset$, но $\partial^\infty\beta(p) \neq \{0\}$, то для перехода к пределу в соотношениях теорем 2.4, 2.5 поступаем несколько хитрее. Воспользуемся для этого двумя важными фактами, связанными со свойствами субдифференцируемости выпуклой полунепрерывной снизу функции значений β (см. лемму 1.1). Первый из них заключается в том, что каждая такая функция в гильбертовом пространстве является субдифференцируемой на плотном множестве ее эффективного множества (см. лемму 1.2, а также [14, теорема 4.3]). Второй же связан с известным представлением для асимптотического субдифференциала выпуклого полунепрерывного снизу функционала (см., например, [15, утверждение 4C2])

$$\partial^\infty\beta(p) = \limsup_{p' \xrightarrow{\beta} p, t \downarrow 0} t\partial\beta(p') \equiv \left\{ w - \lim_{k \rightarrow \infty} t_k \zeta_k : t_k \downarrow 0, \quad \zeta_k \in \partial\beta(p^k), \quad p^k \xrightarrow{\beta} p \right\},$$

где символ $p' \xrightarrow{\beta} p$ означает, что $(p', \beta(p')) \rightarrow (p, \beta(p))$, а символ $t \downarrow 0$ означает сходимость к нулю справа. Тогда возьмем произвольную слабую предельную точку вида

$$\tilde{\lambda}_p = w - \lim_{k \rightarrow \infty, p^k \xrightarrow{\beta} p, s_k \downarrow 0} s_k \lambda_{p^k}^0$$

с $\lambda_{p^k}^0 \in -\partial\beta(p^k)$, причем в соответствии с теоремами 2.4 и 2.5 в данном случае в качестве $\lambda_{p^k}^0$ можно взять любой элемент из $-\partial\beta(p^k)$ (см. замечание 1.1). Так как в задаче с $p = p^k$ имеем $\partial\beta(p^k) \neq \emptyset$, то по доказанному выше можем записать

$$L_{p^k}^0(z_{p^k}^0, s_k, s_k \lambda_{p^k}^0) \leq L_{p^k}^0(z, s_k, s_k \lambda_{p^k}^0) \quad \forall z \in \mathcal{D},$$

где $L_p^0(z, s, \lambda) \equiv s\|z\|^2 + \langle \lambda, A^0 z - h^0 - p \rangle$. Переходя теперь в последнем неравенстве очевидным образом к пределу при $k \rightarrow \infty$ с учетом предельного соотношения $z_{p^k}^0 \rightarrow z_p^0$, $k \rightarrow \infty$ (так как $\|z_{p^k}^0\|^2 \rightarrow \|z_p^0\|^2$ в силу предельного соотношения $p^k \xrightarrow{\beta} p$ и $z_{p^k}^0$ слабо сходится к z_p^0 при $k \rightarrow \infty$), получаем неравенство $L_p^0(z_p^0, 0, \tilde{\lambda}_p) \leq L_p^0(z, 0, \tilde{\lambda}_p) \quad \forall z \in \mathcal{D}$, означающее выполнимость нерегулярного ПЛ в задаче $\|z\|^2 \rightarrow \min, \quad A^0 z = h^0 + p, \quad z \in \mathcal{D}$. Итак, регуляризованные ПЛ теорем 2.4, 2.5 в пределе «приводят» к классическому ПЛ при любом $p \in \text{dom} \beta$, для которого либо субдифференциал $\partial \beta(p)$ не пуст, либо, в случае его пустоты, асимптотический субдифференциал $\partial^\infty \beta(p)$ состоит не из одного нуля. Если же одновременно $\partial \beta(p) = \emptyset$, $\partial^\infty \beta(p) = \{0\}$, то регуляризованные ПЛ теорем 2.4, 2.5 в пределе вырождаются.

4. О связи экстремалей функционалов Тихонова и Лагранжа

Оказывается, что приближения в соответствии с регуляризованным ПЛ теоремы 2.4 в случае $\mathcal{D} = Z$ «являются приближениями» по методу Тихонова. Другими словами, полученные А. Н. Тихоновым в 1963 г. приближения к решению задачи (IP) в случае $\mathcal{D} = Z$ были, по сути дела, приближениями в соответствии с регуляризованным ПЛ теоремы 2.4 для эквивалентной задачи условной минимизации (P) . Поясним сказанное. Опять рассматриваем задачу $(P^0) = (P)$ как элемент при $\delta = 0$ семейства зависящих от числового параметра δ , $\delta \in [0, \delta_0)$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число, задач $(P^\delta) = (P_0^\delta)$ (см. раздел 2.), считая при этом, что $\|A^\delta - A^0\| \leq C\delta$, $\|h^\delta - h^0\| \leq C\delta$ с некоторой постоянной $C > 0$, которая не зависит от δ .

С одной стороны, метод регуляризации (стабилизации) Тихонова для задачи (IP^0) заключается [2–4] в отыскании решений $z^{\delta, \alpha(\delta)}$ задачи минимизации сглаживающего функционала — функционала Тихонова $M^{\delta, \alpha(\delta)}(z) \equiv \|A^\delta z - h^\delta\|^2 + \alpha(\delta)\|z\|^2 \rightarrow \min, \quad z \in \mathcal{D}$ при условии согласования $\delta^2/\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, что сводится к решению вариационного неравенства (0.1). В этом случае для экстремалей $z^{\delta, \alpha(\delta)}$ функционала Тихонова — приближенных решений задачи (IP^0) , как известно [2–4], имеет место при указанных условиях предельное соотношение $\|z^{\delta, \alpha(\delta)} - z^0\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, где z^0 — решение (нормальное) точной задачи (IP^0) .

В свою очередь, с другой стороны, алгоритм двойственной регуляризации теоремы 2.1 (см. также [17]) для задачи (P^0) (тихоновская стабилизация двойственной к (P^0) задачи) предполагает решение задачи

$$V^\delta(\lambda) - \alpha(\delta)\|\lambda\|^2 \equiv \min_{z \in \mathcal{D}} \{\|z\|^2 + \langle \lambda, A^\delta z - h^\delta \rangle\} - \alpha(\delta)\|\lambda\|^2 \rightarrow \max, \quad \lambda \in H,$$

$$\lambda^{\delta, \alpha(\delta)} \equiv \operatorname{argmax}\{V^\delta(\lambda) - \alpha(\delta)\|\lambda\|^2 : \lambda \in H\},$$

при условии согласования $\delta/\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ с последующим нахождением экстремалей функционала Лагранжа $z^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}] \equiv \operatorname{argmin}\{\|z\|^2 + \langle \lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, A^\delta z - h^\delta \rangle : z \in \mathcal{D}\}$. При этом в соответствии с теоремой 2.1 сходимости метода двойственной регуляризации (см. также [17]) имеет место предельное соотношение $\|z^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}] - z^0\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$.

Элемент $\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}$ есть решение (см. [17]) уравнения

$$(V^\delta(\lambda) - \alpha(\delta)\|\lambda\|^2)' = 0$$

(в этом случае функционал $V^\delta(\cdot)$ непрерывно дифференцируем по Фреше при $\lambda \in H$ и, с учетом сильной выпуклости $\|\cdot\|^2$, $V^{\delta'}(\lambda) = A^\delta z^\delta[\lambda] - h^\delta$, см., например, [17, лемма 3])

или уравнения

$$A^\delta z^\delta[\lambda] - h^\delta - 2\alpha(\delta)\lambda = 0$$

с $z^\delta[\lambda] \equiv \operatorname{argmin}\{\|z\|^2 + \langle \lambda, A^\delta z - h^\delta \rangle : z \in \mathcal{D}\} = \operatorname{Pr}_{\mathcal{D}}(-\frac{1}{2}A^{\delta*}\lambda)$. Отсюда выводим, что элемент $\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}$ есть решение уравнения

$$A^\delta \operatorname{Pr}_{\mathcal{D}}(-\frac{1}{2}A^{\delta*}\lambda) - h^\delta - 2\alpha(\delta)\lambda = 0 \quad (4.1)$$

или

$$A^{\delta*}A^\delta \operatorname{Pr}_{\mathcal{D}}(-\frac{1}{2}A^{\delta*}\lambda) + 4\alpha(\delta)(-\frac{1}{2}A^{\delta*}\lambda) = A^{\delta*}h^\delta. \quad (4.2)$$

Таким образом, элемент $-\frac{1}{2}A^{\delta*}\lambda^{\delta, \alpha(\delta)} = \operatorname{argmin}\{\|z\|^2 + \langle \lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, A^\delta z - h^\delta \rangle : z \in Z\}$ является решением уравнения

$$A^{\delta*}A^\delta \operatorname{Pr}_{\mathcal{D}}z + 4\alpha(\delta)z = A^{\delta*}h^\delta, \quad z \in Z,$$

при этом его проекция на $\mathcal{D}$ — элемент $z^\delta[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}] = \operatorname{Pr}_{\mathcal{D}}(-\frac{1}{2}A^{\delta*}\lambda^{\delta, \alpha(\delta)})$ — приближенное решение исходной задачи (P^0) , т. е. задачи $\|z\|^2 \rightarrow \min, A^0z = h^0, z \in \mathcal{D}$, по методу двойственной регуляризации. В частном случае $\mathcal{D} = Z$ получаем, что приближенное решение задачи (P^0) , т. е. элемент $-\frac{1}{2}A^{\delta*}\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}$ — приближенное решение исходной задачи (P^0) , т. е. задачи $\|z\|^2 \rightarrow \min, A^0z = h^0, z \in Z$, по методу двойственной регуляризации — является одновременно приближенным решением эквивалентной задачи (IP^0) по методу Тихонова с заменой $\alpha(\delta)$ на $4\alpha(\delta)$ в известном [2–4] операторном уравнении для экстремалей функционала Тихонова

$$A^{\delta*}A^\delta z + \alpha(\delta)z = A^{\delta*}h^\delta, \quad z \in Z. \quad (4.3)$$

Итак, в случае $\mathcal{D} = Z$ приближенные решения задачи (IP^0) и (P^0) являются решениями одного и того же уравнения для экстремалей (4.3), но взятого при разных значениях параметра регуляризации $\alpha(\delta)$. Если же $\mathcal{D} \neq Z$, то приближенные решения задачи (IP^0) по методу регуляризации Тихонова и задачи (P^0) в соответствии с регуляризацией ПЛ теоремы 2.4 существенно разнятся: в первом случае приближения находятся как решения вариационного неравенства (0.1), во втором же, нахождение приближенного решения заключается в выполнении последовательно трех операций, первая из которых — решение регуляризованной двойственной задачи и нахождение элемента $\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}$, например, посредством решения уравнения (4.1) или уравнения (4.2), вторая — вычисление значения сопряженного оператора $-(1/2)A^{\delta*}\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}$, а третья — нахождение проекции полученного элемента на множество $\mathcal{D}$.

References

- [1] А. Н. Тихонов, “О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации”, *Доклады АН СССР*, **151**:3 (1963), 501–504; англ. пер.: A. N. Tikhonov, “Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method”, *Sov. Math., Dokl.*, **5** (1963), 1035–1038.
- [2] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.: A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston; Halsted Press, Washington; New York, 1977.
- [3] А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола, *Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация*, Наука, М., 1983. [A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, V. V. Stepanov, A. G. Yagola, *Regularizing Algorithms and A Priori Information*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (In Russian)].

- [4] А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский, *Некорректные задачи. Численные методы и приложения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989. [A. B. Bakushinskii, A. V. Goncharskii, *Incorrect Problems. Numerical Methods and Applications*, Moscow University Publishing House, Moscow, 1989 (In Russian)].
- [5] Е. Г. Гольштейн, *Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения*, Наука, М., 1971. [E. G. Golshtein, *Duality Theory in Mathematical Programming and its Applications*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (In Russian)].
- [6] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.
- [7] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации: в 2-х кн.*, МЦНМО, М., 2011. [F. P. Vasil'ev, *Optimization methods: in 2 books*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian)].
- [8] М. И. Сумин, “Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:9 (2011), 1594–1615; англ. пер.: M. I. Sumin, “Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:9 (2011), 1489–1509.
- [9] М. И. Сумин, “Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 279–296. [M. I. Sumin, “Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **25**, 2019, 279–296].
- [10] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal control*, Plenum Press, New York, 1987.
- [11] Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, “О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений”, *Успехи матем. наук*, **68**:3(411) (2013), 5–38; англ. пер.: E. R. Avakov, G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, “Lagrange’s principle in extremum problems with constraints”, *Russian Math. Surveys*, **68**:3 (2013), 401–433.
- [12] М. И. Сумин, “Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:131 (2020), 307–330. [M. I. Sumin, “Nondifferential Kuhn–Tucker theorems in constrained extremum problems via subdifferentials of nonsmooth analysis”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:131 (2020), 307–330 (In Russian)].
- [13] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].
- [14] J.-P. Aubin, *L’analyse Non Lineaire Et Ses Motivations Economiques*, Masson, Paris–New York, 1984.
- [15] P. D. Loewen, *Optimal Control via Nonsmooth Analysis*. V. 2, CRM Proceedings & Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [16] М. И. Сумин, “О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления”, Тр. ИММ УрО РАН, **26**, 2020, 252–269. [M. I. Sumin, “On the regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **26**, 2020, 252–269 (In Russian)].
- [17] М. И. Сумин, “Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:4 (2007), 602–625; англ. пер.: M. I. Sumin, “Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:4 (2007), 579–600.
- [18] М. И. Сумин, “Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44**:11 (2004), 2001–2019; англ. пер.: M. I. Sumin, “A regularized gradient dual method for the inverse problem of a final observation for a parabolic equation”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **44**:11 (2004), 1903–1921.

Информация об авторе

Сумин Михаил Иосифович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов; профессор, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. E-mail: m.sumin@mail.ru

Поступила в редакцию 15.12.2021 г.
Поступила после рецензирования 17.02.2022 г.
Принята к публикации 10.03.2022 г.

Information about the author

Mikhail I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov; Professor, Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, Russian Federation. E-mail: m.sumin@mail.ru

Received 15.12.2021
Reviewed 17.02.2022
Accepted for press 10.03.2022

© Хоанг В.Н., Провоторов В.В., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-80-94

УДК 517.929.4



Устойчивость трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы в классе суммируемых на сетеподобной области функций

Ван Нгуен ХОАНГ, Вячеслав Васильевич ПРОВТОРОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

Аннотация. В работе получены условия устойчивости трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы с весовым параметром в классе функций, суммируемых на сетеподобной области. Для анализа устойчивости в пространстве допустимых решений H дифференциально-разностной системы вводится составная норма, имеющая структуру нормы пространства $H^2 = H \oplus H$. А именно, для $Y = \{Y_1, Y_2\} \in H^2$, $Y_\ell \in H$ ($\ell = 1, 2$), $\|Y\|_H^2 = \|Y_1\|_{1,H}^2 + \|Y_2\|_{2,H}^2$, где $\|\cdot\|_{1,H}$, $\|\cdot\|_{2,H}$ — некоторые нормы H . Использование такой нормы при описании энергетического тождества открывает путь построения априорных оценок для слабых решений дифференциально-разностной системы, удобных при практической проверке в случае конкретных дифференциально-разностных схем. Полученные результаты могут быть использованы для анализа задач оптимизации, возникающих при моделировании сетеподобных процессов переноса формализмами дифференциально-разностных систем.

Ключевые слова: многомерная сетеподобная область, дифференциально-разностная система, устойчивость дифференциально-разностной схемы

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05136197).

Для цитирования: Хоанг В.Н., Провоторов В.В. Устойчивость трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы в классе суммируемых на сетеподобной области функций // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 80–94. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-80-94.

© V. N. Hoang, V. V. Provotorov, 2022
DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-80-94



Stability of a three-layer symmetric differential-difference scheme in the class of functions summable on a network-like domain

Van N. HOANG, Vyacheslav V. PROVOTOROV

Voronezh State University

1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russian Federation

Abstract. In the paper, the stability conditions of a three-layer symmetric differential-difference scheme with a weight parameter in the class of functions summable on a network-like domain are obtained. To analyze the stability of the differential-difference system in the space of feasible solutions H , a composite norm is introduced that has the structure of a norm in the space $H^2 = H \oplus H$. Namely, for $Y = \{Y_1, Y_2\} \in H^2$, $Y_\ell \in H$ ($\ell = 1, 2$), $\|Y\|_H^2 = \|Y_1\|_{1,H}^2 + \|Y_2\|_{2,H}^2$, where $\|\cdot\|_{1,H}^2$, $\|\cdot\|_{2,H}^2$ are some norms in H . The use of such a norm in the description of the energy identity opens the way for constructing a priori estimates for weak solutions of the differential-difference system, convenient for practical testing in the case of specific differential-difference schemes. The results obtained can be used to analyze optimization problems that arise when modeling network-like transfer processes with the help of formalisms of differential-difference systems.

Keywords: multidimensional network-like domain, differential-difference system, stability of differential-difference scheme

Acknowledgements: The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project AP05136197).

Mathematics Subject Classification: 49N10.

For citation: Hoang V.N., Provotorov V.V. Ustoychivost' trekhslonnoy simmetrichnoy differentsial'no-raznostnoy skhemy v klasse summiruyemykh na setepodobnoy oblasti funktsiy [Stability of a three-layer symmetric differential-difference scheme in the class of functions summable on a network-like domain]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 80–94. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-80-94. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Настоящая работа является естественным продолжением исследований устойчивости дифференциальных систем на графе [1, 2] в направлении увеличения размерности сетеподобной области изменения пространственной переменной при изучении устойчивости трехслойной дифференциально-разностной схемы с весами и оператором, определенным в соболевском пространстве. Представлены достаточные условия устойчивости, зависящие от выбора весовых параметров, и доказано основное энергетическое тождество. Получены основанные на энергетическом тождестве априорные оценки, гарантирующие устойчивость схемы к малым изменениям начальных данных и правой части. Рассмотрена связь устойчивости дифференциально-разностных схем со слабой разрешимостью эволюционных задач для уравнений математической физики с пространственной переменной, изменяющейся в сетеподобной области. Представленный анализ устойчивости дифференциально-разностных схем открывает путь аппроксимации дифференциальных систем уравнений математической физики при их численной реализации и алгоритмизации для решения задач оптимального управления.

1. Необходимые обозначения, понятия и определения

Везде ниже областью изменения аргументов функций является сетеподобная ограниченная область $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ($\partial\mathfrak{Z}$ — граница $\mathfrak{Z}$), состоящая из подобластей $\mathfrak{Z}_l$, $l = \overline{1, N}$ ($\partial\mathfrak{Z}_l$ — граница $\mathfrak{Z}_l$), соединенных определенным образом между собой в M узловых местах ω_j ($j = \overline{1, M}$, $1 \leq M \leq N - 1$): $\mathfrak{Z} = \hat{\mathfrak{Z}} \cup \hat{\omega}$, $\hat{\mathfrak{Z}} = \bigcup_{l=1}^N \mathfrak{Z}_l$, $\hat{\omega} = \bigcup_{j=1}^M \omega_j$, $\mathfrak{Z}_l \cap \mathfrak{Z}_{l'} = \emptyset$ ($l \neq l'$), $\omega_j \cap \omega_{j'} = \emptyset$ ($j \neq j'$), $\mathfrak{Z}_l \cap \omega_j = \emptyset$ ($l \neq j$) [3–5]. В каждом узловом месте ω_j ($j = \overline{1, M}$) определенное число подобластей $\mathfrak{Z}_l$ имеют общие границы, образующие поверхность их примыкания S_j ($\text{meas } S_j > 0$). Поверхность примыкания связывает между собой примыкающие к ней $1 + m_j$ области $\mathfrak{Z}_{l_0}$ и $\mathfrak{Z}_{l_s}$ ($s = \overline{1, m_j}$): $S_j = \bigcup_{s=1}^{m_j} S_{j_s}$ ($\text{meas } S_{j_s} > 0$), $S_j \subset \partial\mathfrak{Z}_{l_0}$, $S_{j_s} \subset \partial\mathfrak{Z}_{l_s}$ ($s = \overline{1, m_j}$). Таким образом, каждое узловое место ω_j ($j = \overline{1, M}$) определяется своею поверхностью примыкания S_j , для которой каждая поверхность S_{j_s} ($s = \overline{1, m_j}$) также является поверхностью примыкания $\mathfrak{Z}_{l_s}$ к $\mathfrak{Z}_{l_0}$. Ясно, что при этом граница области $\mathfrak{Z}$ не содержит поверхности S_j ($j = \overline{1, M}$): $\partial\mathfrak{Z} = \bigcup_{k=1}^N \partial\mathfrak{Z}_k \setminus \bigcup_{j=1}^M S_j$. Следует отметить, что структура области $\mathfrak{Z}$ совпадает с геометрией графа-дерево с внутренними узлами (вершинами) ω [1, 2], [6]. А именно, каждая область $\mathfrak{Z}_l$ примыкает к одному либо двум узловым местам и имеет не менее одной поверхности примыкания к другим областями (заметим для сравнения: хотя бы одна концевая точка произвольного ребра графа является местом сочленения с концевыми точками определенного числа других ребер). Очевидно также, что любая связная подобласть области $\mathfrak{Z}$ имеет структуру, аналогичную $\mathfrak{Z}$, и обладает своим числом узловых мест. Условимся считать, что поверхности S_j и S_{j_s} ($s = \overline{1, m_j}$, $l = \overline{1, N}$) являются гладкими, а области $\mathfrak{Z}_l$ — звездными относительно некоторого шара, своего для каждой $\mathfrak{Z}_l$.

