

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© В. С. Трещев

Предлагаются условия разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений неявного вида. Используются результаты о векторно накрывающих отображениях, полученные Е. С. Жуковским.

Ключевые слова: система неявных дифференциальных уравнений; задача Коши; векторно накрывающие отображения; метрические пространства.

Идея приложения утверждений о накрывающих отображениях к исследованию неявных дифференциальных уравнений предложена в [1] и развита в ряде работ (см. [2]–[5]). В цитируемых работах рассматривались вопросы существования и продолжаемости решений задачи Коши, их непрерывной зависимости от параметров. В работах [6]–[8] были начаты исследования векторно накрывающих отображений в произведениях метрических пространств, полученные результаты применялись к краевым задачам и задачам управления. В [10] получена теорема о возмущениях векторно накрывающих отображений в произведениях метрических пространств, наделенных векторной метрикой. Эти результаты позволяют более эффективно исследовать различные системы, в том числе, системы неявных дифференциальных уравнений. Здесь методами, основанными на утверждениях о векторно накрывающих отображениях пространств с векторной метрикой, доказывается теорема о разрешимости задачи Коши для системы неявных дифференциальных уравнений. Полученное утверждение уточняет результат [6].

Используются следующие обозначения: \mathcal{I}_m — матрица размерности $m \times m$, все компоненты которой равны 1, I_m — единичная $m \times m$, матрица, \mathbb{R}^n — n -мерное вещественное пространство, \mathbb{R}_+^n — конус векторов с неотрицательными компонентами пространства \mathbb{R}^n , $\text{cl}(\mathbb{R}^n)$ — совокупность непустых замкнутых подмножеств пространства \mathbb{R}^n ; $L_\infty([a, b], \mathbb{R})$ — банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{L_\infty([a, b], \mathbb{R})} = \text{vrai} \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$; $AC_\infty([a, b], \mathbb{R})$ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций, имеющих почти всюду производную $\dot{x} \in L_\infty([a, b], \mathbb{R})$, с нормой $\|x\|_{AC_\infty([a, b], \mathbb{R})} = \|\dot{x}\|_{L_\infty([a, b], \mathbb{R})} + |x(a)|$.

Пусть заданы метрические пространства $X_i \doteq (X_i, \rho_{X_i})$, $Y_j \doteq (Y_j, \rho_{Y_j})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Определим произведение этих пространств

$$\overline{X} = \prod_{i=1}^n X_i, \quad \overline{Y} = \prod_{j=1}^m Y_j$$

и зададим в них векторные метрики, полагая для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{X}$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in \overline{X}$ и $y = (y_1, \dots, y_m) \in \overline{Y}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \overline{Y}$

$$\overline{\rho}_X(x, u) = (\rho_{X_1}(x_1, u_1), \dots, \rho_{X_n}(x_n, u_n)), \quad \overline{\rho}_Y(y, \omega) = (\rho_{Y_1}(y_1, \omega_1), \dots, \rho_{Y_m}(y_m, \omega_m)).$$

Обозначим $B_{X_i}(u_i, d_i) \doteq \{x_i \in X_i : \rho_{X_i}(u_i, x_i) \leq d_i\}$ — замкнутый шар в пространстве X_i с центром в точке $u_i \in X_i$ радиуса $d_i \geq 0$. Аналогично, обозначим $B_{Y_j}(\omega_j, r_j)$ замкнутый шар в

Заметим, что отображение $t \in [a, b] \mapsto \mathfrak{B}(u^0(t), R) \in \text{cl}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m)$ измеримо. Определим абсолютно непрерывную функцию $x^0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с компонентами $x_i^0(t) = \gamma_i + \int_a^t u_i^0(s) ds$ и для некоторого $\sigma > 0$ положим $D(t) = \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(x^0(t), \sigma \bar{1})$, $\bar{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [a, b]$.

Пусть задано $d \in \mathbb{R}_+^m$. Определим при почти всех $t \in [a, b]$, любом $x \in D(t)$ множество

$$W(t, x) \doteq \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(f(t, x, u^0(t)), d).$$

Т е о р е м а 1. Пусть для некоторых матриц $A_{n \times m}$ и $B_{m \times n}$ с неотрицательными компонентами при почти всех $t \in [a, b]$, любых $\omega \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(u^0(t), R)$, $x \in D(t)$ выполнены условия:

отображение $f(t, x, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ векторно условно A -накрывающее множество $W(t, x)$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0(t), R)$;

отображение $f(t, \cdot, \omega): D(t) \rightarrow \mathbb{R}^m$ B -липшицево;

имеет место включение $y(t) \in f(t, x, \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(u^0(t), R))$.