Используются общепринятые обозначения пространств Лебега и Соболева, причем интеграл Лебега применительно к сетеподобной области $\mathfrak{Z}$ определяется соотношением

$$\int_{\mathfrak{Z}} u(x) dx = \sum_{l=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_l} u(x) dx. \text{ Пусть } L_2(\mathfrak{Z}) \text{ — гильбертово пространство действительных изме-}$$

римых по Лебегу функций $u(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, скалярное произведение и норма в $L_2(\mathfrak{Z})$ определены соответствующими равенствами:

$$(u, v)_{\mathfrak{Z}} = \int_{\mathfrak{Z}} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_{\mathfrak{Z}} = \sqrt{(u, u)}. \quad (1.1)$$

Пусть, далее, $W_2^1(\mathfrak{Z})$ — гильбертово пространство функций $u(x)$ из $L_2(\mathfrak{Z})$, для которых $u_{x_\kappa}(x) \in L_2(\mathfrak{Z})$, $\kappa = \overline{1, n}$; соотношения

$$(u, v)_{\mathfrak{Z}}^1 = \int_{\mathfrak{Z}} \left(u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa} \frac{\partial v(x)}{\partial x_\kappa} \right) dx, \quad \|u\|_{\mathfrak{Z}}^1 = \sqrt{(u, u)_{\mathfrak{Z}}^1}, \quad (1.2)$$

определяют скалярное произведение и норму в $W_2^1(\mathfrak{Z})$, соответственно. Символ $\mathfrak{Z}$ в обозначениях скалярного произведения и нормы в некоторых случаях для упрощения записи может опускаться. Представления пространств $L_2(\mathfrak{Z})$, $W_2^1(\mathfrak{Z})$ принимают следующий вид: $L_2(\mathfrak{Z}) = \prod_{l=1}^N L_2(\mathfrak{Z}_l)$, $W_2^1(\mathfrak{Z}) = \prod_{l=1}^N W_2^1(\mathfrak{Z}_l)$.

Введем другие пространства функций с носителем на сетеподобной области $\mathfrak{Z} = \bigcup_{l=1}^N \mathfrak{Z}_l$. При описании таких пространств необходимо продолжать элементы $u(x)$ с области $\mathfrak{Z}$ на $\overline{\mathfrak{Z}} = \bigcup_{l=1}^N \overline{\mathfrak{Z}_l}$.

Вводя совокупность $C(\overline{\Omega})$ непрерывных функций в некоторой области $\overline{\Omega}$ (скалярное произведение и норму в $C(\overline{\Omega})$ определим соотношениями (1.1), в которых $\mathfrak{Z}$ следует заменить на $\overline{\Omega}$), условимся говорить, что элемент $u(x) \in C(\overline{\Omega})$ имеет производную, непрерывную в $\overline{\Omega}$, если эта производная для точек Ω , продолжается на $\overline{\Omega}$ по непрерывности (топология на $\overline{\Omega}$ индуцируется топологией Ω). Таким образом, можно определить и рассмотреть совокупность $C^1(\overline{\Omega})$, для элементов $u(x)$ которой существуют непрерывные первые производные по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$ в $\overline{\Omega}$, причем скалярное произведение и норма для элементов $C^1(\overline{\Omega})$ определены соотношениями (1.2) (в которых $\mathfrak{Z}$ заменяется на $\overline{\Omega}$).

Сказанное приводит к возможности формирования следующих множеств для области $\mathfrak{Z}$: множество $C(\overline{\mathfrak{Z}})$ непрерывных в $\overline{\mathfrak{Z}}$ функций $u(x)$, множество $C^1(\overline{\mathfrak{Z}_l})$ ($l = \overline{1, N}$) функций из $C(\overline{\mathfrak{Z}})$, которые при каждом фиксированном l в $\overline{\mathfrak{Z}_l}$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}$ и множество $C^1(\overline{\mathfrak{Z}}) = \prod_{l=1}^N C^1(\overline{\mathfrak{Z}_l})$ со скалярным произведением и нормой, определяемыми формулами (1.2).

Далее, пусть $\tilde{C}^1(\overline{\mathfrak{Z}})$ — множество функций $u(x) \in C^1(\overline{\mathfrak{Z}})$, для которых имеют место условия (ниже — условия примыкания в узловых местах ω_j)

$$\int_{S_j} a(x)_{S_j} \frac{\partial u(x)_{S_j}}{\partial \mathbf{n}_j} ds + \sum_{i=1}^{m_j} \int_{S_{ji}} a(x)_{S_{ji}} \frac{\partial u(x)_{S_{ji}}}{\partial \mathbf{n}_{ji}} ds = 0, \quad x \in S_{ji}, \quad i = \overline{1, m_j}, \quad (1.3)$$

на поверхностях S_j , S_{ji} ($i = \overline{1, m_j}$) всех узловых мест ω_j , $j = \overline{1, M}$. Здесь $a(x) \in L_2(\mathfrak{Z})$ и $a(x)_{S_j}$, $u(x)_{S_j}$, $a(x)_{S_{ji}}$, $u(x)_{S_{ji}}$ — сужения функций $a(x)$, $u(x)$ на S_j и S_{ji} ; $\mathbf{n}_j$ и $\mathbf{n}_{ji}$ — внешние нормали к S_j и S_{ji} , соответственно, $i = \overline{1, m_j}$, $j = \overline{1, M}$. В дальнейшем

для упрощения записи индексы, означающие сужение, могут не использоваться. Вместе с $\tilde{C}^1(\mathfrak{F})$ введем множество $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{F})$, элементы $u(x)$ которого имеют компактный носитель в области $\mathfrak{F}$ и принадлежат $\tilde{C}^1(\mathfrak{F})$; последнее означает, что $u(x)|_{\partial\mathfrak{F}} = 0$.

О п р е д е л е н и е 1.1. $\widetilde{W}^1(\mathfrak{F})$ — замыкание $\tilde{C}^1(\mathfrak{F})$ в норме (1.2); $\|\cdot\|_{\widetilde{W}^1(\mathfrak{F})} = \|\cdot\|_{\mathfrak{F}}^1$.

О п р е д е л е н и е 1.2. $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{F})$ — замыкание $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{F})$ в норме (1.2); $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{F})$ является подпространством $\widetilde{W}^1(\mathfrak{F})$.

Заметим, что представление $C^1(\overline{\mathfrak{F}}) = \prod_{l=1}^N C^1(\overline{\mathfrak{F}}_l)$ определяет очевидное свойство элементов $u(x)$ пространств $\widetilde{W}^1(\mathfrak{F})$ и $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{F})$: сужения $u(x)|_{\mathfrak{F}_l}$ для любого $l = \overline{1, N}$ принадлежат этим пространствам. Заметим также, что из $\mathfrak{F}_l \subset \mathfrak{F}$ ($l = \overline{1, N}$) и существования обобщенных производных $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$ ($\iota = \overline{1, n}$) в области $\mathfrak{F}$ следует существование обобщенных производных $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$ в $\mathfrak{F}_l$. Отсюда и из определений 1.1 и 1.2 вытекает: элементы пространств $\widetilde{W}^1(\mathfrak{F})$ и $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{F})$ обладают свойством (1.3), являющимся условиями примыкания границ поверхностей $\mathfrak{F}_l$ в узловых местах ω_j , $j = \overline{1, M}$. Таким образом мы остаемся в рамках классической теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, если только обобщенная производная определена $\mathfrak{F}_l$. Последнее учтено в представлениях (1.2) скалярного произведения и нормы.

2. Дифференциально-разностная схема, устойчивость

На отрезке $[0, T]$ введем равномерную сетку

$$\omega_\tau = \{t_k = k\tau, k = 1, \dots, K\}$$

с шагом $\tau = \frac{T}{K}$; $\overline{\omega}_\tau = \{0\} \cup \omega_\tau$. Будем рассматривать абстрактные функции (отображения) $y_\tau(t)$, $f_\tau(t)$ дискретного аргумента $t = k\tau \in \overline{\omega}_\tau$ со значениями в пространстве $L_2(\mathfrak{F})$, так что $y_\tau(t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{F}) \subset L_2(\mathfrak{F})$. В дальнейшем индекс τ будем опускать и писать $y(k) := y(x; k) = y_\tau(x; k\tau)$, $f(k) := f(x; k) = f_\tau(x; k\tau)$ ($k = 0, 1, \dots, K$).

Рассмотрим семейство дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau}[y(k+1) - y(k-1)] &= \mathbf{L}y^{(\sigma)} + f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) &= y_0(x), \quad y(1) = y_1(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

зависящих от параметра σ , где $y^{(\sigma)} = \sigma y(k+1) + (1-2\sigma)y(k) + \sigma y(k-1)$, с операторным коэффициентом $\mathbf{L}$, который является линейным оператором $\mathbf{L}u = \sum_{\kappa, \iota=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right)$, действующим из пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{F})$ в $L_2(\mathfrak{F})$. Семейство дифференциально-разностных уравнений (2.1) будем называть трехслойной симметричной дифференциально-разностной системой уравнений. Пространство $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{F})$ определяется посредством замыкания множества $\tilde{C}^1(\mathfrak{F})$, где $a(x) = a_{\kappa\iota}(x)$ (см. соотношение (1.3)). Уравнение в системе (2.1) связывает значения искомых функций $y(k)$, $k = 2, 3, \dots, K$, на трех слоях t_{k+1} , t_k , t_{k-1} ; функции $y_0(x)$, $y_1(x)$ определяют начальные данные, значения $f(k)$, $k = 1, 2, \dots, K$, как и начальные функции, полагаем заданными.

При фиксированных k ($k = 1, 2, \dots, K-1$) и параметре σ функция $y(k+1) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{F})$ определена как решение (2.1) с краевым условием

$$y(k) |_{x \in \partial\mathfrak{F}} = 0. \tag{2.2}$$

Дифференциально-разностную систему уравнений (2.1) с краевыми условиями (2.2) при $k = 2, 3, \dots, K$ назовем трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемой (2.1), (2.2).

Во всех рассмотренных случаях выполнены условия эллиптичности оператора $\mathbf{L}$, его коэффициенты $a_{\kappa\iota}(x)$ — ограниченные измеримые функции, т. е. имеют место условия

$$a_*\xi^2 \leq a_{\kappa\iota}(x)\xi_\kappa\xi_\iota \leq a^*\xi^2, \quad a_{\kappa\iota}(x) = a_{\iota\kappa}(x), \quad a_{\kappa\iota}(x)\xi_\kappa\xi_\iota = \sum_{\kappa,\iota=1}^n a_{\kappa\iota}(x)\xi_\kappa\xi_\iota, \quad \xi^2 = \sum_{\kappa=1}^n \xi_\kappa^2, \quad (2.3)$$

с фиксированными положительными постоянными a_* , a^* , β и произвольными параметрами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, кроме того

$$y_0(x), y_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}), \quad f(k) \in L_2(\mathfrak{S}), \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (2.4)$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Совокупность $\{y(2), y(3), \dots, y(K)\}$ функций $y(k) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ ($k = \overline{2, K}$) является слабым решением дифференциально-разностной системы (2.1), (2.2), если функции $y(k)$ ($k = \overline{2, K}$) удовлетворяют тождествам

$$\int_{\mathfrak{S}} y(k)_t \eta(x) dx + \ell(y^{(\sigma)}, \eta) = \int_{\mathfrak{S}} f(k) \eta(x) dx \quad \forall \eta(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$$

при $k = 1, 2, \dots, K-1$; $y(k)_t = \frac{1}{2\tau}[y(k+1) - y(k-1)]$; билинейная форма $\ell(y^{(\sigma)}, \eta)$ определена соотношением

$$\ell(y^{(\sigma)}, \eta) = \int_{\mathfrak{S}} \sum_{\kappa,\iota=1}^n a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial y^{(\sigma)}}{\partial x_\iota} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} dx.$$

З а м е ч а н и е 2.1. Из определения 2.1 следует, что для $y(k)$ и каждого фиксированного $k = 2, 3, \dots, K-1$ соотношения (2.1), (2.2) задают в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ краевую задачу в слабой постановке для эллиптического уравнения (2.1).

Введем понятие корректности (корректно поставленной) дифференциально-разностной схемы (2.1). Для этого в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ будем использовать составную норму вида

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y(k+1) + y(k)\|_{(1)}^2 + \|y(k+1) - y(k)\|_{(2)}^2, \quad (2.5)$$

$$\|Y(1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y_1 + y_0\|_{(1)}^2 + \|y_1 - y_0\|_{(2)}^2,$$

где $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ — некоторые нормы пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$

О п р е д е л е н и е 2.2. Дифференциально-разностная схема (2.1) называется корректной, если при достаточно малых $\tau \leq \tau_0$

1) решение задачи (2.1), (2.2) существует и единственно при любых начальных данных $y_0(x), y_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ и правых частях $f(k) \in L_2(\mathfrak{S})$ для всех $k = 1, 2, \dots, K$;

2) существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2 , не зависящие от τ и от выбора $y_0(x)$, $y_1(x)$, $f(k)$, что при любых $y_0(x), y_1(x) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ и $f(k) \in L_2(\mathfrak{S})$ ($k = 1, 2, \dots, K$) справедлива оценка

$$\|Y(k+1)\| \leq C_1\|Y(1)\|_{(1^0)} + C_2\|f(k)\|_{(1^1)}, \quad (2.6)$$

где $\|Y(1)\|_{(1^0)}$, $\|f(k)\|_{(1^1)}$ — нормы пространств $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ и $L_2(\mathfrak{S})$, соответственно.

Неравенство (2.6) (совместно с представлением (2.5) составной нормы) выражает свойство равномерной по τ непрерывной зависимости решения задачи (2.1), (2.2) от входных данных $y_0(x)$, $y_1(x)$, $f(k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$) и определяет свойство **устойчивости дифференциально-разностной схемы** (2.1).

Теорема 2.1. Пусть для функций $a_{k\iota}(x)$, $y_0(x)$, $y_1(x)$ и $f(x)$ выполнены условия (2.3), (2.4). Функции $y(k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$), определяющие слабое решение системы (2.1), (2.2), при достаточно малых τ и $\sigma > 0$ однозначно определяются как элементы пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$.

Доказательство. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям из работы [7], можно установить свойство базисности в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ и $L_2(\mathfrak{S})$ множества обобщенных собственных функций оператора $\mathbf{L}$, определенного в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$. При выполнении условий (2.3) оператор $\mathbf{L}$ обладает вещественными и отрицательными собственными значениями конечной кратности. Эти собственные значения допускают нумерацию по неубыванию модулей: $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$; обобщенные собственные функции нумеруются соответственно, при этом учитывается кратность каждого собственного значения: $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$.

Задача $\mathbf{L}\phi = \lambda\phi + g$, $g \in L_2(\Gamma)$, фредгольмово разрешима в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$. Исходя из этого, положив $k = 1$, получаем однозначную разрешимость относительно $y(2)$ при $\sigma > 0$ краевой задачи

$$\sigma \mathbf{L}y(2) = \frac{1}{2\tau}y(2) - (1 - 2\sigma)\mathbf{L}y_1 - \sigma \mathbf{L}y_0 - \frac{1}{2\tau}y(0) - f(1)$$

в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ для $\tau < \tau_0$ при достаточно малом $\tau_0 > 0$. Это же справедливо для $y(3)$, $y(4), \dots, y(K)$ в силу соотношений

$$\sigma \mathbf{L}y(k+1) = \frac{1}{2\tau}y(k+1) - (1 - 2\sigma)\mathbf{L}y(k) - \sigma \mathbf{L}y(k-1) - \frac{1}{2\tau}y(k-2) - f(k)$$

при $k = 2, 3, \dots, K-1$, что завершает доказательство теоремы. $\square$

В дальнейшем изложении используются следующие обозначения, учитывающие границы изменения индекса k (см. [8, с. 350]):

$$y = y(k), \quad \hat{y} = y(k+1), \quad \check{y} = y(k-1),$$

$$y_t = \frac{1}{\tau}(\hat{y} - y), \quad y_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(y - \check{y}), \quad y_{\circ} = \frac{1}{2\tau}(\hat{y} - \check{y}), \quad y_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{1}{\tau^2}(\hat{y} - 2y + \check{y}),$$

в которых схема (2.1) примет вид

$$\frac{1}{2\tau}(\hat{y} - \check{y}) = \mathbf{L}y^{(\sigma)} + f(k), \quad y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}. \quad (2.7)$$

Заметим, что при любых значениях y , $\hat{y}$ и $\check{y}$ имеют место соотношения

$$(\hat{y} - \check{y})y^{(\sigma)} = \left[\frac{1}{2}(\hat{y}^2 + y^2) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)(\hat{y} - y)^2 \right] - \left[\frac{1}{2}(y^2 + \check{y}^2) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)(y - \check{y})^2 \right],$$

$$\frac{1}{2}(\hat{y}^2 + y^2) = \frac{1}{4}(\hat{y} + y)^2 + \frac{1}{4}(\hat{y} - y)^2.$$

и вытекающее из них

$$(\hat{y} - \check{y})y^{(\sigma)} = \left[\frac{1}{4}(\hat{y} + y)^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)(\hat{y} - y)^2 \right] - \left[\frac{1}{4}(y + \check{y})^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)(y - \check{y})^2 \right].$$

В пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ введем новую (составную) норму соотношениями

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y(k+1) + y(k)\|_{\mathfrak{S}}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\|y(k+1) - y(k)\|_{\mathfrak{S}}^2,$$

$$\|Y(1)\|^2 = \frac{1}{4}\|y_1 + y_0\|_{\mathfrak{S}}^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\|y_1 - y_0\|_{\mathfrak{S}}^2,$$

считая $\sigma > \frac{1}{4}$, и получим представление

$$(\hat{y} - \check{y})y^{(\sigma)} = \|Y(k+1)\|^2 - \|Y(k)\|^2, \quad (2.8)$$

при этом

$$\|Y(k+1)\|^2 \geq \frac{1}{4}\|y(k+1) + y(k)\|_{\mathfrak{S}}^2.$$

Умножая уравнение (2.7) скалярно на $2\tau y^{(\sigma)}$ и учитывая соотношение (2.8), получим основное энергетическое тождество для трехслойной схемы (2.1):

$$\|Y(k+1)\|^2 + 2\tau \int_{\mathfrak{S}} \sum_{\kappa=1}^n a_{\kappa,\kappa}(x) \left(\frac{\partial y^{(\sigma)}}{\partial x_{\kappa}} \right)^2 dx = \|Y(k)\|^2 + 2\tau(f(k), y^{(\sigma)}). \quad (2.9)$$

Используя соотношения (2.3), аналог неравенства Пуанкаре–Фридрихса (см., например, [9, с. 62])

$$\int_{\mathfrak{S}} \sum_{\kappa=1}^n a_{\kappa,\kappa}(x) \left(\frac{\partial y^{(\sigma)}}{\partial x_{\kappa}} \right)^2 dx \geq 4c_1 \|y^{(\sigma)}\|_{\mathfrak{S}}^2$$

в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ (здесь c_0, c_1 — произвольные положительные постоянные, зависящие только от $\text{meas } \mathfrak{S}, a_*$) и очевидное неравенство

$$2\tau(f(k), y^{(\sigma)}) \leq \tau c_0 \|y^{(\sigma)}\|_{\mathfrak{S}}^2 + \frac{\tau}{c_0} \|f(k)\|_{\mathfrak{S}}^2,$$

из соотношения (2.9) приходим к неравенству

$$\|Y(k+1)\|^2 + 8c_1 \|y^{(\sigma)}\|_{\mathfrak{S}}^2 \leq \|Y(k)\|^2 + c_0 \|y^{(\sigma)}\|_{\mathfrak{S}}^2 + \frac{\tau}{c_0} \|f(k)\|_{\mathfrak{S}}^2.$$

Выбирая в последнем $c_0 = 8c_1$, окончательно получаем оценку

$$\|Y(k+1)\|^2 \leq \|Y(k)\|^2 + \frac{\tau}{8c_1} \|f(k)\|_{\mathfrak{S}}^2. \quad (2.10)$$

Суммируя (2.10) по $k' = 1, 2, \dots, k$ ($k \leq K-1$), приходим к неравенству

$$\|Y(k+1)\| \leq \|Y(1)\| + \frac{1}{\sqrt{8c_1}} \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|_{\mathfrak{S}}^2 \right)^{1/2}$$

и следующему утверждению.

Теорема 2.2. Дифференциально-разностная схема (2.1) устойчива к малым изменениям начальных условий $y_0(x)$, $y_1(x)$ и правой части $f(k)$ $k = 1, 2, \dots, K$, если выполнены условия (2.3), (2.4) и $\sigma > \frac{1}{4}$. Для слабого решения дифференциально-разностной системы (2.1), (2.2) справедлива априорная оценка

$$\|Y(k+1)\| \leq \frac{1}{2}\|y_1 + y_0\|_{\mathfrak{Z}} + \sqrt{\sigma - \frac{1}{4}}\|y_1 - y_0\|_{\mathfrak{Z}} + \frac{1}{\sqrt{8c_1}} \left(\sum_{k'=1}^k \tau \|f(k')\|_{\mathfrak{Z}}^2 \right)^{1/2} \quad (2.11)$$

при всех $k = 1, 2, \dots, K-1$.