Далее, пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что имеют место неравенства

$$r(y) \doteq (I_m + \varepsilon \mathfrak{I}_m) \bar{\rho}_{L_\infty([a, b], \mathbb{R}^m)}(y^0, y) \leq d, \quad Ar(y) \leq R, \quad \text{где } y^0(t) = f(t, x^0(t), u^0(t)).$$

Тогда для некоторого значения $c \in (a, b]$ существует определенное на $[a, c]$ решение $x_c \in AC_\infty([a, c], \mathbb{R}^n)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее оценке

$$\bar{\rho}_{L_\infty([a, a+\delta], \mathbb{R}^n)}(\dot{x}_c, P_c u^0) \leq A(I_m + \varepsilon \mathfrak{I}_m) \bar{\rho}_{L_\infty([a, c], \mathbb{R}^m)}(P_c y^0, P_c y),$$

здесь символом P_c обозначена операция сужения на $[a, c]$ соответствующих функций.

Это утверждение уточняет результаты о разрешимости задачи Коши для неявных дифференциальных уравнений цитируемых выше работ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
2. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.
3. Arutyunov A., de Oliveira V.A., Lobo Pereira F., Zhukovskiy S., Zhukovskiy E. On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. Iss. 1. P. 129–143.
4. Жуковский С.Е., Мингалеева З.Т. О разрешимости управляемых систем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2014. Т. 19. № 2. С. 380–383.
5. Перейра Ф.Л., Жуковский С.Е. О Приложениях накрывающих отображений к задаче Коши для дифференциальных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2626–2628.
6. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–456.
7. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.
8. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. О периодической краевой задаче для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Известия ИМИ УдГУ. 2012. № 1 (39). С. 52–53.
9. Жуковский Е.С., Жуковская Т.В. Об условиях разрешимости краевой задачи для нелинейного абстрактного функционально-дифференциального уравнения // Известия ИМИ УдГУ. 2012. № 1 (39). С. 50–51.
10. Жуковский Е.С., Мунембе Ж. П. О возмущениях многозначных векторно накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. № 5. С. 1146–1150.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-97504).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Трещев Валентин Сергеевич, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: treshchev.math@mail.ru

UDC 517.988.5

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-432-436

ABOUT THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF IMPLICIT DIFFERENTIAL EQUATIONS

© V. S. Treshchev

Conditions of solvability of the Cauchy problem for a system of implicit differential equations are offered. The results about vector covering mappings due to E.S. Zhukovsky are used.

Key words: system of differential equations; the Cauchy problem; vector covering mappings; metric spaces.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 14-01-97504).

REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Avakov E.R., Zhukovskiy E.S. Nakryvayushchie otobrazheniya i ih prilozheniya k differentsial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoy // Differentsial'nye uravneniya. 2009. T. 45. № 5. S. 613–634.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O korrektnosti differentsial'nyh uravneniy, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoy // Differentsial'nye uravneniya. 2011. T. 47. № 11. S. 1523–1537.
3. Arutyunov A., de Oliveira V.A., Lobo Pereira F., Zhukovskiy S., Zhukovskiy E. On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. Iss. 1. P. 129–143.
4. Zhukovskiy S.E., Mingaleeva Z.T. O razreshimosti upravlyaemyh sistem // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2014. T. 19. № 2. S. 380–383.
5. Perejra F.L., Zhukovskiy S.E. O Prilozheniyah nakryvayushchih otobrazheniy k zadache Koshi dlya differentsial'nyh vklucheniyy // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2013. T. 18. № 5-2. S. 2626–2628.
6. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. Nakryvayushchie otobrazheniya v proizvedenii metrisheskih prostranstv i kraevye zadachi dlya differentsial'nyh uravneniy, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoy // Differentsial'nye uravneniya. 2013. T. 49. № 4. S. 439–456.
7. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. Ob upravlenii ob"ektami, dvizhenie kotoryh opisyvaetsya neyavnyymi nelinejnymi differentsial'nymi uravneniyami // Avtomatika i telemekhanika. 2015. № 1. S. 31–56.
8. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. O periodicheskoy kraevoy zadache dlya differentsial'nogo uravneniya, ne razreshennogo otnositel'no proizvodnoy // Izvestiya IMI UdGU. 2012. № 1 (39). S. 52–53.
9. Zhukovskiy E.S., Zhukovskaya T.V. Ob usloviyah razreshimosti kraevoy zadachi dlya nelinejnogo abstraktnogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya // Izvestiya IMI UdGU. 2012. № 1 (39). S. 50–51.

10. *Zhukovskiy E.S., Munembe ZH.P.* O vozmushcheniyah mnogoznachnyh vektorno nakryvayushchih otobrazheniy // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2015. T. 20. № 5. S. 1146–1150.

Received 21 March 2016.

Treshchev Valentin Sergeyevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student of the Functional Analysis Department, e-mail: treshchev.math@mail.ru