З а м е ч а н и е 2.2. Оценка (2.11) показывает сходимость дифференциально-разностной схемы (2.1) для $\sigma > \frac{1}{4}$ со скоростью $O(\tau^2)$.

З а м е ч а н и е 2.3. Утверждение теоремы 2.2 справедливо и для $\sigma \geq \frac{1}{4}$, тогда $\|Y\|$ является полунормой.

Полученные результаты переносятся на другую симметричную дифференциально-разностную схему в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2}[y(k+1) - 2y(k) + y(k-1)] &= \mathbf{L}y^{(\sigma)} = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \\ y(0) &= y_0(x), \quad y(1) = y_1(x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставляя в (2.12) $y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y} = y + \sigma\tau^2 y_{\bar{t}t}$ и учитывая равенство $y_{\bar{t}t} = \frac{1}{\tau^2}[y(k+1) - 2y(k) + y(k-1)]$, получим

$$(E + \sigma\tau^2 \mathbf{L})y_{\bar{t}t} + \mathbf{L}y = f(k)$$

и, окончательно, при $y = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{\tau^2}{2}y_{\bar{t}t}$

$$\mathbf{R}y_{\bar{t}t} + \frac{1}{2}\mathbf{L}(\hat{y} + \check{y}) = f(k), \quad \mathbf{R} = E + (\sigma - \frac{1}{2})\tau^2 \mathbf{L}. \quad (2.13)$$

Умножим соотношение (2.13) скалярно на $2\tau y_t = \tau(y_t + y_{\bar{t}}) = \hat{y} - \check{y}$:

$$(\mathbf{R}(\hat{y} - \check{y}), \hat{y} + \check{y}) + \frac{1}{2}(\mathbf{L}(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = 2\tau(f(k), y_t). \quad (2.14)$$

Лемма 2.1. Имеют место следующие соотношения:

- 1) $(\mathbf{R}(\hat{y} - \check{y}), \hat{y} + \check{y}) = (\mathbf{R}\hat{y}, \hat{y}) - (\mathbf{R}\check{y}, \check{y})$,
- 2) $(\mathbf{L}(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{L}(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2(\mathbf{L}y_t, y_t)] - \frac{1}{2}[(\mathbf{L}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2(\mathbf{L}y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое соотношение есть прямое следствие самосопряженности линейного оператора $\mathbf{R}$. Второе вытекает из следующих преобразований. Так как $\mathbf{R} = \mathbf{R}^*$, то

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}(v+z), v+z) + (\mathbf{L}(v-z), v-z) &= [(\mathbf{L}v, v) + 2(\mathbf{L}v, z) + (\mathbf{L}z, z)] \\ &+ [(\mathbf{L}v, v) - 2(\mathbf{L}v, z) + (\mathbf{L}z, z)] = 2[(\mathbf{L}v, v) + (\mathbf{L}z, z)] \end{aligned}$$

для любых элементов $v, z \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$. Отсюда

$$(\mathbf{L}v, v) + (\mathbf{L}z, z) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}(v+z), v+z) + \frac{1}{2}(\mathbf{L}(v-z), v-z). \quad (2.15)$$

Положив в (2.15) $v = \hat{y}, z = y$, получим

$$(\mathbf{L}(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{L}(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + (\mathbf{L}(\hat{y} - y), \hat{y} - y)] - \frac{1}{2}[(\mathbf{L}(y + \check{y}), y + \check{y}) + (\mathbf{L}(y - \check{y}), y - \check{y})].$$

Подставив в полученное соотношение выражения

$$(\mathbf{L}(\hat{y} - y), \hat{y} - y) = \tau^2(\mathbf{L}y_t, y_t), \quad (\mathbf{L}(y - \check{y}), y - \check{y}) = \tau^2(\mathbf{L}y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}),$$

получим второе соотношение, чем завершается доказательство леммы. $\square$

Соотношение (2.14) в силу утверждений леммы 2.1 преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}[(\mathbf{L}(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2((\mathbf{R} + \frac{\tau^2}{4}\mathbf{L})y_t, y_t)] \\ & - \frac{1}{4}[(\mathbf{L}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2((\mathbf{R} + \frac{\tau^2}{4}\mathbf{L})y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})] = 2\tau(f(k), y_{\bar{t}}) \end{aligned}$$

или, учитывая $\mathbf{R} = E + (\sigma - \frac{1}{2})\tau^2\mathbf{L}$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}[(\mathbf{L}(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2((E + (\sigma - \frac{1}{4})\tau^2\mathbf{L})y_t, y_t)] \\ & - \frac{1}{4}[(\mathbf{L}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2((E + (\sigma - \frac{1}{4})\tau^2\mathbf{L})y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})] = 2\tau(f(k), y_{\bar{t}}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Вводя составную норму

$$\|Y(k+1)\|^2 = \frac{1}{4}[(\mathbf{L}(y(k+1) + y(k)), y(k+1) + y(k)) + \tau^2((E + (\sigma - \frac{1}{4})\tau^2\mathbf{L})y_{t,k}, y_{t,k})],$$

из соотношения (2.16) получаем энергетическое тождество

$$\|Y(k+1)\|^2 = \|Y(k)\|^2 + 2\tau(f(k), y_{\bar{t}})$$

для трехслойной дифференциально-разностной схемы (2.12). Для схемы (2.12) остаются справедливыми утверждения теоремы 2.2: имеет место устойчивость для $\sigma > \frac{1}{4}$ и имеет место оценка, аналогичная (2.11).

Подход, представленный утверждениями теоремы 2.2, используется при получении условий существования и построения слабого решения эволюционных дифференциальных систем математической физики, соответствующих дифференциально-разностным схемам (2.1) и (2.12).

Введем пространства состояний $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ и $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$, $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$, $T < \infty$, для эволюционных дифференциальных систем.

О п р е д е л е н и е 2.3. Замыкание в норме

$$\|u\|_{\mathfrak{S}_T}^{1,0} = \left(\sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{S}_k \times (0, T)} (u^2 + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2) dx dt \right)^{1/2}$$

функций $u(x, t) \in L_2(\mathfrak{S})$ со следами $u(x, t_0) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$, $t_0 \in (0, T)$, непрерывно зависящими от t_0 в норме $W_2^1(\mathfrak{S})$, назовем пространством $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$.

О п р е д е л е н и е 2.4. Замыкание в норме

$$\|u\|_{\mathfrak{S}_T}^1 = \left(\sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{S}_k \times (0,T)} \left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sum_{\iota=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right)^2 \right) dx dt \right)^{1/2}$$

функций $u(x, t) \in L_2(\mathfrak{S})$ со следами $u(x, t_0) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$, $t_0 \in (0, T)$, непрерывно зависящими от t_0 в норме $W_2^1(\mathfrak{S})$, назовем пространством $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$, $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T) \subset \widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$.

Учитывая условия (2.9) и (2.10), рассмотрим в $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ эволюционную дифференциальную систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right) = F(x, t), \quad (2.17)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad (2.18)$$

а в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$ рассмотрим эволюционную дифференциальную систему

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right) = F(x, t), \quad (2.19)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x). \quad (2.20)$$

Здесь $F(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$ (элементы $v(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$ принадлежат $L_1(\mathfrak{S}_T)$, $\|v\|_{L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)} = \|v\|_{2,1,\mathfrak{S}_T} = \int_0^T \left(\int_{\mathfrak{S}} v^2(x, t) dx \right)^{1/2} dt$); $\varphi_0(x) = y_0(x)$, $\varphi_1(x) = y_1(x)$ в силу (2.4) и (2.15); $F(x, t)$ определяется по $f(x; k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$) из (2.1) или (2.12) соотношениями $f(x; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} F(x, t) dt \in L_2(\mathfrak{S})$, $k = 1, 2, \dots, K$.

$$\text{Обозначим через } \ell_T(u, \eta) = \int_{\mathfrak{S}_T} \sum_{\kappa, \iota=1}^n a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_\iota} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x_\kappa} dx dt.$$

О п р е д е л е н и е 2.5. Функция $u(x, t) \in \widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ называется слабым решением эволюционной дифференциальной системы (2.17), (2.18), если для нее справедливо тождество

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathfrak{S}_T} u(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(u, \eta) \\ & = \int_{\mathfrak{S}} \varphi_0(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\mathfrak{S}_T} F(x, t) \eta(x, t) dx dt \quad \forall \eta(x, t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T), \quad \eta(x, T) = 0. \end{aligned}$$

О п р е д е л е н и е 2.6. Функция $u(x, t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$, равная почти всюду $\varphi_0(x)$ при $t = 0$, называется слабым решением эволюционной дифференциальной системы (2.19), (2.20), если для нее справедливо тождество

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathfrak{S}_T} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(u, \eta) \\ & = \int_{\mathfrak{S}} \varphi_1(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\mathfrak{S}_T} F(x, t) \eta(x, t) dx dt \quad \forall \eta(x, t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T), \quad \eta(x, T) = 0. \end{aligned}$$

Приведем условия слабой разрешимости системы (2.17), (2.18). Затем аналогичное утверждение сформулируем для системы (2.19), (2.20).

Теорема 2.3. *При выполнении условий (2.3), (2.4) эволюционная дифференциальная система (2.17), (2.18) слабо разрешима в пространстве $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$.*

Доказательство. Рассуждения основаны на представлении приближенного решения дифференциальной системы (2.17), (2.18) функциями $y(k)$, $k = 2, \dots, K$, определяющими решение дифференциально-разностной системы (2.1) совместно с начальными данными

$$y(0) = y_0(x) \text{ и } y(1) = y_1(x).$$

Отметим, прежде всего, что дифференциально-разностная схема (2.1) является разностным аналогом эволюционной дифференциальной системы (2.17), (2.18). Определим функцию $u_K(x, t)$ следующими соотношениями:

$$u_K(x, t) = y(k), \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (2.21)$$

Ясно, что функция $u_K(x, t)$ является элементом пространства $\widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$, для нее справедливы оценки (2.11) в терминах составной нормы пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ из чего, как следствие, вытекает ограниченность $\|u_K\|_{\mathfrak{S}_T} + \|\frac{\partial u_K}{\partial x}\|_{\mathfrak{S}_T}$ в совокупности:

$$\begin{aligned} \|u_K\|_{\mathfrak{S}_T} + \|\frac{\partial u_K}{\partial x}\|_{\mathfrak{S}_T} &\leq C^*, \\ \|\frac{\partial u_K}{\partial x}\|_{\mathfrak{S}_T} &= \left(\int_{\mathfrak{S}_T} \sum_{\iota=1}^n \left(\frac{\partial u_K(x, t)}{\partial x_\iota} \right)^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

постоянная $C^* > 0$ не зависит от выбора τ .

Оценка (2.22) означает, что последовательность $\{u_K(x, t)\}$ содержит подпоследовательность $\{U_K(x, t)\}$, слабо сходящуюся к элементу $u(x, t) \in \widetilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$. Покажем, что функция $u(x, t)$ есть слабое решение эволюционной системы (2.17), (2.18), т. е. $u(x, t)$ удовлетворяет равенству в определении 2.5.

Подобно представлению (2.21) функции $u_K(x, t)$, определим функцию $F(x, t)$ соотношением

$$F_K(x, t) = f(x; k), \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Далее заметим, что в качестве произвольных функций $\eta(x, t)$, используемых в интегральном уравнении из определения 2.5, можно взять функции, принадлежащие пространству $C^1(\mathfrak{S}_{T+\tau})$ и удовлетворяющие соотношениям

$$\eta|_{\partial\mathfrak{G}_T} = 0, \quad \eta|_{t \in [T, T+\tau]} \equiv 0$$

(множество таких функций всюду плотно в $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$). По таким $\eta(x, t)$ определяются $\eta(k) = \eta(x, k\tau)$ ($k = 1, 2, \dots, K$) и $\eta_K(x, t)$ подобно $u_K(x, t)$, $F_K(x, t)$:

$$\eta_K(x, t) = \eta(k), \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

очевидно $\eta_K(x, t) \in \widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$. Аналогично определяются производные $\frac{\partial \eta_K(x, t)}{\partial x}$ и $\frac{\partial \eta_K(x, t)}{\partial t}$ функции $\eta_K(x, t)$, которые, как нетрудно убедиться, сходятся вместе с $\eta_K(x, t)$ к $\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}$,

$\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}$ и $\eta(x,t)$ равномерно в $\bar{\Gamma}_T$ при $K \rightarrow \infty$. Техническая часть доказательства осуществляется заменой в уравнении из определения 2.5 функций $u(x,t)$, $F(x,t)$, $\eta(x,t)$ на $u_K(x,t)$, $F_K(x,t)$, $\eta_K(x,t)$, доказательство завершается предельным переходом по подпоследовательности $\{U_K(x,t)\}$ в полученном уравнении. $\square$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему утверждению.

Теорема 2.4. *При выполнении условий (2.3), (2.4) эволюционная дифференциальная система (2.19), (2.20) слабо разрешима в пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$.*

3. Заключение.

В соболевском пространстве $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ функций с носителем в сетеподобной области из $\mathbb{R}^n$ рассмотрено однопараметрическое семейство симметричных трехслойных дифференциально-разностных схем. Установлены условия на параметр, правую часть и начальные данные дифференциально-разностных схем (2.1), при которых в терминах составных норм пространства $\widetilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ гарантировано свойство устойчивости слабых решений этих схем и для решений справедливы априорные оценки. Такие оценки полезны, прежде всего, при доказательстве теорем существования слабых решений эволюционных дифференциальных систем для параболического и гиперболического уравнений с пространственными переменными, изменяющимися в сетеподобной области, с последующим установлением условий единственности и непрерывной зависимости этих решений от начальных данных и правых частей систем. Последнее является также обоснованием известного в численном анализе метода полу-дискретизации по временной переменной (метод Е. Rothe [10]) для построения приближений слабых решений эволюционных систем. Полученные результаты эффективны в анализе задач оптимального управления [11, 12], стабилизации и устойчивости [13, 14].

References

- [1] В. Н. Хоанг, “Дифференциально-разностная краевая задача для параболической системы с распределенными параметрами на графе”, *Процессы управления и устойчивость*, **7:1** (2020), 127–132. [V. N. Hoang, “Differential-difference boundary value problem for a parabolic system with distributed parameters on a graph”, *Management Processes and Sustainability*, **7:1** (2020), 127–132 (In Russian)].
- [2] V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, V. N. Hoang, “Point control of differential-difference system with distributed parameters on the graph”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, **17:3** (2021), 277–286. [V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, V. N. Hoang, “Point control of differential-difference system with distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **17:3** (2021), 277–286 (In English)].
- [3] V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, “Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, **13:4** (2017), 431–443. [V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, “Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **13:4** (2017), 431–443 (In English)].
- [4] M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, “On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network”, *IOP Conference, Journal of Physics: Conference Series*, **1203**, IOP Publishing Ltd., 2019.
- [5] E. S. Baranovskii, V. V. Provotorov, M. A. Artemov, A. P. Zhabko, “Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results”, *Symmetry*, **13** (2021), Article ID 1300.

- [6] A. P. Zhabko, A. I. Shindyapin, V. V. Provotorov, “Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, **15**:4 (2019), 457–471. [A. P. Zhabko, A. I. Shindyapin, V. V. Provotorov, “Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **15**:4 (2019), 457–471 (In English)].
- [7] А. С. Волкова, В. В. Провоторов, “Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе”, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, № 3, 3–18; англ. пер.: A. S. Volkova, V. V. Provotorov, “Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary-value problems on a geometric graph”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **58**:3 (2014), 1–13.
- [8] А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, М., 1977, 656 с. [A. A. Samarsky, *Theory of Difference Schemes*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian), 656 pp.]
- [9] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973, 407 с. [O. A. Ladyzhenskaya, *Boundary-value Problems of Mathematical Physics*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russian), 407 pp.]
- [10] E. Rothe, “Thermal conductivity equations with non-constant coefficients”, *Math. Ann.*, 1931, № 104, 340–362.
- [11] L. N. Borisoglebskaya, V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, E. S. Kosinov, “Mathematical aspects of optimal control of transference processes in spatial networks”, *IOP Conference. V. 573, Series: Materials Science and Engineering*, IOP Publishing Ltd., 2019.
- [12] V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, “Synthesis of optimal boundary control of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, **13**:2 (2017), 209–224. [V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, “Synthesis of optimal boundary control of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **13**:2 (2017), 209–224 (In English)].
- [13] A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, O. R. Balaban, “Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, **15**:2 (2019), 187–198. [A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, O. R. Balaban, “Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, **15**:2 (2019), 187–198 (In English)].
- [14] S. L. Podvalny, V. V. Provotorov, E. S. Podvalny, “The controllability of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph”, *Procedia Computer Science*, **103** (2017), 324–330.

Информация об авторах

Провоторов Вячеслав Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: wwprov@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8761-7174>

Хоанг Ван Нгуен, аспирант, кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация.
 E-mail: fadded9x@gmail.com

Information about the authors

Vyacheslav V. Provotorov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Partial Differential Equations and Probability Theory Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: wwprov@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8761-7174>

Van N. Hoang, Post-Graduate Student. Partial Differential Equations and Probability Theory Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation.
 E-mail: fadded9x@gmail.com

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:

Провоторов Вячеслав Васильевич

E-mail: wwprov@mail.ru

Corresponding author:

Vyacheslav V. Provotorov

E-mail: wwprov@mail.ru

Поступила в редакцию 17.12.2021 г.

Поступила после рецензирования 24.02.2022 г.

Принята к публикации 10.03.2022 г.

Received 17.12.2021

Reviewed 24.02.2022

Accepted for press 10.03.2022

© Ченцов А.Г., Ченцов П.А., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-95-124

УДК 517.958, 530.145.6



Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ, Павел Александрович ЧЕНЦОВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»

620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Аннотация. Исследуются вопросы применения аппарата динамического программирования (ДП) в задаче маршрутизации с ограничениями и функциями стоимости, допускающими зависимость от списка заданий. Предполагается заданным бинарное разбиение множества заданий, т. е. выделены две группы заданий; задания первой группы должны быть выполнены раньше, чем начнется выполнение заданий второй группы. В каждой из групп могут присутствовать условия предшествования. Данная постановка может быть связана, в частности, с вариантом листовой резки зонами на машинах с ЧПУ, где две вышеупомянутые группы заданий образуют зоны, намеченные на этапе раскроя. В общем случае для построения оптимального решения применяется двухэтапный вариант ДП. Стыковка этапов осуществляется посредством отождествления терминальной компоненты критерия предваряющей задачи с функций экстремума финальной задачи. Склеивание оптимальных решений предваряющей и финальной задач доставляет, как показано в статье, оптимальное решение совокупной задачи. На основе теоретических конструкций построен алгоритм, реализованный на ПЭВМ; проведен вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: динамическое программирование, маршрут, условия предшествования

Благодарности: Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

Для цитирования: Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 95–124. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-95-124.

Dynamic programming in the routing problem: decomposition variant

Aleksandr G. CHENTSOV, Pavel A. CHENTSOV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin

19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Abstract. The questions of applying the dynamic programming (DP) apparatus to the routing problem with constraints and cost functions with the tasks list dependence are investigated. It is supposed that binary partition of the task set is given; tasks of the first task group must be fulfilled before the fulfillment of the task of the second group begins. In each of the groups, precedence conditions may be present. This setting can be applied in the case of sheet cutting on CNC machines, where two above-mentioned groups form zones planned at the cutting stage. In general case, for the optimal solution construction, the two-stage variant of DP is used. Linking two versions of DP is realized by identification of the criterion terminal component for service problem of the first group with extremum function connected with the second group. The connection of optimal solutions for above-mentioned two problems allows to construct an optimal solution for the initial joint problem. Based on the theoretical constructions algorithm realized on personal computer is constructed; computing experiment is realized.

Keywords: dynamic programming, route, precedence conditions

Acknowledgements: The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2021-1383).

Mathematics Subject Classification: 93C15, 49N30, 49N35.

For citation: Chentsov A.G., Chentsov P.A. Dinamicheskoye programmirovaniye v zadache marshrutizatsii: dekompozitsionnyy variant [Dynamic programming in the routing problem: decomposition variant]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 95–124. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-95-124. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Задачи маршрутизации возникают в самых различных областях человеческой деятельности. Имея в виду лишь некоторые конкретизации, среди инженерных приложений отметим сейчас только задачу, связанную с минимизацией дозовой нагрузки ликвидаторов при демонтаже радиационно опасных источников, а также задачу управления инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ. В последней задаче используется иногда вариант, связанный с выделением нескольких зон, определяющих совокупности заданий; работы, связанные с каждой зоной, должны выполняться последовательно в пределах этой зоны. В простейшем случае можно рассматривать ситуацию, когда имеются две зоны: предваряющая и финальная. Это означает, что сначала должны быть выполнены все работы по резке контуров первой группы, однозначно определяемой первой зоной, и только после этого следует приступить к выполнению заданий второй группы, т. е. обслуживать вторую зону. При этом, однако, некоторые ограничения оказываются перекрестными, т. е. действующими из одной зоны в другую. Так, например, в случае термической резки обстоит дело с требованием о том, чтобы возле каждой точки врезки было достаточно много сплошного металла. Итак, мы имеем дело с двумя взаимосвязанными подзадачами единой задачи маршрутизации с ограничениями и функциями стоимости, зависящими от (общего) списка заданий, выполненных или, напротив, не выполненных, на текущий момент времени.

Мы полагаем, что в каждой из двух упомянутых подзадач могут быть условия предшествования; в задаче, связанной с листовой резкой, они, в частности, отражают следующее естественное в инженерном отношении требование: у каждой детали, содержащей внутренние контура, резка последних должна предшествовать резке внешнего контура. При этом возникают адресные пары «отправитель»-«получатель» (терминология транспортных задач); очередность выполнения работ должна быть такой, чтобы для всякой адресной пары ее «отправитель» посещался бы раньше «получателя». Конечно, можно допустить и перекрестные условия предшествования. Однако, если в этом случае «отправитель» соответствует первой (предваряющей) подзадаче, а «получатель» – второй, то такое условие в рамках нашей совокупной задачи будет выполнено автоматически и поэтому какого-либо специального рассмотрения не требует. Если же имеется адресная пара, у которой «отправитель» соответствует второй задаче, а «получатель» – первой, то исходная задача неразрешима. Это говорит о том, что бинарное разбиение множества заданий должно подбираться с учетом определенных условий, исключающих заикливание маршрутов.

Уже вышеупомянутые обстоятельства показывают, что исследуемая постановка существенно отличается от своего прототипа – задачи коммивояжера или TSP (см. [1–3] и др.) в англоязычных источниках. Здесь же отметим исследования в области решения задачи коммивояжера с условиями предшествования или TSP-PC (см. [4, 5]), а также обобщенной задачи коммивояжера или GTSP (см. [6–8]); отметим также задачу GTSP с условиями предшествования или GTSP-PS в [9]. Отметим также естественную связь развиваемого подхода с конструкциями декомпозиций в задачах дискретной оптимизации (см. [10–12]).

Применяемые в статье варианты динамического программирования (ДП), восходящие к [13, разд. 3.2, 4.9], допускают естественную аналогию с [14] (в дискретной оптимизации чаще используется схема [15]). Мы ориентируемся на двухэтапный аналог схемы [13, разд. 4.9], в рамках которой (при наличии условий предшествования) удастся от-

казаться от построения всего массива значений функции Беллмана. На каждом этапе используются построения [16–19], но при этом учитывается взаимозависимость решений предваряющей и финальной задач; здесь существенную роль играет отмеченное в [17] свойство универсальности применяемой авторами процедуры ДП относительно выбора точки старта.

1. Общие понятия и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и др.); $\emptyset$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Любым двум объектам x и y сопоставляется их неупорядоченная пара $\{x; y\}$, т. е. множество, содержащее x , y и не содержащее никаких других элементов. Каждому объекту z сопоставляется синглетон $\{z\} \triangleq \{z; z\}$, содержащий $z : z \in \{z\}$. Множество является объектом. С учетом этого, следуя [20, с. 67], любым двум объектам x и y сопоставляем упорядоченную пару (УП) $(x, y) \triangleq \{\{x\}; \{x; y\}\}$ с первым элементом x и вторым элементом y . Для произвольной УП h через $\text{pr}_1(h)$ и $\text{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h , однозначно определяемые равенством $h = (\text{pr}_1(h), \text{pr}_2(h))$. Для любых трех объектов x , y и z в виде $(x, y, z) \triangleq ((x, y), z)$ имеем (см. [21, с. 17]) упорядоченный триплет с первым элементом x , вторым элементом y и третьим элементом z .

Каждому множеству H сопоставляем семейство $\mathcal{P}(H)$ всех подмножеств (п/м) H и семейство $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$ всех непустых п/м H , а также семейство $\text{Fin}(H)$ всех непустых конечных п/м H ; ясно, что $\text{Fin}(H) \subset \mathcal{P}'(H)$ и, если множество H конечно, то $\text{Fin}(H) = \mathcal{P}'(H)$. Используя стандартное понятие декартова произведения двух множеств, для любых трех множеств A , B и C полагаем, как обычно (см. [21, с. 17]) $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$, что согласуется с вышеупомянутым определением триплета.

Для любых непустых множеств S и T через T^S обозначаем (см. [20, с. 76]) множество всех отображений (функций) из S в T ; выражения $h \in T^S$ и $h : S \rightarrow T$ отождествимы. Значение отображения в точке обозначается традиционно: $g(s) \in T$ при $g \in T^S$ и $s \in S$. Для непустых множеств A , B и $C \in \mathcal{P}'(A)$, а также отображения $u \in B^A$ в виде

$$u^1(C) \triangleq \{u(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}'(B)$$

имеем образ C при действии u . Если S , T и R — три множества, $m \in R^{S \times T}$, $s \in S$ и $t \in T$, то, как обычно, $m(s, t) \triangleq m((s, t)) \in R$. Если же S , T , P и R — непустые множества, а $\psi \in R^{S \times T \times P}$, то при $s \in S$, $t \in T$ и $p \in P$, как обычно, $\psi(s, t, p) \triangleq \psi((s, t, p)) \in R$; если же $h \in S \times T$ и $l \in P$, то $(h, l) \in S \times T \times P$ и определено $\psi(h, l) = \psi(\text{pr}_1(h), \text{pr}_2(h), l) \in R$. В частности, упомянутые соглашения понадобятся в случаях $R = \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, и $R = \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} | 0 \leq \xi\}$ — ее неотрицательная полуось; $\mathcal{R}_+[H]$, где H — непустое множество, есть по определению множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на $H : \mathcal{R}_+[H] \triangleq (\mathbb{R}_+)^H$.

Пусть $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$; при $K \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем $K \oplus m \triangleq \{k + m : k \in K\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$. При $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 | (p \leq k) \& (k \leq q)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$$

(случай $\overline{p, q} = \emptyset$ не исключается; $\overline{1, m} = \{k \in \mathbb{N} | k \leq m\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ при $m \in \mathbb{N}$). Если K — непустое конечное множество, то через $|K|$ обозначаем мощность K , $|K| \in \mathbb{N}$; полагаем также $|\emptyset| \triangleq 0$. Для непустых множеств S и T через $(\text{Bi})[S; T]$ обозначаем множество всех биекций [22, с. 87] S на T ; ясно, что $(\text{Bi})[S; T] \subset T^S$. Если же K — непустое конечное множество, то $(\text{bi})[K] \triangleq (\text{Bi})[\overline{1}; |K|; K]$. Тогда [22, с. 87] при $m \in \mathbb{N}$ в виде $(\text{bi})[\overline{1, m}] = (\text{Bi})[\overline{1, m}; \overline{1, m}]$ имеем множество всех перестановок дискретного интервала $\overline{1, m}$; при $\alpha \in (\text{bi})[\overline{1, m}]$ в виде $\alpha^{-1} \in (\text{bi})[\overline{1, m}]$ имеем перестановку, обратную к α : при $k \in \overline{1, m}$

$$\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k.$$

В дальнейшем кортежи рассматриваем как отображения (функции), определенные на конечном п/м $\mathbb{N}_0$; для таких отображений определено, конечно, понятие образа п/м области определения. Часто используется индексная форма записи кортежей (семейство с индексом; см. [23, с. 11]). Как и принято в теории множеств (см. [20]), отношением называем п/м декартова произведения двух множеств; ясно, что элементами отношений являются УП.

2. Постановка задачи

В дальнейшем X — непустое множество с выделенным п/м $X^0 \in \text{Fin}(X)$ (элементы X^0 играют далее роль точек старта исследуемых процессов), $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \geq 2$, множества

$$M_1 \in \text{Fin}(X), \dots, M_{\mathbf{n}} \in \text{Fin}(X)$$

называем мегаполисами; кроме того, фиксируем следующие отношения

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \dots, \mathbb{M}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{P}'(M_{\mathbf{n}} \times M_{\mathbf{n}}) \quad (2.1)$$

(разумеется, все отношения в (2.1) конечны). В отношении $X^0, M_1, \dots, M_{\mathbf{n}}$ полагаем, что

$$(M_j \cap X^0 = \emptyset \ \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}) \& (M_p \cap M_q = \emptyset \ \forall p \in \overline{1, \mathbf{n}} \ \forall q \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \{p\}).$$

Тогда $\mathcal{M} \triangleq \{M_i : i \in \overline{1, \mathbf{n}}\}$ — семейство мегаполисов основной задачи; данные мегаполисы подлежат посещению из точки множества X^0 , которая может выбираться исполнителем. Для наших целей интересен случай достаточно больших значений $\mathbf{n}$; в этой связи полагаем заданным число

$$N \in \overline{2, \mathbf{n} - 2} \quad (2.2)$$

((2.2) накладывает, конечно, дополнительное условие на $\mathbf{n}$; во всяком случае $4 \leq \mathbf{n}$). В терминах N определяем семейства

$$\mathcal{M}_1 \triangleq \{M_i : i \in \overline{1, N}\}, \ \mathcal{M}_2 \triangleq \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1 = \{M_i : i \in \overline{N+1, \mathbf{n}}\}, \quad (2.3)$$

определяющие бинарное разбиение $\mathcal{M} : \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$. Каждое из семейств (2.3) содержит не менее двух мегаполисов. Полагаем при $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$, что

$$(M^{(j)} \triangleq M_{N+j}) \& (\mathbb{M}^{(j)} \triangleq \mathbb{M}_{N+j}); \quad (2.4)$$

ясно, что $M^{(j)} \in \text{Fin}(X)$ и $\mathbb{M}^{(j)} \in \mathcal{P}'(M^{(j)} \times M^{(j)})$. В дальнейшем рассматриваются как основная $\mathcal{M}$ -задача (о посещении мегаполисов семейства $\mathcal{M}$), так и частные $\mathcal{M}_1$ - и $\mathcal{M}_2$ -задачи, где требуется осуществить посещение мегаполисов из $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ соответственно;

$\mathcal{M}_1$ -задача является предваряющей, а $\mathcal{M}_2$ -задача – финальной. Полагаем, что в двух последних задачах возможны условия предшествования. Итак, фиксируем множества

$$\mathbf{K}_1 \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N}), \quad \mathbf{K}_2 \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n} - N} \times \overline{1, \mathbf{n} - N})$$

(случаи $\mathbf{K}_1 = \emptyset$ и $\mathbf{K}_2 = \emptyset$ не исключаются и отвечают отсутствию условий предшествования в соответствующей задаче); УП, являющиеся элементами $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$, называем адресными. У каждой адресной УП первый элемент называем отправителем, а второй – получателем. Полагаем в дальнейшем, что

$$\begin{aligned} &(\forall \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_1) \exists z^0 \in \mathbf{K}^0 : \text{pr}_1(z^0) \neq \text{pr}_2(z) \forall z \in \mathbf{K}^0) \\ &\&(\forall \tilde{\mathbf{K}}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_2) \exists \tilde{z}^0 \in \tilde{\mathbf{K}}^0 : \text{pr}_1(\tilde{z}^0) \neq \text{pr}_2(z) \forall z \in \tilde{\mathbf{K}}^0); \end{aligned} \quad (2.5)$$

условия (2.5) неограничительны (см. [13, часть 2]) с точки зрения практики и предотвращают заикливание маршрутов, определяемых в виде перестановок индексов. Из (2.5) следует, в частности, что

$$(\text{pr}_1(z) \neq \text{pr}_2(z) \forall z \in \mathbf{K}_1) \& (\text{pr}_1(\tilde{z}) \neq \text{pr}_2(\tilde{z}) \forall \tilde{z} \in \mathbf{K}_2). \quad (2.6)$$

Далее (2.5) и (2.6) используются без дополнительных пояснений. Пусть $\mathbb{P}_1 \triangleq (\text{bi})[\overline{1, N}]$ и $\mathbb{P}_2 \triangleq (\text{bi})[\overline{1, \mathbf{n} - N}]$. Тогда (см. [13, (2.1.5)] и [24, (4.4.6)]) имеем (с учетом (2.5)), что

$$\mathcal{A}_1 \triangleq \{ \alpha \in \mathbb{P}_1 | \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \forall z \in \mathbf{K}_1 \} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_1), \quad (2.7)$$

$$\mathcal{A}_2 \triangleq \{ \beta \in \mathbb{P}_2 | \beta^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \beta^{-1}(\text{pr}_2(z)) \forall z \in \mathbf{K}_2 \} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_2) \quad (2.8)$$

определяют множества всех допустимых по предшествованию маршрутов для предваряющей и финальной задач соответственно. Полагаем также $\mathbb{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, \mathbf{n}}]$; элементы множеств $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ и $\mathbb{P}$ называем маршрутами (точнее, маршрутами в $\mathcal{M}_1$ –, $\mathcal{M}_2$ – и $\mathcal{M}$ -задачах соответственно). Если $\alpha \in \mathbb{P}_1$ и $\beta \in \mathbb{P}_2$, то склеенный маршрут $\alpha \diamond \beta \in \mathbb{P}$ определяем условиями

$$((\alpha \diamond \beta)(k) \triangleq \alpha(k) \forall k \in \overline{1, N}) \& ((\alpha \diamond \beta)(l) \triangleq \beta(l - N) + N \forall l \in \overline{N + 1, \mathbf{n}}). \quad (2.9)$$

С учетом (2.7)–(2.9) получаем, в частности, что

$$\mathbf{P} \triangleq \{ \alpha \diamond \beta : \alpha \in \mathcal{A}_1, \beta \in \mathcal{A}_2 \} = \{ \text{pr}_1(z) \diamond \text{pr}_2(z) : z \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}); \quad (2.10)$$

элементы $\mathbf{P}$ – суть маршруты $\mathcal{M}$ -задачи, допустимые по предшествованию. С каждым маршрутом $\gamma \in \mathbf{P}$ и точкой $x \in X^0$ связываем пучок траекторий, на содержательном уровне характеризуемый схемой

$$x \longrightarrow (x_{1,1} \in M_{\gamma(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in M_{\gamma(1)}) \longrightarrow \dots \longrightarrow (x_{\mathbf{n},1} \in M_{\gamma(\mathbf{n})} \rightsquigarrow x_{\mathbf{n},2} \in M_{\gamma(\mathbf{n})}), \quad (2.11)$$

$$(x_{1,1}, x_{1,2}) \in \mathbb{M}_{\gamma(1)}, \dots, (x_{\mathbf{n},1}, x_{\mathbf{n},2}) \in \mathbb{M}_{\gamma(\mathbf{n})}. \quad (2.12)$$

Итак, посещение мегаполисов подчинено условиям принадлежности отношениям; см. (2.1). Это связано с необходимостью выполнения, при посещении мегаполисов, работ, именуемых внутренними (прямые стрелки в (2.11) характеризуют внешние перемещения, а волнистые – перемещения, связанные с внутренними работами). Для дальнейшего удобно свести (2.11), (2.12) к перемещениям УП:

$$(x, x) \longrightarrow (z_1 \in \mathbb{M}_{\gamma(1)}) \longrightarrow \dots \longrightarrow (z_{\mathbf{n}} \in \mathbb{M}_{\gamma(\mathbf{n})}). \quad (2.13)$$

В точном определении мы ориентируемся на (2.13). При $\mathfrak{Z} \triangleq (X \times X)^{\overline{0, \mathbf{n}}}$, $x \in X^0$ и $\gamma \in \mathbf{P}$

$$\mathcal{Z}_\gamma[x] \triangleq \{ (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z} \mid (z_0 = (x, x)) \& (z_\tau \in \mathbb{M}_{\gamma(\tau)} \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n}}) \} \in \text{Fin}(\mathfrak{Z}) \quad (2.14)$$

есть пучок траекторий, согласованных с маршрутом γ и стартовых из x (в редакции (2.13) – из (x, x)). Соответственно, при $x \in X^0$ элементы множества

$$\tilde{\mathbf{D}}[x] \triangleq \{ (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \mid (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x] \} \in \text{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z}) \quad (2.15)$$

рассматриваем как допустимые решения (ДР) в $(\mathcal{M}, x)$ -задаче, т. е. в $\mathcal{M}$ -задаче со стартом из x . Наконец,

$$\mathbf{D} \triangleq \{ (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0 \mid (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] \} \in \text{Fin}(\mathbf{P} \times \mathfrak{Z} \times X^0) \quad (2.16)$$

рассматриваем как множество всех допустимых маршрутных процессов в $\mathcal{M}$ -задаче.

В целях более экономного задания функций стоимости, реализующих аддитивный критерий, введем ряд дополнительных определений. Так, при $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$ имеем

$$(\mathfrak{M}_j \triangleq \{ \text{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}_j \} \in \text{Fin}(M_j)) \& (\mathbf{M}_j \triangleq \{ \text{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j \} \in \text{Fin}(M_j)); \quad (2.17)$$

ясно, что $\mathbb{M}_j \subset \mathfrak{M}_j \times \mathbf{M}_j$. Кроме того, вводим $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n}})$ и называем множества из $\mathfrak{N}$ списками (заданий). В виде

$$\bar{\mathbf{M}} \triangleq \bigcup_{j=1}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{M}_{N+j} \in \text{Fin}(X) \quad (2.18)$$

имеем множество терминальных состояний рассматриваемых маршрутных процессов. Наконец, получаем, что

$$(\mathbb{X} \triangleq \bigcup_{j=1}^{\mathbf{n}} \mathfrak{M}_j \in \text{Fin}(X)) \& (\mathbf{X} \triangleq (\bigcup_{j=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_j) \cup X^0 \in \text{Fin}(X)). \quad (2.19)$$

С учетом (2.17)–(2.19) фиксируем $\mathbf{n} + 2$ функции стоимости

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}], \dots, c_{\mathbf{n}} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_{\mathbf{n}} \times \mathfrak{N}], \quad f \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}]; \quad (2.20)$$

в (2.20) имеем функции стоимости, определяющие аддитивный критерий. Если $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbf{P}$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$, то при $\tau \in \overline{1, \mathbf{n}}$ определены значения

$$(\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{\tau-1}), \text{pr}_1(z_\tau), \gamma^1(\overline{\tau, \mathbf{n}})) \in \mathbb{R}_+) \& (c_{\gamma(\tau)}(z_\tau, \gamma^1(\overline{\tau, \mathbf{n}})) \in \mathbb{R}_+),$$

а также $f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}})) \in \mathbb{R}_+$ (учитываем, что $\gamma(\mathbf{n}) \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$). Напомним, что $\gamma^1(\overline{\tau, \mathbf{n}})$ есть образ дискретного промежутка $\overline{\tau, \mathbf{n}}$ при действии $\gamma \in \mathbf{P}$, где $\tau \in \overline{1, \mathbf{n}}$. С учетом этого имеем при $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbf{P}$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$, что

$$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{\gamma(t)}(z_t, \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}}))] + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}})) \in \mathbb{R}_+; \quad (2.21)$$

посредством (2.21) определен аддитивный критерий; значение (2.21) определено при $x \in X^0$ и $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$. С учетом этого рассматриваем при $x \in X^0$ следующую $(\mathcal{M}, x)$ -задачу:

$$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] \longrightarrow \min, \quad (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]; \quad (2.22)$$

задаче (2.22) сопоставляются значение (экстремум) $\tilde{V}[x]$ и множество $(\text{sol})[x]$ всех оптимальных решений:

$$\tilde{V}[x] \triangleq \min_{(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]} \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] \in \mathbb{R}_+, \quad (2.23)$$

$$(\text{sol})[x] \triangleq \{ (\gamma^0, (z_t^0)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] \mid \mathfrak{C}_{\gamma^0}[(z_t^0)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \tilde{V}[x] \} \in \text{Fin}(\tilde{\mathbf{D}}[x]).$$

В качестве основной мы рассматриваем следующую $\mathcal{M}$ -задачу:

$$\mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] \longrightarrow \min, \quad (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{D}; \quad (2.24)$$

задаче (2.24) сопоставляется значение (глобальный экстремум) $\mathbb{V}$ и множество $\mathbf{SOL}$ всех оптимальных маршрутных процессов:

$$\mathbb{V} \triangleq \min_{(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{D}} \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] \in \mathbb{R}_+, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{SOL} \triangleq \{ (\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x) \in \mathbf{D} \mid \mathfrak{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathbb{V} \} \in \text{Fin}(\mathbf{D}). \quad (2.26)$$

Наконец, с (2.23) мы связываем следующую задачу

$$\tilde{V}[x] \longrightarrow \min, \quad x \in X^0,$$

для которой значение (экстремум) совпадает с $\mathbb{V}$ (2.25) (см. (2.16)), а экстремальное множество есть

$$X_{\text{opt}}^0 \triangleq \{ x \in X^0 \mid \tilde{V}[x] = \mathbb{V} \} \in \mathcal{P}'(X^0).$$

З а м е ч а н и е 2.1. Множество (2.10) всех допустимых маршрутов можно было бы определить наложением на выбор перестановки $\gamma \in \mathbb{P}$ «перекрестных» условий предшествования. Точнее, можно было бы ввести новые адресные пары (i, j) , $i \in \overline{1, N}$, $j \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$. Тогда требование опережающего решения $\mathcal{M}_1$ -задачи в сравнении с $\mathcal{M}_2$ -задачей можно было бы реализовать в рамках постановки [17] (см. также идейные аналогии в [16, 18, 19]), для которой по схеме [17] можно было бы применить аппарат «глобального» ДП. Однако, в данном случае, имея целью решение задач маршрутизации ощутимой размерности, представляется предпочтительной идея декомпозиции, что, кстати, позволит получать оптимальное в $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ -смысле решение за приемлемое время; конструкция [17], применяемая при вышеупомянутых дополнительных «перекрестных» условиях предшествования, на этапе вычислительной реализации (для задач такой размерности) приводит, как правило, к существенным затруднениям.

В порядке заключительных замечаний данного раздела наметим на содержательном уровне схему предлагаемого алгоритма, базирующегося на идее декомпозиции исходной задачи с оптимизацией процесса стыковки подзадач, отвечающих семействам $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Итак, прежде всего мы, используя условия предшествования $\mathcal{M}_1$ -задачи, определяем некоторое, достаточное для всех наших целей, множество точек старта $\mathcal{M}_2$ -задачи. Затем, следуя идее [13, разд. 4.9.3], мы последовательно определяем семейства существенных списков заданий, слои пространства позиций и, наконец, слои функции Беллмана для $\mathcal{M}_2$ -задачи с нефиксированной точкой старта (здесь мы используем логику работы [17]). На последнем этапе построения слоев функции Беллмана находим зависимость экстремума $\mathcal{M}_2$ -задачи от точки старта. Эту зависимость используем в качестве терминальной компоненты критерия $\mathcal{M}_1$ -задачи. Тем самым завершается формирование системы условий

данной задачи, после чего, снова используя логику [13, разд. 4.9.3], осуществляем последовательное построение существенных списков заданий, слоев пространства позиций и, наконец, слоев функции Беллмана для $\mathcal{M}_1$ -задачи. В качестве наименьшего значения последнего слоя функции Беллмана (для данной задачи) мы, как будет показано, получаем глобальный экстремум исходной полной задачи, а также оптимальную точку старта. Для последней конструируем, используя слои функции Беллмана $\mathcal{M}_1$ -задачи с конкретизированной вышеупомянутым способом терминальной компонентой критерия, оптимальное решение в $\mathcal{M}_1$ -задаче с данной точкой старта. Получающуюся финишную точку принимаем в качестве стартовой для $\mathcal{M}_2$ -задачи и, используя слои функции Беллмана для $\mathcal{M}_2$ -задачи, определяем оптимальное решение последней при фиксации упомянутой стартовой точки. Наконец, склеиваем найденные частные решения (раздельно реализуем склеивание для маршрутов и для траекторий), получая оптимальное решение исходной «большой».

Заметим, что данный подход может применяться и в том случае, когда разбиение $\mathcal{M}$ на подсемейства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ отсутствует, т. е. решается задача в постановке [17]. Мы можем ввести здесь $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ искусственно, получая по вышеупомянутым правилам некоторую оптимизирующую процедуру (конечно, решение исходной «большой» может уже не быть оптимальным), которая может быть полезна для целей приближенного решения задачи большой размерности.

3. Некоторые представления, связанные с предваряющей задачей маршрутизации

Мы выделяем для специального рассмотрения задачу о посещении мегаполисов $M_1, \dots, M_N$, называемую предваряющей или $\mathcal{M}_1$ -задачей. Ее точная постановка будет приведена позднее, когда будет указана терминальная компонента соответствующего аддитивного критерия. Сейчас мы сосредоточимся на определениях и простейших свойствах ДР. Пусть $\mathfrak{Z}^\natural \triangleq (X \times X)^{\overline{0, N}}$. Тогда при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_1$

$$\mathcal{Z}_\alpha^\natural[x] \triangleq \{ (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{Z}^\natural | (z_0 = (x, x)) \& (z_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)} \ \forall \tau \in \overline{1, N}) \} \in \text{Fin}(\mathfrak{Z}^\natural) \quad (3.1)$$

есть множество всех траекторий $\mathcal{M}_1$ -задачи, стартующих из x и согласованных с маршрутом α . В целях большего согласования с [16–19] введем

$$(\mathbb{X}^\natural \triangleq \bigcup_{i=1}^N \mathfrak{M}_i \in \text{Fin}(X)) \& (\mathbf{X}^\natural \triangleq (\bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i) \cup X^0 \in \text{Fin}(X)),$$

$\mathbb{X}^\natural \subset \mathbb{X}$, $\mathbf{X}^\natural \subset \mathbf{X}$. Легко видеть, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x]$ и $\tau \in \overline{0, N}$

$$(\text{pr}_1(z_\tau) \in \mathbb{X}^\natural \cup X^0) \& (\text{pr}_2(z_\tau) \in \mathbf{X}^\natural).$$

Пусть теперь при $x \in X^0$ множество всех ДР $\mathcal{M}_1$ -задачи со стартом в x определяется как

$$\mathbf{D}^\natural[x] \triangleq \{ (\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^\natural | (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x] \} \in \text{Fin}(\mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^\natural). \quad (3.2)$$

Наконец, в интересах последующей оптимизации точки старта отметим, что

$$\mathbb{D}^\natural \triangleq \{ (\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}, x) \in \mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^\natural \times X^0 | (\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^\natural[x] \} \in \text{Fin}(\mathcal{A}_1 \times \mathfrak{Z}^\natural \times X^0). \quad (3.3)$$

Предложение 3.1. Если $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x]$, то

$$(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha}^{\natural}[x].$$

Доказательство следует из определений (см. (2.14), (3.1)).

Предложение 3.2. Если $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha}^{\natural}[x]$, то

$$\forall \beta \in \mathcal{A}_2 \exists (\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x] : z_{\tau} = \tilde{z}_{\tau} \quad \forall \tau \in \overline{0, N}.$$

Доказательство легко получается непосредственной комбинацией (2.14) и (3.1). Введем в рассмотрение множество

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \triangleq \{ \text{pr}_1(h) : h \in \mathbf{K}_1 \} \in \mathcal{P}(\overline{1, N}). \quad (3.4)$$

Тогда (см. [13, (4.9.9), предложение 4.9.3]) $\overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1 \neq \emptyset$ и, как следствие, определено (непустое) множество

$$X^{00} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1} \mathbf{M}_i \in \mathcal{P}'(\mathbf{X}^{\natural}); \quad (3.5)$$

в частности, $X^{00} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X})$.

Предложение 3.3. Если $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha}^{\natural}[x]$, то $\text{pr}_2(z_N) \in X^{00}$.

Доказательство. Согласно (3.1) $z_N \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}$ и, как следствие (см. (2.17)),

$$\text{pr}_2(z_N) \in \mathbf{M}_{\alpha(N)}, \quad (3.6)$$

где $\alpha(N) \in \overline{1, N}$. Покажем, что $\alpha(N) \notin \tilde{\mathbf{K}}_1$. Действительно, допустим противное: пусть $\alpha(N) \in \tilde{\mathbf{K}}_1$. В силу (3.4) можно указать $\mathbf{h} \in \mathbf{K}_1$ со свойством $\alpha(N) = \text{pr}_1(\mathbf{h})$. Тогда $\alpha^{-1}(\text{pr}_1(\mathbf{h})) = N$ и, как следствие (см. (2.7)), $N < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(\mathbf{h}))$. Последнее невозможно, т. к. $\alpha^{-1}(\text{pr}_2(\mathbf{h})) \in \overline{1, N}$. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно и на самом деле $\alpha(N) \notin \tilde{\mathbf{K}}_1$, т. е. $\alpha(N) \in \overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1$, а потому (см. (3.5)) $\mathbf{M}_{\alpha(N)} \subset X^{00}$. С учетом (3.6) получаем требуемое утверждение. $\square$

Итак, мы ввели ДР предваряющей задачи и указали некоторые простейшие их свойства. В следующем разделе рассмотрим финальную задачу, при решении которой будет сформирована терминальная компонента критерия предваряющей задачи.

4. Финальная задача маршрутизации (постановка и краткое обсуждение)

Рассмотрим постановку финальной задачи, связанной с обслуживанием мегаполисов из семейства $\mathcal{M}_2$, или, более кратко, $\mathcal{M}_2$ -задачи. Прежде всего условимся, что X^{00} (см. (3.5)) используется в ней в качестве множества точек старта. Далее полагаем при $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ наряду с (2.4), что

$$(\mathfrak{M}^{(j)} \triangleq \mathfrak{M}_{N+j}) \& (\mathbf{M}^{(j)} \triangleq \mathbf{M}_{N+j}), \quad (4.1)$$

получая при этом в силу (2.17), что

$$(\mathfrak{M}^{(j)} = \{ \text{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}^{(j)} \} \in \text{Fin}(M^{(j)})) \& (\mathbf{M}^{(j)} = \{ \text{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}^{(j)} \} \in \text{Fin}(M^{(j)})). \quad (4.2)$$

Кроме того, введем аналоги множеств (2.19) в следующем виде:

$$(\mathbb{X}^* \triangleq \bigcup_{j=1}^{n-N} \mathfrak{M}^{(j)} \in \text{Fin}(X)) \& (\mathbf{X}^* \triangleq (\bigcup_{j=1}^{n-N} \mathbf{M}^{(j)} \cup X^{00} \in \text{Fin}(X)). \quad (4.3)$$

Заметим, что согласно (2.19), (3.5) и (4.3) $\mathbb{X}^* \subset \mathbb{X}$ и $\mathbf{X}^* \subset \mathbf{X}$. В качестве допустимых маршрутов $\mathcal{M}_2$ -задачи используем перестановки из $\mathcal{A}_2$. Пусть $\mathfrak{Z}^* \triangleq (X \times X)^{\overline{0, n-N}}$. Если $x \in X^{00}$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$, то

$$\mathcal{Z}_\beta^*[x] \triangleq \{ (z_t)_{t \in \overline{0, n-N}} \in \mathfrak{Z}^* \mid (z_0 = (x, x)) \& (z_t \in \mathbb{M}^{(\beta(t))} \ \forall t \in \overline{1, n-N}) \} \in \text{Fin}(\mathfrak{Z}^*) \quad (4.4)$$

есть пучок траекторий $\mathcal{M}_2$ -задачи, согласованных с β и стартующих из x (точнее, из (x, x)); заметим, что при $(\tilde{z}_t)_{t \in \overline{0, n-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$ и $\tau \in \overline{0, n-N}$

$$\text{pr}_2(\tilde{z}_\tau) \in \mathbf{X}^*. \quad (4.5)$$

Если теперь $\tau \in \overline{1, n-N}$, то (см. (2.19), (4.4)) $\text{pr}_1(\tilde{z}_\tau) \in \mathbb{X}$, а потому (см. (2.21), (4.5)) при $K \in \mathfrak{N}$ определено значение

$$\mathbf{c}(\text{pr}_2(\tilde{z}_{\tau-1}), \text{pr}_1(\tilde{z}_\tau), K) \in \mathbb{R}_+; \quad (4.6)$$

кроме того, в силу (2.21) и (4.4) имеем, что $c_{\beta(\tau)}(\tilde{z}_\tau, K) \in \mathbb{R}_+$. Свойства (4.5), (4.6) потребуются при построении аддитивного критерия $\mathcal{M}_2$ -задачи. При $x \in X^{00}$ имеем в виде

$$\mathbf{D}^*[x] \triangleq \{ (\beta, (z_t)_{t \in \overline{0, n-N}}) \in \mathcal{A}_2 \times \mathfrak{Z}^* \mid (z_t)_{t \in \overline{0, n-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x] \} \in \text{Fin}(\mathcal{A}_2 \times \mathfrak{Z}^*) \quad (4.7)$$

множество всех ДР $\mathcal{M}_2$ -задачи со стартом в x . В связи с последующим определением функций стоимости данной задачи отметим, что

$$\mathfrak{N}^* \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, n-N})$$

есть семейство всех списков заданий для $\mathcal{M}_2$ -задачи. Если $K \in \mathfrak{N}^*$, то

$$K \oplus N = \{ k + N : k \in K \} \in \mathfrak{N}. \quad (4.8)$$

При $x \in X^{00}$, $\beta \in \mathcal{A}_2$, $(z_t)_{t \in \overline{0, n-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\tau \in \overline{1, n-N}$ определено значение

$$\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{\tau-1}), \text{pr}_1(z_\tau), K) \in \mathbb{R}_+,$$

поскольку $\text{pr}_2(z_{\tau-1}) \in \mathbf{X}$ и $\text{pr}_1(z_\tau) \in \mathbb{X}$. Кроме того, при $j \in \overline{1, n-N}$ имеем $N + j \in \overline{N+1, n}$ и $\mathbb{M}_{N+j} = \mathbb{M}^{(j)}$, а тогда при $z \in \mathbb{M}^{(j)}$ определено значение $c_{N+j}(z, K) \in \mathbb{R}_+$, где $K \in \mathfrak{N}$. Как следствие при $x \in X^{00}$, $K \in \mathfrak{N}^*$, $\beta \in \mathcal{A}_2$, $(z_t)_{t \in \overline{0, n-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$ и $\tau \in \overline{1, n-N}$ определено значение

$$c_{N+\beta(\tau)}(z_\tau, K \oplus N) \in \mathbb{R}_+,$$

где учитывается, что согласно (4.2) и (4.4) $z_\tau \in \mathbb{M}_{N+\beta(\tau)}$. Наконец, при $x \in X^{00}$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, n-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$ имеем $z_{n-N} \in \mathbb{M}_{N+\beta(n-N)}$ и, в частности, $\text{pr}_2(z_{n-N}) \in \bar{\mathbb{M}}$ (см. (2.18)), а тогда определено значение $f(\text{pr}_2(z_{n-N})) \in \mathbb{R}_+$. С учетом этих рассуждений при $x \in X^{00}$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, n-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$ определена сумма

$$\sum_{t=1}^{n-N} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, n-N}) \oplus N) + c_{N+\beta(t)}(z_t, \beta^1(\overline{t, n-N}) \oplus N)] + f(\text{pr}_2(z_{n-N})). \quad (4.9)$$

В интересах представления (4.9) введем специальные функции стоимости $\mathcal{M}_2$ -задачи. Итак, полагаем, что $\mathbf{c}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^* \times \mathbb{X}^* \times \mathfrak{N}^*]$ определяется правилом (см. (4.8))

$$\mathbf{c}^*(x, y, K) \triangleq \mathbf{c}(x, y, K \oplus N) \quad \forall x \in \mathbf{X}^* \quad \forall y \in \mathbb{X}^* \quad \forall K \in \mathfrak{N}^*. \quad (4.10)$$

Далее, при $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ определяем функцию $c_j^* \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^{(j)} \times \mathfrak{N}^*]$ правилом (см. (4.8))

$$c_j^*(z, K) \triangleq c_{N+j}(z, K \oplus N) \quad \forall z \in \mathbb{M}^{(j)} \quad \forall K \in \mathfrak{N}^*. \quad (4.11)$$

В отношении f напомним только, что согласно (2.18) и (4.1)

$$\bar{\mathbf{M}} = \bigcup_{j=1}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{M}^{(j)} \in \text{Fin}(X)$$

и $f \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}]$. С учетом (4.4), (4.5) и (4.9)–(4.11) получаем теперь, что при $x \in X^{00}$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_\beta^*[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] &\triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} [\mathbf{c}^*(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N})) \\ &+ c_{\beta(t)}^*(z_t, \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}))] + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}-N})) = \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N) \\ &+ c_{N+\beta(t)}(z_t, \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}-N}) \oplus N)] + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}-N})). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Итак, мы получили кортеж функций стоимости $\mathcal{M}_2$ -задачи в виде

$$\mathbf{c}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^* \times \mathbb{X}^* \times \mathfrak{N}^*], \quad c_1^* \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^{(1)} \times \mathfrak{N}^*], \quad \dots, \quad c_{\mathbf{n}-N}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}^{(\mathbf{n}-N)} \times \mathfrak{N}^*], \quad f \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}],$$

в терминах которого определен аддитивный критерий (4.12). Ясно, что при $x \in X^{00}$ посредством (4.12) каждому ДР $(\beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x]$ сопоставлено неотрицательное число. Тогда при $x \in X^{00}$ определяем $(\mathcal{M}_2, x)$ -задачу в виде

$$\mathfrak{C}_\beta^*[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] \longrightarrow \min, \quad (\beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x];$$

сопоставляем этой задаче значение $\tilde{V}^*[x]$ и (непустое конечное) множество $(\text{sol})^*[x]$ всех ее оптимальных решений:

$$\tilde{V}^*[x] \triangleq \min_{(\beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x]} \mathfrak{C}_\beta^*[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] \in \mathbb{R}_+,$$

$$(\text{sol})^*[x] \triangleq \{ (\beta, (z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[x] \mid \mathfrak{C}_\beta^*[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = \tilde{V}^*[x] \} \in \text{Fin}(\mathbf{D}^*[x]). \quad (4.13)$$

В $\mathcal{M}_2$ -задаче мы не будем оптимизировать точку старта, ограничиваясь определением зависимости $\tilde{V}^*[\cdot] \in \mathcal{R}_+[X^{00}]$ следующего вида

$$x \longmapsto \tilde{V}^*[x] : X^{00} \longrightarrow \mathbb{R}_+. \quad (4.14)$$

Посредством этой зависимости будет (в существенной части) определена терминальная компонента аддитивного критерия $\mathcal{M}_1$ -задачи, чем и будет определяться связка предвзяющей и финальной задач.

5. Решение $\mathcal{M}_2$ -задачи (динамическое программирование)

Итак, в целях привязки $\mathcal{M}_2$ -задачи к (предваряющей) $\mathcal{M}_1$ -задаче нам следует указать прежде всего работоспособную процедуру построения функции (4.14). Эта процедура соответствует [17] и восходит к [13, разд. 4.9]. Мы рассмотрим ее в краткой форме, имея целью получить алгоритм на функциональном уровне и выделяя при этом его основные этапы. В дальнейшем используем отображение $\mathbf{I}^*$, действующее в $\mathfrak{N}^*$ по правилу: при $K \in \mathfrak{N}^*$

$$\mathbf{I}^*(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z) : z \in \Xi^*[K]\},$$

где $\Xi^*[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K}_2 \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K)\}$; данное определение соответствует [13, (2.2.27), (2.2.28)]. При $t \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ в виде $\{t\} \in \mathfrak{N}^*$ имеем неподвижную точку $\mathbf{I}^* : \mathbf{I}^*(\{t\}) = \{t\}$.

1) **Построение существенных списков заданий.** Следуя [13, (4.9.1)], полагаем, что

$$\mathfrak{S}^* \triangleq \{K \in \mathfrak{N}^* \mid \forall z \in \mathbf{K}_2 \ (\text{pr}_1(z) \in K) \implies (\text{pr}_2(z) \in K)\}. \quad (5.1)$$

Множества — элементы семейства (5.1) — называем существенными (в $\mathcal{M}_2$ -задаче) списками заданий. При $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ полагаем, что $\mathfrak{S}_s^* \triangleq \{K \in \mathfrak{S}^* \mid s = |K|\}$. Тогда $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N}^* = \{\overline{1, \mathbf{n} - N}\}$ (синглетон) и $\mathfrak{S}_1^* \triangleq \{\{t\} : t \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_2\}$, где

$$\tilde{\mathbf{K}}_2 \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}_2\}.$$

При этом $\mathfrak{S}_1^* \neq \emptyset$ (см. [13, предложение 4.9.2]); кроме того,

$$\mathfrak{S}_{s-1}^* = \{K \setminus \{t\} : K \in \mathfrak{S}_s^*, t \in \mathbf{I}^*(K)\} \quad \forall s \in \overline{2, \mathbf{n} - N}. \quad (5.2)$$

Для построения всех существенных списков используем очевидную рекуррентную процедуру

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N}^* \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N-1}^* \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathfrak{S}_1^*. \quad (5.3)$$

Регулярный шаг процедуры (5.3) реализуется правилом (5.2).

2) **Построение слоев пространства позиций.** Позициями в $\mathcal{M}_2$ -задаче называем УП (x, K) , где $x \in X$ и $K \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n} - N})$. Введем в рассмотрение множества $D_0^*, D_1^*, \dots, D_{\mathbf{n}-N}^*$ в пространстве позиций, называемые слоями. Для определения D_0^* введем

$$\tilde{\mathcal{M}}^* \triangleq \bigcup_{j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_2} \mathbf{M}^{(j)};$$

тогда слой D_0^* определяется следующим правилом: $D_0^* \triangleq \{(x, \emptyset) : x \in \tilde{\mathcal{M}}^*\}$. Кроме того, полагаем, что $D_{\mathbf{n}-N}^* \triangleq \{(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) : x \in X^{00}\}$. Итак, определены крайние слои.

Если $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N - 1}$ и $K \in \mathfrak{S}_s^*$, то последовательно определяем (см. [17–19]) множества

$$\mathcal{J}_s^* \triangleq \{j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}_{s+1}^*\},$$

$$\mathcal{M}_s^*[K] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s^*(K)} \mathbf{M}^{(j)},$$

$$\mathbb{D}_s^*[K] \triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s^*[K]\}.$$

Тогда полагаем при $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N - 1}$, что слой D_s^* имеет вид

$$D_s^* \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s^*} \mathbb{D}_s^*[K]. \quad (5.4)$$

Итак (см. (5.4)), мы получили все слои $D_0^*, D_1^*, \dots, D_{\mathbf{n}-N}^*$; каждый из этих слоев есть непустое множество (см. [13, предложение 4.9.3]). При этом

$$(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^* \quad \forall s \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \quad \forall (x, K) \in D_s^* \quad \forall j \in \mathbf{I}^*(K) \quad \forall z \in \mathbb{M}^{(j)}; \quad (5.5)$$

см. [17, (4.11)]. Свойство (5.5) показывает, что, осуществляя выбор индекса с учетом действия $\mathbf{I}^*$ и произвольную УП из соответствующего отношения, мы сохраняемся в слоях пространства позиций.

3) **Построение слоев функции Беллмана в $\mathcal{M}_2$ -задаче.** Мы следуем [16–19] и конструируем слои $v_0^*, v_1^*, \dots, v_{\mathbf{n}-N}^*$ функции Беллмана в виде сужений этой функции на слои пространства позиций. Этим построениям можно придать [17] смысл рекуррентной процедуры. Сначала определяем $v_0^* \in \mathcal{R}_+[D_0^*]$ посредством правила, учитывающего структуру D_0^* :

$$v_0^*(x, \emptyset) \triangleq f(x) \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{M}}^*.$$

Пусть теперь $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ и функция $v_{s-1}^* \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}^*]$ уже построена; тогда полагаем, что $v_s^* \in \mathcal{R}_+[D_s^*]$ имеет вид (см. (5.5))

$$v_s^*(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}^*(K)} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} [\mathbf{c}^*(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j^*(z, K) + v_{s-1}^*(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \quad \forall (x, K) \in D_s^*. \quad (5.6)$$

Таким образом, определена рекуррентная процедура

$$v_0^* \longrightarrow v_1^* \longrightarrow \dots \longrightarrow v_{\mathbf{n}-N}^*, \quad (5.7)$$

для которой сечение финальной функции совпадает с (4.14):

$$\tilde{V}^*[x] = v_{\mathbf{n}-N}^*(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \quad \forall x \in X^{00}. \quad (5.8)$$

Теперь, располагая функцией $\tilde{V}^*[\cdot]$, мы приступаем к строгой постановке и решению предваряющей $\mathcal{M}_1$ -задачи. Заметим, что нужное ДР $\mathcal{M}_2$ -задачи (маршрут и траекторию) мы будем строить после решения $\mathcal{M}_1$ -задачи, когда будет, в частности, конкретизирован выбор точки старта из X^{00} .

6. Постановка $\mathcal{M}_1$ -задачи и вопросы склеивания траекторий

Полагаем сейчас выполненными построения предыдущего раздела и, в частности, считаем известной функцию $\tilde{V}^*[\cdot]$ (см. (5.8)). Данную функцию используем при определении терминальной компоненты критерия $\mathcal{M}_1$ -задачи. А именно, мы полагаем, что функция

$$\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[\bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i]$$

определяется следующими выражениями:

$$(\mathbf{f}(x) \triangleq v_{\mathbf{n}-N}^*(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \quad \forall x \in X^{00}) \& (\mathbf{f}(x) \triangleq 0 \quad \forall x \in (\bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i) \setminus X^{00}). \quad (6.1)$$

Доопределение $\tilde{V}^*[\cdot]$ (см. второе выражение в (6.1)) несущественно и делается с тем только, чтобы схема построения соответствовала [17–19]. Важно, что (см. (5.8), (6.1))

$$\mathbf{f}(x) = \tilde{V}^*[x] \quad \forall x \in X^0 \quad (6.2)$$

(здесь полезно учитывать предложение 3.3). Полагаем, что $\mathfrak{N}^{\natural} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$. С учетом этого вводим функции (см. раздел 3.)

$$\mathbf{c}^{\natural} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^{\natural} \times \mathbb{X}^{\natural} \times \mathfrak{N}^{\natural}], \quad c_1^{\natural} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_1 \times \mathfrak{N}^{\natural}], \quad \dots, \quad c_N^{\natural} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_N \times \mathfrak{N}^{\natural}].$$

Итак, полагаем при $z \in \mathbf{X}^{\natural} \times \mathbb{X}^{\natural}$ и $K \in \mathfrak{N}^{\natural}$

$$\mathbf{c}^{\natural}(z, K) \triangleq \mathbf{c}(z, K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \quad (6.3)$$

(разумеется, $\mathbf{c}^{\natural}(z, K) = \mathbf{c}^{\natural}(\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z), K)$; см. раздел 1.). Далее, при $j \in \overline{1, N}$ полагаем, что $c_j^{\natural} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{M}_j \times \mathfrak{N}^{\natural}]$ определяется правилом

$$c_j^{\natural}(z, K) \triangleq c_j(z, K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \quad \forall z \in \mathbb{M}_j \quad \forall K \in \mathfrak{N}^{\natural}. \quad (6.4)$$

Итак, $(\mathbf{c}^{\natural}, c_1^{\natural}, \dots, c_N^{\natural}, \mathbf{f})$ есть стандартный набор функций стоимости $\mathcal{M}_1$ -задачи. С учетом (6.3), (6.4) получаем при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha}^{\natural}[x]$, что (см. (3.1))

$$\mathfrak{C}_{\alpha}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] \triangleq \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}^{\natural}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t, N})) + c_{\alpha(t)}^{\natural}(z_t, \alpha^1(\overline{t, N}))] + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_N)). \quad (6.5)$$

Из (6.3)–(6.5) вытекает, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha}^{\natural}[x]$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\alpha}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] &= \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \\ &\quad + c_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}})] + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_N)). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Если $x \in X^0$, то $(\mathcal{M}_1, x)$ -задачу задаем в следующем виде:

$$\mathfrak{C}_{\alpha}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] \longrightarrow \min, \quad (\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x]$$

(см. (3.2)). При $x \in X^0$ данной задаче сопоставляется значение

$$V^{\natural}[x] \triangleq \min_{(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x]} \mathfrak{C}_{\alpha}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] \in \mathbb{R}_+ \quad (6.7)$$

и непустое множество всех ее оптимальных решений

$$(\text{sol})^{\natural}[x] \triangleq \{ (\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x] \mid \mathfrak{C}_{\alpha}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] = V^{\natural}[x] \} \in \text{Fin}(\mathbf{D}^{\natural}[x]).$$

Введем теперь в рассмотрение «полную» $\mathcal{M}_1$ -задачу, используя (3.3):

$$\mathfrak{C}_{\alpha}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] \longrightarrow \min, \quad (\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}, x) \in \mathbb{D}^{\natural}. \quad (6.8)$$

Ее значением является экстремум критерия (6.5), (6.6):

$$\mathbb{V}^{\natural} \triangleq \min_{(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}, x) \in \mathbb{D}^{\natural}} \mathfrak{C}_{\alpha}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] = \min_{x \in X^0} \min_{(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x]} \mathfrak{C}_{\alpha}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] = \min_{x \in X^0} V^{\natural}[x] \in \mathbb{R}_+. \quad (6.9)$$

Соответственно, множество всех оптимальных решений задачи (6.8) есть

$$\mathbf{SOL}^{\natural} \triangleq \{ (\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}, x) \in \mathbb{D}^{\natural} | \mathfrak{C}_{\alpha}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] = \mathbb{V}^{\natural} \} \in \text{Fin}(\mathbb{D}^{\natural}). \quad (6.10)$$

Наконец, выделяем для отдельного рассмотрения задачу оптимизации точки старта:

$$V^{\natural}[x] \longrightarrow \min, \quad x \in X^0. \quad (6.11)$$

В силу (6.9) $\mathbb{V}^{\natural}$ – значение (экстремум) задачи (6.11), а

$$X_{\text{opt}}^0 \triangleq \{x \in X^0 | V^{\natural}[x] = \mathbb{V}^{\natural}\} \in \text{Fin}(X^0)$$

есть множество всех оптимальных точек старта $\mathcal{M}_1$ -задачи. Учтем предложение 3.3 и (6.2). Тогда при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha}^{\natural}[x]$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\alpha}^{\natural}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] &= \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \\ &\quad + c_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}})] + \tilde{V}^*[\text{pr}_2(z_N)]; \end{aligned}$$

см. (6.2), (6.6). Отметим очевидное свойство: если $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $t \in \overline{1, N}$, то (см. (2.9))

$$(\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}}) = \alpha^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}. \quad (6.12)$$

Отметим некоторые положения, касающиеся вопросов склеивания траекторий. Полагаем, что при $\mathbf{z}' \in \mathfrak{Z}^{\natural}$ и $\mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}^*$ кортеж $\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'' \in \mathfrak{Z}$ определяется правилом

$$((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(\tau) \triangleq \mathbf{z}'(\tau) \quad \forall \tau \in \overline{0, N}) \& ((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(\tau) \triangleq \mathbf{z}''(\tau - N) \quad \forall \tau \in \overline{N+1, \mathbf{n}}). \quad (6.13)$$

Из определений (см. (6.13)) легко следует положение о склеиваемости.

Предложение 6.4. Если $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$, $\mathbf{z}' \in \mathcal{Z}_{\alpha}^{\natural}[x]$ и $\mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_{\beta}^*[\text{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]$, то

$$\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x].$$

Кроме того, из предложений 3.1 и 3.3 вытекает, что при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x]$

$$\text{pr}_2(z_N) \in X^{00}.$$

Предложение 6.5. Пусть $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1$, $\beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x]$. Пусть, кроме того, кортеж $(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathfrak{Z}^*$ обладает представлением

$$(z_0^* \triangleq (\text{pr}_2(z_N), \text{pr}_2(z_N))) \& (z_t^* \triangleq z_{t+N} \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}-N}).$$

Тогда данный кортеж является траекторией $\mathcal{M}_2$ -задачи, стартовой из $\text{pr}_2(z_N)$ и согласованной с β :

$$(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_{\beta}^*[\text{pr}_2(z_N)].$$

Доказательство следует из определений.

7. Решение $\mathcal{M}_1$ -задачи по методу динамического программирования

Вернемся к задаче (6.8), которая представляет собой стандартную в смысле [17] экстремальную задачу, оперирующую с кортежем $(c^\natural, c_1^\natural, \dots, c_N^\natural, \mathbf{f})$ функций стоимости. Применяемая ниже схема решения на основе ДП соответствует [16–19]. Совсем кратко перечислим основные этапы процедуры, подобные отмеченным в разделе 5. для $\mathcal{M}_2$ -задачи.

1) **Построение существенных списков заданий.** Полагаем, что $\mathfrak{N}^\natural \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$ (семейство всех непустых п/м $\overline{1, N}$), и определяем отображение $\mathbf{I}^\natural$, действующее в $\mathfrak{N}^\natural$ по следующему правилу: при $K \in \mathfrak{N}^\natural$

$$\mathbf{I}^\natural(K) \triangleq K \setminus \{ \text{pr}_2(z) : z \in \Xi^\natural[K] \},$$

где $\Xi^\natural[K] \triangleq \{ z \in \mathbf{K}_1 \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K) \}$. Отметим, что $\mathbf{I}^\natural(\{t\}) = \{t\} \ \forall t \in \overline{1, N}$. В виде

$$\mathfrak{S}^\natural \triangleq \{ K \in \mathfrak{N}^\natural \mid \forall z \in \mathbf{K}_1 \ (\text{pr}_1(z) \in K) \implies (\text{pr}_2(z) \in K) \}$$

имеем семейство всех существенных списков $\mathcal{M}_1$ -задачи. Полагаем, что

$$\mathfrak{S}_s^\natural \triangleq \{ K \in \mathfrak{S}^\natural \mid s = |K| \} \ \forall s \in \overline{1, N}. \quad (7.1)$$

Легко видеть, что при $\tilde{\mathbf{K}}_1 \triangleq \{ \text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}_1 \}$ реализуется (см. (7.1)) равенство

$$\mathfrak{S}_1^\natural = \{ \{t\} : t \in \overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1 \},$$

кроме того, $\mathfrak{S}_N^\natural = \{\overline{1, N}\}$ (одноэлементное семейство). Наконец,

$$\mathfrak{S}_{s-1}^\natural = \{ K \setminus \{j\} : K \in \mathfrak{S}_s^\natural, j \in \mathbf{I}^\natural(K) \} \ \forall s \in \overline{2, N}. \quad (7.2)$$

На основе (7.2) реализуется рекуррентная процедура $\mathfrak{S}_N^\natural \longrightarrow \mathfrak{S}_{N-1}^\natural \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathfrak{S}_1^\natural$, в основе которой находится (7.2).

2) **Построение слоев пространства позиций.** Позицией в $\mathcal{M}_1$ -задаче называем УП (x, K) , где $x \in X$ и $K \in \mathcal{P}(\overline{1, N})$. Действуя по аналогии с разделом 5., конструируем множества $D_0^\natural, D_1^\natural, \dots, D_N^\natural$, именуемые слоями пространства позиций. Полагаем

$$(D_0^\natural \triangleq \{ (x, \emptyset) : x \in X^{00} \}) \& (D_N^\natural \triangleq \{ (x, \overline{1, N}) : x \in X^0 \}), \quad (7.3)$$

получая крайние слои. Если $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathfrak{S}_s^\natural$, то определяем последовательно

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_s^\natural(K) &\triangleq \{ j \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathfrak{S}_{s+1}^\natural \}, \quad \mathcal{M}_s^\natural(K) \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s^\natural(K)} \mathbf{M}_j, \\ \mathbb{D}_s^\natural[K] &\triangleq \{ (x, K) : x \in \mathcal{M}_s^\natural(K) \}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

В терминах (7.4) определяем при $s \in \overline{1, N-1}$ слой $D_s^\natural$ правилом

$$D_s^\natural \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s^\natural} \mathbb{D}_s^\natural[K]. \quad (7.5)$$

Таким образом, посредством (7.4), (7.5) определяются промежуточные слои пространства позиций. Итак, мы располагаем множествами $D_0^\natural, D_1^\natural, \dots, D_N^\natural$; все эти множества-слои

непусты (см. [13, предложение 4.9.3]). С учетом [13, предложение 4.9.4] имеем, что при $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s^h$, $j \in \mathbf{I}^h(K)$ и $z \in \mathbb{M}_j$

$$(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^h. \quad (7.6)$$

3) Построение слоев функции Беллмана. Располагая слоями позиций, мы определяем функции

$$v_0^h \in \mathcal{R}_+[D_0^h], \quad v_1^h \in \mathcal{R}_+[D_1^h], \quad \dots, \quad v_N^h \in \mathcal{R}_+[D_N^h],$$

являющиеся сужениями функции Беллмана на упомянутые слои. Функцию $v_0^h \in \mathcal{R}_+[D_0^h]$ задаем правилом

$$v_0^h(x, \emptyset) \triangleq \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in X^{00}.$$

С учетом (5.8) и (6.2) получаем, как следствие, что (см. (7.3))

$$v_0^h(x, \emptyset) = \tilde{V}^*[x] = v_{\mathbf{n}-N}^*(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \quad \forall x \in X^{00}.$$

Дальнейшее построение реализует следующее правило (см. [17]): если $s \in \overline{1, N}$ и функция $v_{s-1}^h \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}^h]$ уже построена, то функция $v_s^h \in \mathcal{R}_+[D_s^h]$ такова, что (см. (7.6))

$$v_s^h(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}^h(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}^h(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j^h(z, K) + v_{s-1}^h(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \quad \forall (x, K) \in D_s^h. \quad (7.7)$$

Итак, реализуется следующая рекуррентная процедура:

$$v_0^h \longrightarrow v_1^h \longrightarrow \dots \longrightarrow v_N^h. \quad (7.8)$$

Финальная функция v_N^h является зависимостью (6.7):

$$v_N^h(x, \overline{1, N}) = V^h[x] \quad \forall x \in X^0. \quad (7.9)$$

С учетом этого задача (6.11) сводится к виду $v_N^h(x, \overline{1, N}) \longrightarrow \min, x \in X^0$; при этом

$$\mathbb{V}^h = \min_{x \in X^0} v_N^h(x, \overline{1, N}),$$

$$X_{\text{opt}}^0 = \{x \in X^0 \mid v_N^h(x, \overline{1, N}) = \mathbb{V}^h\}.$$

С учетом этих соотношений определяем $\mathbb{V}^h$ и точку $x^0 \in X_{\text{opt}}^0$, которую фиксируем;

$$\mathbb{V}^h = V^h[x^0] = v_N^h(x^0, \overline{1, N}). \quad (7.10)$$

4) Построение оптимального решения $\mathcal{M}_1$ -задачи. Располагая функциями-слоями $v_0^h, v_1^h, \dots, v_N^h$ и свойством (7.10), мы конструируем оптимальное ДР $\mathcal{M}_1$ -задачи со стартом в x^0 .

Итак, пусть $y_0 \in X^0 \times X^0$ определяется условием $y_0 \triangleq (x^0, x^0)$. По выбору x^0 имеем

$$(x^0, \overline{1, N}) = (\text{pr}_2(y_0), \overline{1, N}) \in D_N^h. \quad (7.11)$$

Тогда в силу (7.7), (7.9) и (7.11) имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^h = V^h[x^0] &= v_N^h(x^0, \overline{1, N}) = \min_{j \in \mathbf{I}^h(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}^h(x^0, \text{pr}_1(z), \overline{1, N}) \\ &\quad + c_j^h(z, \overline{1, N}) + v_{N-1}^h(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})], \end{aligned} \quad (7.12)$$

где $(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \in D_{N-1}^{\natural}$ при $j \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1, N})$ и $z \in \mathbb{M}_j$ (см. (7.6)). С учетом (7.12) находим $\xi_1 \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1, N})$ и $y_1 \in \mathbb{M}_{\xi_1}$, для которых

$$\mathbb{V}^{\natural} = \mathbf{c}^{\natural}(x^0, \text{pr}_1(y_1), \overline{1, N}) + c_{\xi_1}^{\natural}(y_1, \overline{1, N}) + v_{N-1}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}), \quad (7.13)$$

получая при этом, что $(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) \in D_{N-1}^{\natural}$. Согласно (7.7) при этом

$$\begin{aligned} v_{N-1}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) = & \min_{j \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1, N} \setminus \{\xi_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \text{pr}_1(z), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) \\ & + c_j^{\natural}(z, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v_{N-2}^{\natural}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; j\})]. \end{aligned} \quad (7.14)$$

С учетом (7.14) находим $\xi_2 \in \mathbf{I}^{\natural}(\overline{1, N} \setminus \{\xi_1\})$ и $y_2 \in \mathbb{M}_{\xi_2}$, для которых

$$\begin{aligned} v_{N-1}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) = & \mathbf{c}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \text{pr}_1(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) \\ & + c_{\xi_2}^{\natural}(y_2, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v_{N-2}^{\natural}(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}), \end{aligned} \quad (7.15)$$

где согласно (7.6) $(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}) \in D_{N-2}^{\natural}$. Из (7.13) и (7.15) вытекает равенство

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^{\natural} = & \mathbf{c}^{\natural}(\text{pr}_2(y_0), \text{pr}_1(y_1), \overline{1, N}) + \mathbf{c}^{\natural}(\text{pr}_2(y_1), \text{pr}_1(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) \\ & + c_{\xi_1}^{\natural}(y_1, \overline{1, N}) + c_{\xi_2}^{\natural}(y_2, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v_{N-2}^{\natural}(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Легко видеть (см. (7.16)), что при $N = 2$ УП $((\xi_i)_{i \in \overline{1, 2}}, (y_i)_{i \in \overline{0, 2}})$ является оптимальным решением $(\mathcal{M}_1, x^0)$ -задачи. В общем же случае $N \in \overline{2, n-2}$ процедуры, подобные выбору в (7.13), (7.15), следует продолжать вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1, N}$ (см. [19]). В итоге будут построены кортежи

$$\xi \triangleq (\xi_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathcal{A}_1, (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\xi}^{\natural}[x^0], \quad (7.17)$$

для которых $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x^0]$ и при этом

$$\mathbf{c}_{\xi}^{\natural}[(y_i)_{i \in \overline{0, N}}] = \mathbb{V}^{\natural} = V^{\natural}[x^0]. \quad (7.18)$$

Разумеется, $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}, x^0) \in \mathbb{D}^{\natural}$, откуда вытекает (см. (6.10), (7.18)), что

$$(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}, x^0) \in \mathbf{SOL}^{\natural}, \quad (7.19)$$

где $(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in (\text{sol})^{\natural}[x^0]$. При этом ξ действует в $\overline{1, N}$ так, что $\xi(t) = \xi_t$ при $t \in \overline{1, N}$. Итак, решение $(\mathcal{M}_1, x^0)$ -задачи, а стало быть, и «полной» $\mathcal{M}_1$ -задачи завершено. В частности (см. (7.17), предложение 3.3), определена точка

$$\text{pr}_2(y_N) \in X^{00}. \quad (7.20)$$

Данную точку мы будем использовать в качестве стартовой для $\mathcal{M}_2$ -задачи.

8. Построение декомпозиционного решения

Мы охраняем все соглашения предыдущего раздела в отношении x^0 , ξ , $(y_i)_{i \in \overline{0, N}}$, учитывая (7.19) и (7.20). Принимая $\text{pr}_2(y_N)$ за точку старта в $\mathcal{M}_2$ -задаче, рассмотрим построение оптимальной пары маршрут-траектория. Итак, полагаем, что

$$\tilde{y}_0 \triangleq (\text{pr}_2(y_N), \text{pr}_2(y_N)), \quad (8.1)$$

получая (в (8.1)) точку из $X^{00} \times X^{00}$. Далее, согласно (5.6) и (5.8)

$$\begin{aligned} \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] &= v_{\mathbf{n}-N}^*(\text{pr}_2(y_N), \overline{1, \mathbf{n}-N}) = \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} [\mathbf{c}^*(\text{pr}_2(y_N), \text{pr}_1(z), \overline{1, \mathbf{n}-N}) \\ &\quad + c_j^*(z, \overline{1, \mathbf{n}-N}) + v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{j\})], \end{aligned} \quad (8.2)$$

где (см. (5.5)) $(\text{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{j\}) \in D_{\mathbf{n}-N-1}^*$ при $j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N})$ и $z \in \mathbb{M}^{(j)}$ (здесь мы учли, что $(\text{pr}_2(y_N), \overline{1, \mathbf{n}-N}) \in D_{\mathbf{n}-N}^*$). С учетом (8.2) определяем теперь $\eta_1 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N})$ и $\tilde{y}_1 \in \mathbb{M}^{(\eta_1)}$, для которых

$$\begin{aligned} \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] &= \mathbf{c}^*(\text{pr}_2(y_N), \text{pr}_1(\tilde{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N}) + c_{\eta_1}^*(\tilde{y}_1, \overline{1, \mathbf{n}-N}) \\ &\quad + v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(\tilde{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Ясно, что $(\text{pr}_2(\tilde{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) \in D_{\mathbf{n}-N-1}^*$. Поэтому, согласно (5.6),

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(\tilde{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) &= \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} [\mathbf{c}^*(\text{pr}_2(\tilde{y}_1), \text{pr}_1(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) \\ &\quad + c_j^*(z, \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{\mathbf{n}-N-2}^*(\text{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; j\})], \end{aligned} \quad (8.4)$$

где $(\text{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; j\}) \in D_{\mathbf{n}-N-2}^*$ при $j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})$ и $z \in \mathbb{M}^{(j)}$. С учетом (8.4) определяем $\eta_2 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\tilde{y}_2 \in \mathbb{M}^{(\eta_2)}$ так, что

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(\tilde{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) &= \mathbf{c}^*(\text{pr}_2(\tilde{y}_1), \text{pr}_1(\tilde{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) \\ &\quad + c_{\eta_2}^*(\tilde{y}_2, \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{\mathbf{n}-N-2}^*(\text{pr}_2(\tilde{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}), \end{aligned} \quad (8.5)$$

где $(\text{pr}_2(\tilde{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D_{\mathbf{n}-N-2}^*$. Из (8.3) и (8.5) получаем следующее равенство

$$\begin{aligned} \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] &= \mathbf{c}^*(\text{pr}_2(y_N), \text{pr}_1(\tilde{y}_1), \overline{1, \mathbf{n}-N}) + \mathbf{c}^*(\text{pr}_2(\tilde{y}_1), \text{pr}_1(\tilde{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) \\ &\quad + c_{\eta_1}^*(\tilde{y}_1, \overline{1, \mathbf{n}-N}) + c_{\eta_2}^*(\tilde{y}_2, \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{\mathbf{n}-N-2}^*(\text{pr}_2(\tilde{y}_2), \overline{1, \mathbf{n}-N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}); \end{aligned} \quad (8.6)$$

легко видеть, что при $\mathbf{n} = N + 2$ (8.6) означает (см. (8.1)) оптимальность решения $((\eta_i)_{i \in \overline{1, 2}}, (\tilde{y}_i)_{i \in \overline{0, 2}})$ в $(\mathcal{M}_2, \text{pr}_2(y_N))$ -задаче. В общем же случае $N \in \overline{2, \mathbf{n}-2}$ процедуры выбора, подобные (8.3), (8.5) следует продолжать вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1, \mathbf{n}-N}$ (см. построения [19, § 7]). В итоге будет получено (оптимальное в $(\mathcal{M}_2, \text{pr}_2(y_N))$ -задаче) ДР

$$(\eta, (\tilde{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in (\text{sol})^*[\text{pr}_2(y_N)], \quad (8.7)$$

где $\eta \triangleq (\eta_i)_{i \in \overline{1, \mathbf{n}-N}}$. Таким образом, (см. (4.12), (4.13), (8.7))

$$(\eta, (\tilde{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[\text{pr}_2(y_N)]$$

и при этом имеет место следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\eta}^*[(\tilde{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] &= \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\tilde{y}_{t-1}), \text{pr}_1(\tilde{y}_t), \eta^1(t, \mathbf{n}-N) \oplus N) \\ &\quad + c_{N+\eta(t)}(\tilde{y}_t, \eta^1(t, \mathbf{n}-N) \oplus N)] + f(\text{pr}_2(\tilde{y}_{\mathbf{n}-N})) = \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Заметим, что η действует в $\overline{1, \mathbf{n} - N}$ и при этом $\eta(t) = \eta_t$, где $t \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$.

Таким образом, мы располагаем сейчас следующими частными решениями:

$$(\xi, (y_i)_{i \in \overline{0, N}}, x^0) \in \mathbf{SOL}^\natural, (\eta, (\tilde{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n} - N}}) \in (\text{sol})^*[\text{pr}_2(y_N)]. \quad (8.9)$$

Рассмотрим теперь естественное склеивание решений, участвующих в (8.9). При этом $x^0 \in X^0$, $\xi \in \mathcal{A}_1$ и $\eta \in \mathcal{A}_2$. Тогда, в частности, определен (см. (2.10)) склеенный маршрут

$$\xi \diamond \eta \in \mathbf{P},$$

для которого имеем следующее представление

$$((\xi \diamond \eta)(k) = \xi(k) \ \forall k \in \overline{1, N}) \& ((\xi \diamond \eta)(l) = \eta(l - N) + N \ \forall l \in \overline{N + 1, \mathbf{n}}). \quad (8.10)$$

Напомним, что согласно (6.12) реализуется представление

$$(\xi \diamond \eta)^1(t, \mathbf{n}) = \xi^1(t, \overline{N}) \cup \overline{N + 1, \mathbf{n}} \ \forall t \in \overline{1, N}.$$

Если же $\tau \in \overline{N + 1, \mathbf{n}}$, то (см. (8.10)) имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} (\xi \diamond \eta)^1(\tau, \mathbf{n}) &= \{ (\xi \diamond \eta)(k) : k \in \overline{\tau, \mathbf{n}} \} = \{ \eta(l - N) + N : l \in \overline{\tau, \mathbf{n}} \} \\ &= \{ \eta(s) + N : s \in \overline{\tau - N, \mathbf{n} - N} \} = \{ k + N : k \in \eta^1(\overline{\tau - N, \mathbf{n} - N}) \} \\ &= \eta^1(\overline{\tau - N, \mathbf{n} - N}) \oplus N; \end{aligned} \quad (8.11)$$

кроме того, $(\xi \diamond \eta)(\tau) = \eta(\tau - N) + N$. Если же $\theta \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$, то $N + \theta \in \overline{N + 1, \mathbf{n}}$ и согласно (8.11)

$$((\xi \diamond \eta)^1(\overline{N + \theta, \mathbf{n}}) = \eta^1(\overline{\theta, \mathbf{n} - N}) \oplus N) \& ((\xi \diamond \eta)(N + \theta) = \eta(\theta) + N).$$

Поскольку выбор θ был произвольным, имеем, что $\forall t \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$

$$((\xi \diamond \eta)^1(\overline{N + t, \mathbf{n}}) = \eta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}) \oplus N) \& ((\xi \diamond \eta)(N + t) = \eta(t) + N).$$

Напомним теперь, что $x^0 \in X^0$, $\xi \in \mathcal{A}_1$, $\eta \in \mathcal{A}_2$, $(y_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\xi^\natural[x^0]$ и $(\tilde{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \in \mathcal{Z}_\eta^*[\text{pr}_2(y_N)]$. Тогда в силу предложения 6.4 получаем, что

$$w \triangleq (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \square (\tilde{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \in \mathcal{Z}_{\xi \diamond \eta}[x^0]. \quad (8.12)$$

Мы получаем, в частности, что $w \in \mathfrak{Z}$ (см. (2.14)), т. е. $w : \overline{0, \mathbf{n}} \longrightarrow X \times X$. Мы полагаем, что

$$w_t \triangleq w(t) \ \forall t \in \overline{0, \mathbf{n}}.$$

Тогда в силу (6.13) и (8.12) получаем, что

$$(w_t = y_t \ \forall t \in \overline{0, N}) \& (w_t = \tilde{y}_{t-N} \ \forall t \in \overline{N + 1, \mathbf{n}}). \quad (8.13)$$

Заметим, что согласно (8.7) и (8.13) $\text{pr}_2(w_{t-1}) = \text{pr}_2(\tilde{y}_{t-N-1}) \ \forall t \in \overline{N + 1, \mathbf{n}}$. Итак, в виде $w = (w_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}$ мы имеем склеенную траекторию, причем

$$\xi \diamond \eta \in \mathbf{P} : (w_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\xi \diamond \eta}[x^0]. \quad (8.14)$$

Из (2.15) и (8.14) получаем следующее склеенное решение:

$$(\xi \diamond \eta, (w_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x^0]. \quad (8.15)$$

По выбору x^0 имеем из (2.16) и (8.15) следующее включение

$$(\xi \diamond \eta, (w_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x^0) \in \mathbf{D}. \quad (8.16)$$

Итак, построен склеенный маршрутный процесс (8.16), для которого в силу (2.25)

$$\mathbb{V} \leq \mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[(w_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}], \quad (8.17)$$

Мы покажем, что на самом деле в (8.17) имеет место равенство; это и будет означать оптимальность склеенного маршрутного процесса. Сейчас мы отметим, что согласно (2.21)

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[(w_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] &= \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(w_{t-1}), \text{pr}_1(w_t), (\xi \diamond \eta)^1(t, \mathbf{n})) + c_{(\xi \diamond \eta)(t)}(w_t, (\xi \diamond \eta)^1(t, \mathbf{n}))] \\ &\quad + f(\text{pr}_2(w_{\mathbf{n}})) = \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}(\text{pr}_2(y_{t-1}), \text{pr}_1(y_t), \xi^1(t, \overline{N}) \cup \overline{N+1}, \mathbf{n}) \\ &\quad + c_{\xi(t)}(y_t, \xi^1(t, \overline{N}) \cup \overline{N+1}, \mathbf{n})) + \sum_{t=N+1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\tilde{y}_{t-N-1}), \text{pr}_1(\tilde{y}_{t-N}), \eta^1(\overline{t-N}, \mathbf{n}-\overline{N}) \oplus N) \\ &\quad + c_{\eta(t-N)+N}(\tilde{y}_{t-N}, \eta^1(\overline{t-N}, \mathbf{n}-\overline{N}) \oplus N)] + f(\text{pr}_2(\tilde{y}_{\mathbf{n}-N})). \end{aligned} \quad (8.18)$$

С учетом (6.2), (6.6), (7.17) и (7.20) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^\natural &= \mathfrak{C}_{\xi}^\natural[(y_i)_{i \in \overline{0, N}}] = \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}(\text{pr}_2(y_{t-1}), \text{pr}_1(y_t), \xi^1(t, \overline{N}) \cup \overline{N+1}, \mathbf{n}) \\ &\quad + c_{\xi(t)}(y_t, \xi^1(t, \overline{N}) \cup \overline{N+1}, \mathbf{n})) + \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)], \end{aligned}$$

а тогда из (8.8) и (8.18) имеем следующее представление:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[(w_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] &= \mathbb{V}^\natural - \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] + \sum_{t=N+1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\tilde{y}_{t-N-1}), \text{pr}_1(\tilde{y}_{t-N}), \eta^1(\overline{t-N}, \mathbf{n}-\overline{N}) \oplus N) \\ &\quad + c_{\eta(t-N)+N}(\tilde{y}_{t-N}, \eta^1(\overline{t-N}, \mathbf{n}-\overline{N}) \oplus N)] + f(\text{pr}_2(\tilde{y}_{\mathbf{n}-N})) = \mathbb{V}^\natural - \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] \\ &\quad + \sum_{\tau=1}^{\mathbf{n}-N} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\tilde{y}_{\tau-1}), \text{pr}_1(\tilde{y}_{\tau}), \eta^1(\overline{\tau}, \mathbf{n}-\overline{N}) \oplus N) + c_{\eta(\tau)+N}(\tilde{y}_{\tau}, \eta^1(\overline{\tau}, \mathbf{n}-\overline{N}) \oplus N)] \\ &\quad + f(\text{pr}_2(\tilde{y}_{\mathbf{n}-N})) = \mathbb{V}^\natural - \tilde{V}^*[\text{pr}_2(y_N)] + \mathfrak{C}_{\eta}^*[(\tilde{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] = \mathbb{V}^\natural. \end{aligned}$$

Итак, склеенный маршрутный процесс (8.16) таков, что

$$\mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[(w_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathbb{V}^\natural. \quad (8.19)$$

Как следствие из (8.17) и (8.19) имеем следующее неравенство

$$\mathbb{V} \leq \mathbb{V}^\natural. \quad (8.20)$$

9. Оптимальность декомпозиционного решения

Продолжаем исследование склеенного маршрутного процесса (8.16) в свете свойств (8.19), (8.20).

Предложение 9.6. *Справедливо равенство $\mathbb{V} = \mathbb{V}^\natural$.*

Доказательство. Напомним, что согласно (2.26) $\mathbf{SOL} \neq \emptyset$. С учетом этого выберем и зафиксируем

$$(\hat{\gamma}, (\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, \hat{x}) \in \mathbf{SOL}, \quad (9.1)$$

получая оптимальный маршрутный процесс: из (2.26) и (9.1) следует, что

$$(\hat{\gamma}, (\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, \hat{x}) \in \mathbf{D} : \mathfrak{C}_{\hat{\gamma}}[(\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathbb{V}. \quad (9.2)$$

Из (2.16), (9.2) вытекает, что $\hat{\gamma} \in \mathbf{P}$, $(\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}$, $\hat{x} \in X^0$ и при этом

$$(\hat{\gamma}, (\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \tilde{\mathbf{D}}[\hat{x}]. \quad (9.3)$$

В свою очередь, имеем с учетом (2.15) и (9.3), что

$$(\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\hat{\gamma}}[\hat{x}]. \quad (9.4)$$

В силу (2.10) для некоторых маршрутов

$$(\hat{\alpha} \in \mathcal{A}_1) \& (\hat{\beta} \in \mathcal{A}_2) \quad (9.5)$$

реализуется следующее представление маршрута $\hat{\gamma}$:

$$\hat{\gamma} = \hat{\alpha} \diamond \hat{\beta}. \quad (9.6)$$

Из (2.9), (9.5) и (9.6) получаем теперь, что

$$(\hat{\gamma}(k) = \hat{\alpha}(k) \ \forall k \in \overline{1, N}) \& (\hat{\gamma}(l) = \hat{\beta}(l - N) + N \ \forall l \in \overline{N + 1, \mathbf{n}}). \quad (9.7)$$

Напомним, что $\hat{z}_\tau \in X \times X$ при $\tau \in \overline{0, \mathbf{n}}$; согласно (2.14) и (9.4)

$$(\hat{z}_0 = (\hat{x}, \hat{x})) \& (\hat{z}_\tau \in \mathbb{M}_{\hat{\gamma}(\tau)} \ \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n}}).$$

Отметим в этой связи, что согласно (9.4) и (9.6)

$$(\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_{\hat{\alpha} \diamond \hat{\beta}}[\hat{x}]. \quad (9.8)$$

Из (9.5), (9.8) и предложения 3.1 вытекает, что справедливо

$$(\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\hat{\alpha}}^\natural[\hat{x}]. \quad (9.9)$$

Иными словами (см. (3.1), (9.9)), $(\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{Z}^\natural$ есть такой кортеж, что

$$(\hat{z}_0 = (\hat{x}, \hat{x})) \& (\hat{z}_\tau \in \mathbb{M}_{\hat{\alpha}(\tau)} \ \forall \tau \in \overline{1, N}).$$

Поскольку $\hat{x} \in X^0$, $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}_1$ и $(\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\hat{\alpha}}^\natural[\hat{x}]$, имеем из предположение 3.3, что

$$\text{pr}_2(\hat{z}_N) \in X^{00}. \quad (9.10)$$

Далее, из (6.6) вытекает следующее равенство

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\hat{\alpha}}^{\natural}[(\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, N}}] &= \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{t-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_t), \hat{\alpha}^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \\ &\quad + c_{\hat{\alpha}(t)}(\hat{z}_t, \hat{\alpha}^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}})] + \mathbf{f}(\text{pr}_2(\hat{z}_N)), \end{aligned}$$

где согласно (6.2) и (9.10) $\mathbf{f}(\text{pr}_2(\hat{z}_N)) = \tilde{V}^*[\text{pr}_2(\hat{z}_N)]$, а потому

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\hat{\alpha}}^{\natural}[(\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, N}}] &= \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{t-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_t), \hat{\alpha}^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \\ &\quad + c_{\hat{\alpha}(t)}(\hat{z}_t, \hat{\alpha}^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}})] + \tilde{V}^*[\text{pr}_2(\hat{z}_N)]. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Заметим, что согласно (3.2) $(\hat{\alpha}, (\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^{\natural}[\hat{x}]$, откуда в силу (6.7) имеем неравенство

$$V^{\natural}[\hat{x}] \leq \mathfrak{C}_{\hat{\alpha}}^{\natural}[(\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, N}}]. \quad (9.12)$$

При этом в силу (6.9), (9.11) и (9.12) имеем оценку

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^{\natural} &\leq V^{\natural}[\hat{x}] \leq \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{t-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_t), \hat{\alpha}^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \\ &\quad + c_{\hat{\alpha}(t)}(\hat{z}_t, \hat{\alpha}^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}})] + \tilde{V}^*[\text{pr}_2(\hat{z}_N)]. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Напомним, что согласно (6.12), (9.5) и (9.6) имеем, что

$$\hat{\gamma}^1(\overline{t, \mathbf{n}}) = (\hat{\alpha} \diamond \hat{\beta})^1(\overline{t, \mathbf{n}}) = \hat{\alpha}^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N+1, \mathbf{n}} \quad \forall t \in \overline{1, N}.$$

Поэтому из (9.7) и (9.13) вытекает следующее неравенство:

$$\mathbb{V}^{\natural} \leq \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{t-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_t), \hat{\gamma}^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{\hat{\gamma}(t)}(\hat{z}_t, \hat{\gamma}^1(\overline{t, \mathbf{n}}))] + \tilde{V}^*[\text{pr}_2(\hat{z}_N)]. \quad (9.14)$$

Напомним теперь что $\hat{z}_t \in X \times X \quad \forall t \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$. Тогда определен кортеж $(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathbf{Z}^*$, для которого

$$(z_0^* \triangleq (\text{pr}_2(\hat{z}_N), \text{pr}_2(\hat{z}_N))) \& (z_t^* \triangleq \hat{z}_{t+N} \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}-N}). \quad (9.15)$$

Тогда согласно предложению 6.5 с учетом (9.5) и (9.8) получаем, что

$$(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_{\hat{\beta}}^*[\text{pr}_2(\hat{z}_N)]. \quad (9.16)$$

При этом согласно (4.7), (9.5) и (9.16) имеем очевидное включение

$$(\hat{\beta}, (z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}) \in \mathbf{D}^*[\text{pr}_2(\hat{z}_N)]. \quad (9.17)$$

Из (4.4) и (9.16) вытекает, что справедливы свойства

$$(z_0^* = (\text{pr}_2(\hat{z}_N), \text{pr}_2(\hat{z}_N))) \& (z_{\tau}^* \in \mathbb{M}^{(\hat{\beta}(\tau))} \quad \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n}-N}). \quad (9.18)$$

Как следствие имеем из (4.1) и (9.18), что $z_\tau^* \in \mathbb{M}_{N+\hat{\beta}(\tau)} \forall \tau \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$. Из (4.12), (9.16) и (9.17) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\hat{\beta}}^*[(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}}] &= \sum_{t=1}^{\mathbf{n} - N} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}^*), \text{pr}_1(z_t^*), \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}) \oplus N) \\ &\quad + c_{N+\hat{\beta}(t)}(z_t^*, \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}) \oplus N)] + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}-N}^*)) = \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_0^*), \text{pr}_1(z_1^*), \hat{\beta}^1(\overline{1, \mathbf{n} - N}) \oplus N) \\ &\quad + \sum_{t=2}^{\mathbf{n} - N} \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}^*), \text{pr}_1(z_t^*), \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}) \oplus N) \\ &\quad + \sum_{t=1}^{\mathbf{n} - N} c_{N+\hat{\beta}(t)}(z_t^*, \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}) \oplus N) + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}-N}^*)). \end{aligned}$$

Тогда (см. (9.15)) получаем, в частности, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\hat{\beta}}^*[(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}}] &= \mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_N), \text{pr}_1(\hat{z}_{N+1}), \hat{\beta}^1(\overline{1, \mathbf{n} - N}) \oplus N) \\ &\quad + \sum_{t=2}^{\mathbf{n} - N} \mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{N+t-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_{N+t}), \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}) \oplus N) + \sum_{t=1}^{\mathbf{n} - N} c_{N+\hat{\beta}(t)}(\hat{z}_{N+t}, \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}) \oplus N) \\ &\quad + f(\text{pr}_2(\hat{z}_{\mathbf{n}})) = \sum_{t=1}^{\mathbf{n} - N} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{N+t-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_{N+t}), \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}) \oplus N) \\ &\quad + c_{N+\hat{\beta}(t)}(\hat{z}_{N+t}, \hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}) \oplus N)] + f(\text{pr}_2(\hat{z}_{\mathbf{n}})). \end{aligned} \quad (9.19)$$

Напомним (9.7). Тогда при $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ имеем, что $N + s \in \overline{N + 1, \mathbf{n}}$ и при этом

$$\hat{\gamma}(N + s) = \hat{\beta}(s) + N. \quad (9.20)$$

Далее, из (9.20) вытекает, что при $\tau \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ и $l \in \overline{\tau, \mathbf{n} - N}$ верно $N + l \in \overline{N + 1, \mathbf{n}}$, а потому (см. (9.20)) справедливо равенство

$$\hat{\gamma}(N + l) = \hat{\beta}(l) + N;$$

тогда получаем следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^1(\overline{\tau, \mathbf{n} - N}) \oplus N &= \{k + N : k \in \hat{\beta}^1(\overline{\tau, \mathbf{n} - N})\} = \{\hat{\beta}(l) + N : l \in \overline{\tau, \mathbf{n} - N}\} \\ &= \{\hat{\gamma}(N + l) : l \in \overline{\tau, \mathbf{n} - N}\} = \{\hat{\gamma}(h) : h \in \overline{N + \tau, \mathbf{n}}\} = \hat{\gamma}^1(\overline{N + \tau, \mathbf{n}}). \end{aligned}$$

Итак, установлено следующее свойство:

$$\hat{\beta}^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}) \oplus N = \hat{\gamma}^1(\overline{N + t, \mathbf{n}}) \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n} - N}. \quad (9.21)$$

Из (9.19)–(9.21) получаем теперь цепочку равенств

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\hat{\beta}}^*[(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n} - N}}] &= \sum_{t=1}^{\mathbf{n} - N} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{N+t-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_{N+t}), \hat{\gamma}^1(\overline{N + t, \mathbf{n}})) \\ &\quad + c_{\hat{\gamma}(N+t)}(\hat{z}_{N+t}, \hat{\gamma}^1(\overline{N + t, \mathbf{n}}))] + f(\text{pr}_2(\hat{z}_{\mathbf{n}})) = \sum_{\tau=N+1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{\tau-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_{\tau}), \hat{\gamma}^1(\overline{\tau, \mathbf{n}})) \\ &\quad + c_{\hat{\gamma}(\tau)}(\hat{z}_{\tau}, \hat{\gamma}^1(\overline{\tau, \mathbf{n}}))] + f(\text{pr}_2(\hat{z}_{\mathbf{n}})). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Вместе с тем, согласно (4.13) и (9.17) справедливо неравенство

$$\tilde{V}^*[\text{pr}_2(\hat{z}_N)] \leq \mathfrak{C}_{\beta}^*[(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}]. \quad (9.23)$$

Поэтому из (9.14) и (9.23) вытекает следующее неравенство

$$\mathbb{V}^{\natural} \leq \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{t-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_t), \hat{\gamma}^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{\hat{\gamma}(t)}(\hat{z}_t, \hat{\gamma}^1(\overline{t, \mathbf{n}}))] + \mathfrak{C}_{\beta}^*[(z_t^*)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}].$$

Используя теперь (9.22), получаем следующее положение

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^{\natural} &\leq \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{t-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_t), \hat{\gamma}^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{\hat{\gamma}(t)}(\hat{z}_t, \hat{\gamma}^1(\overline{t, \mathbf{n}}))] \\ &+ \sum_{\tau=N+1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{\tau-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_{\tau}), \hat{\gamma}^1(\overline{\tau, \mathbf{n}})) + c_{\hat{\gamma}(\tau)}(\hat{z}_{\tau}, \hat{\gamma}^1(\overline{\tau, \mathbf{n}}))] + f(\text{pr}_2(\hat{z}_{\mathbf{n}})) \\ &= \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{t-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_t), \hat{\gamma}^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{\hat{\gamma}(t)}(\hat{z}_t, \hat{\gamma}^1(\overline{t, \mathbf{n}}))] + f(\text{pr}_2(\hat{z}_{\mathbf{n}})). \end{aligned} \quad (9.24)$$

Но из (2.21), (9.2) и (9.4) вытекает цепочка равенств

$$\sum_{t=1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\hat{z}_{t-1}), \text{pr}_1(\hat{z}_t), \hat{\gamma}^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{\hat{\gamma}(t)}(\hat{z}_t, \hat{\gamma}^1(\overline{t, \mathbf{n}}))] + f(\text{pr}_2(\hat{z}_{\mathbf{n}})) = \mathfrak{C}_{\hat{\gamma}}[(\hat{z}_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathbb{V}.$$

Поэтому (см. (9.24)) $\mathbb{V}^{\natural} \leq \mathbb{V}$ и с учетом (8.20) получаем требуемое равенство $\mathbb{V} = \mathbb{V}^{\natural}$. $\square$

Из (8.19) и предложения 9.6 вытекает следующее равенство

$$\mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[(w_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathbb{V}. \quad (9.25)$$

Из (8.16) и (9.25) получаем теперь, что

$$(\xi \diamond \eta, (w_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x^0) \in \mathbf{D} : \mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[(w_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] = \mathbb{V}. \quad (9.26)$$

Из (2.26) и (9.26) вытекает, что маршрутный процесс (8.16) оптимален:

$$(\xi \diamond \eta, (w_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}, x^0) \in \mathbf{SOL}. \quad (9.27)$$

Итак (см. (9.27)), построено оптимальное декомпозиционное решение исходной задачи (2.24). Предложение 9.6 указывает, что глобальный экстремум определяется посредством построения слоев функции Беллмана (см. (7.10)). При этом может использоваться вариант процедуры (7.8), в рамках которого на каждом этапе в памяти сохраняется только один слой функции Беллмана (см. (7.7)), что доставляет некоторую экономию ресурсов памяти (имеется в виду процедура с перезаписью слоев упомянутой функции).

10. Вычислительный эксперимент: пример предваряющей листовой резки длинномерных деталей

Рассмотрим одно из возможных применений общих конструкций построения оптимального декомпозиционного решения. Исследуется вариант задачи управления инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ. Данная задача осложнена на практике

целым рядом ограничений. В частности, в случае термической резки очень важным является условие обеспечения эффективного отвода тепла: требуется, чтобы возле каждой фактической точки врезки было «достаточно много» сплошного металла. Это требование может, в принципе, нарушаться за счет выполнения предшествующих операций по резке деталей (см. в этой связи [24, § 1.3.3]). По ряду причин среди всех заготовок имеет смысл выделить длинномерные (речь, конечно, идет о плоской задаче), у которых один из габаритов существенно больше другого (см. [24, с. 46]). В целом ряде случаев резка упомянутых длинномерных деталей должна быть предваряющей и их имеет смысл выделить в первую зону, связанную с M_1 -задачей (дело в том, что длинномерные детали, расположенные возле границы листа, подвержены максимальным тепловым деформациям). В этой связи рассмотрим модельный пример, ориентированный на эту возможность, добавляя, однако, в постановку и некоторые элементы, связанные с обеспечением вычислительной реализации: мы погружаем задания по резке длинномерных деталей в первую зону, но не исчерпываем ее упомянутыми «большими» деталями. Это связано с естественным желанием решать задачи ощутимой размерности.

Итак, в качестве X используем достаточно большой невырожденный прямоугольник на плоскости (лист). Имеется раскройная карта с указанием контуров деталей, подлежащих вырезке. Возле данных контуров намечены эквидистанты, которые в интересах компьютерного исследования дискретизируются с выбором возле каждого контура набора УП, элементами каждой из которых являются возможная точка врезки и отвечающая ей точка выключения инструмента. Образуются своеобразные мегаполисы (см. раздел 2.). В свою очередь, вышеупомянутые УП точек образуют отношения (2.1). При практическом осуществлении процесса резки инструмент в режиме холостого хода (т. е. быстро) прибывает к выбранной точке врезки, осуществляет врезку и последующее перемещение к контуру в режиме рабочего хода (достаточно медленно), далее осуществляется собственно резка по контуру, после чего реализуется перемещение к точке выключения инструмента (в режиме рабочего хода). Затем инструмент перемещается к следующему контуру в режиме холостого хода.

Мы стремимся найти вариант перемещений инструмента, минимизирующий общее время работы (оптимизация по быстродействию). В этих рассуждениях мы ограничиваемся стандартной техникой резки (резкой по замкнутому контуру); в [24, часть I] обсуждается и целый ряд других вариантов резки. Отметим, что в нашем случае резки по замкнутому контуру время резки самих контуров является одним и тем же для различных допустимых решений и, по этой причине, может быть исключено из постановки; это время может рассматриваться в виде аддитивной добавки к совокупному времени исполнения операций, реально зависящему от выбранного варианта резки деталей. Это совокупное время можно охарактеризовать следующим образом. А именно (см. [24, § 3.3]), следует суммировать времена внешних, по отношению к мегаполисам, перемещений и времена, связанные для каждого мегаполиса с перемещением в металле от точки врезки к точке начала реза (на контуре) и перемещением от точки начала (она же и точка завершения) реза к точке выключения инструмента. Данная зависимость времен, связанных с двумя последними перемещениями, может намеренно искажаться в случае нарушения требований по отводу тепла (тепловых допусков) за счет добавления штрафных констант, что материализуется в используемой модели в виде функций стоимости, включающих зависимость от списка заданий. Детальное построение таких функций стоимости (с зависимостью от списка зада-

ний) приведено в [18, § 6]; эти функции [18] используются в примере. Другой важный тип ограничений составляют условия предшествования; в настоящем примере используется следующий вариант: у каждой детали с внутренними контурами резка последних должна предшествовать резке внешнего контура (напомним, что наши мегаполисы привязаны к контурам). Аналогичное соглашение принимается в отношении вложенных деталей.

Заметим, что в задачах, связанных с листовой резкой, возможны и другие типы условий предшествования, а также различные ограничения динамического характера (требования жесткости листа, жесткости детали и др.; см. [24, гл. 1]). Мы, прибегая к построению двух зон, имеем своей целью всего лишь ослабить «тепловую нагрузку» на длинномерные детали, а точнее, реализовать в ослабленном варианте соображения [24, § 1.3.3].

Ниже рассматривается случай, когда (в задаче, связанной с листовой резкой) $n = 52$, $N = 24$. Итак, семейство M_1 содержит 24 мегаполиса (среди них шесть связаны с длинномерными деталями), а семейство M_2 – 28 мегаполисов. Условия предшествования соответствуют варианту раздела 2. Общее количество адресных пар 36. Рассматривался случай, когда $|K_1| = 15$ и $|K_2| = 21$.

Вычисления производились на ПЭВМ с процессором Intel i7-2630QM с 8Гб оперативной памяти, работающей под управлением Windows 7 (64-bit). Для разработки программы был использован язык C++, компилятор MinGW и интерфейсная библиотека Qt. На рис. 1 приведен результат работы алгоритма. Скорости холостого хода и рабочего хода существенно различаются (первая скорость 500 мм/сек., а вторая – 10 мм/сек.). Описание мегаполисов не приводится по соображениям объема.

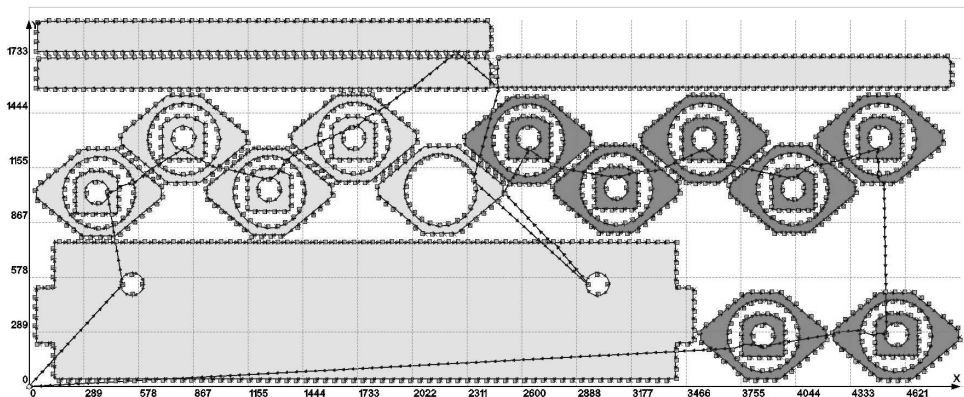


Рис. 1. Результат работы алгоритма: найденная траектория движения инструмента

Получены следующие результаты. Результат счета: $V = 130,6$. В данном значении «отсутствуют штрафы»; следовательно, условия, связанные с эффективным отводом тепла, выполнены. Время счета 29 мин. 19 сек., что представляется вполне удовлетворительным.

References

- [1] G. Gutin, A.P. Punnen, *The Traveling Salesman Problem and its Variations*, Springer, Berlin, 2002, 850 pp.
- [2] W.J. Cook, *In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation*, Princeton University, United States, 2012, 228 pp.
- [3] Э. Х. Гимади, М. Ю. Хачай, *Экстремальные задачи на множествах перестановок*, УМЦ УПИ, Екатеринбург, 2016, 216 с. [E. Kh. Gimadi, M. Yu. Khachai, *Extremal Problems on Sets of Permutations*, UMC UPI Publ., Ekaterinburg, 2016 (In Russian), 216 pp.]

- [4] M. Kubo, H. Kasugai, “The precedence constrained traveling salesman problem”, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **34**:2 (1991), 152–172.
- [5] Y. Salii, “Revisiting dynamic programming for precedence-constrained Traveling Salesman Problem and its time-dependent generalization”, *European Journal of Operational Research*, **272**:1 (2019), 32–42.
- [6] E. Balas, “New classes of efficiently solvable generalized Traveling Salesman Problems”, *Annals of Operations Research*, **86** (1999), 529–558.
- [7] J. A. Chisman, “The clustered traveling salesman problem”, *Computers and Operation Research*, **2**:2 (1975), 115–119.
- [8] М. Ю. Хачай, Е. Д. Незнахина, “Приближенные схемы для обобщенной задачи коммивояжера”, Тр. ИММ УрО РАН, **22**, 2016, 283–292; англ. пер.: M. Yu. Khachai, E. D. Neznakhina, “Approximation schemes for the generalized Traveling Salesman Problem”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **299**:suppl. 1 (2017), 97–105.
- [9] F. C. J. Lokin, “Procedures for traveling salesman problems with additional constraints”, *European of Journal Operational Research*, **3**:2 (1979), 135–141.
- [10] С. С. Лебедев, “О декомпозиции некоторых прикладных задач дискретной оптимизации”, *Экономика и математические методы*, **44**:2 (2008), 121–125. [S. S. Lebedev, “On the decomposition of some applied problems of discrete optimization”, *Economics and Mathematical Methods*, **44**:2 (2008), 121–125 (In Russian)].
- [11] В. И. Цурков, *Декомпозиция в задачах большой размерности*, Наука, М., 1981, 350 с. [V. I. Tsurkov, *Decomposition in High-dimensional Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (In Russian), 350 pp.]
- [12] А. А. Первозванский, В. Г. Гайцгори, *Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация*, Наука, М., 1975, 344 с. [A. A. Pervozvansky, V. G. Gaitsgori, *Decomposition, Aggregation and Approximate Optimization*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian), 344 pp.]
- [13] А. Г. Ченцов, *Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории*, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2008, 238 с. [A. G. Chentsov, *Extremal Problems of Routing and Job Distribution: Questions of Theory*, Izhevsk Institute for Computer Research, Izhevsk, 2008 (In Russian), 238 pp.]
- [14] Р. Беллман, “Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере”, *Кибернетический сборник*. Т. 9, ред. А. А. Ляпунов, О. Б. Лупанов, Мир, М., 1964, 219–222. [R. Bellman, “Application of Dynamic Programming to the Traveling Salesman Problem”, *Cybernetic Collection*. V. 9, eds. A. A. Lyapunov, O. B. Lupanov, Mir Publ., Moscow, 1964, 219–222 (In Russian)].
- [15] М. Хелд, Р. М. Карп, “Применение динамического программирования к задачам упорядочения”, *Кибернетический сборник*. Т. 9, ред. А. А. Ляпунов, О. Б. Лупанов, Мир, М., 1964, 202–218. [M. Held, R. M. Karp, “Application of Dynamic Programming to Ordering Problems”, *Cybernetic Collection*. V. 9, eds. A. A. Lyapunov, O. B. Lupanov, Mir Publ., Moscow, 1964, 202–218 (In Russian)].
- [16] А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов, “Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями”, Тр. ИММ УрО РАН, **14**, 2008, 183–201; англ. пер.: A. A. Chentsov, A. G. Chentsov, P. A. Chentsov, “Extremal routing problem with internal losses”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **264**:suppl. 1 (2009), 87–106.
- [17] A. G. Chentsov, P. A. Chentsov, “The routing problems with optimization of the starting point: dynamic programming”, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, **54** (2019), 102–121.
- [18] А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов, “Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов”, *Автоматика и телемеханика*, 2016, № 11, 96–117; англ. пер.: A. G. Chentsov, P. A. Chentsov, “Routing under constraints: Problem of visit to megalopolises”, *Autom. Remote Control*, **77**:11 (2016), 1957–1974.
- [19] А. Г. Ченцов, “К вопросу о маршрутизации комплексов работ”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2013, № 1, 59–82. [A. G. Chentsov, “On the question of routing of work packages”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta: Matematika, Mekhanika, Komp'yuternye Nauki*, 2013, № 1, 59–82 (In Russian)].
- [20] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970, 416 с. [K. Kuratowski, A. Mostowski, *Set Theory*, Moscow, Mir Publ., 1970 (In Russian), 416 pp.]

- [21] Ж. Дьедонне, *Основы современного анализа*, Мир, М., 1964, 430 с. [J. Dieudonné, *Fundamentals of Modern Analysis*, Mir Publ., Moscow, 1964 (In Russian), 430 pp.]
- [22] Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, *Алгоритмы: построение и анализ*, МЦНМО, М., 2000, 955 с. [T. Cormen, Ch. Leiserson, R. Rivest, *Algorithms: Construction and Analysis*, MCNMO, Moscow, 2000 (In Russian), 955 pp.]
- [23] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 624 с. [J. Varga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian), 624 pp.]
- [24] А. А. Петунин, А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов, *Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы*, Издательство Уральского университета, Екатеринбург, 2020, 247 с. [A. A. Petunin, A. G. Chentsov, P. A. Chentsov, *Optimal Tool Routing of Shaped Sheet Cutting Machines with Numerical Control. Mathematical Models and Algorithms*, Ural University Press, Ekaterinburg, 2020, 247 pp.]

Информация об авторах

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6568-0703>

Ченцов Павел Александрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; старший научный сотрудник, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov.p@mail.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3595-0607>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Ченцов Александр Георгиевич
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 01.12.2021 г.

Поступила после рецензирования 08.02.2022 г.

Принята к публикации 10.03.2022 г.

Information about the authors

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6568-0703>

Pavel A. Chentsov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Senior Researcher, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov.p@mail.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3595-0607>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Aleksandr G. Chentsov
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Received 01.12.2021

Reviewed 08.02.2022

Accepted for press 10.03.2022

$$X^2 + X + 1$$

$$g(\varepsilon - 1) = \dots$$

$$(i + \sqrt{2})$$

$$x = \gamma + 1$$

$$H^2(\Pi, M^\Pi) \rightarrow \dots$$

$$L_v(E, 1)$$

$$\{ \dots \} \rightarrow \{ \dots \}$$

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = 2\alpha^2$$

$$A^+ \{ \varphi, x \rightarrow \dots$$

$$L(p-1, p-1)$$

$$\frac{\alpha}{\dots}$$

$$T \rightarrow \sum a_i T$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \alpha^2 + 2\alpha \\ \bar{\alpha} & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \in G \times E \rightarrow \dots$$

$$\alpha \left(\frac{\bar{\alpha} + 2}{\alpha + 1} \right)$$

$$x \leq y^x (1 + \dots)$$

$$L(E, \varphi, K)$$

$$A \frac{4}{\pi} \dots$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$| \dots |$$

$$\pi \approx \dots$$

$$(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)})$$

$$\psi = \frac{1}{\mu} \dots$$

$$(E, \rho, \varphi)$$

$$\Pi; \int \chi$$

$$\lambda + \mu$$

$$\lambda' + \mu' = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

$$K, 0/X, 0 \text{ Ind } 2/\dots$$

$$\det(X, \dots)$$