

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ  
НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© В. С. Трещев

Предлагаются условия разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений неявного вида. Используются результаты о векторно накрывающих отображениях, полученные Е. С. Жуковским.

*Ключевые слова:* система неявных дифференциальных уравнений; задача Коши; векторно накрывающие отображения; метрические пространства.

Идея приложения утверждений о накрывающих отображениях к исследованию неявных дифференциальных уравнений предложена в [1] и развита в ряде работ (см. [2]–[5]). В цитируемых работах рассматривались вопросы существования и продолжаемости решений задачи Коши, их непрерывной зависимости от параметров. В работах [6]–[8] были начаты исследования векторно накрывающих отображений в произведениях метрических пространств, полученные результаты применялись к краевым задачам и задачам управления. В [10] получена теорема о возмущениях векторно накрывающих отображений в произведениях метрических пространств, наделенных векторной метрикой. Эти результаты позволяют более эффективно исследовать различные системы, в том числе, системы неявных дифференциальных уравнений. Здесь методами, основанными на утверждениях о векторно накрывающих отображениях пространств с векторной метрикой, доказывается теорема о разрешимости задачи Коши для системы неявных дифференциальных уравнений. Полученное утверждение уточняет результат [6].

Используются следующие обозначения:  $\mathfrak{I}_m$  — матрица размерности  $m \times m$ , все компоненты которой равны 1,  $I_m$  — единичная  $m \times m$ , матрица,  $\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное вещественное пространство,  $\mathbb{R}_+^n$  — конус векторов с неотрицательными компонентами пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{cl}(\mathbb{R}^n)$  — совокупность непустых замкнутых подмножеств пространства  $\mathbb{R}^n$ ;  $L_\infty([a, b], \mathbb{R})$  — банаово пространство измеримых существенно ограниченных функций  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  с нормой  $\|x\|_{L_\infty([a, b], \mathbb{R})} = \text{vrai sup}_{t \in [a, b]} |x(t)|$ ;  $AC_\infty([a, b], \mathbb{R})$  — банаово пространство абсолютно непрерывных функций, имеющих почти всюду производную  $\dot{x} \in L_\infty([a, b], \mathbb{R})$ , с нормой  $\|x\|_{AC_\infty([a, b], \mathbb{R})} = \|\dot{x}\|_{L_\infty([a, b], \mathbb{R})} + |x(a)|$ .

Пусть заданы метрические пространства  $X_i \doteq (X_i, \rho_{X_i})$ ,  $Y_j \doteq (Y_j, \rho_{Y_j})$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Определим произведение этих пространств

$$\overline{X} = \prod_{i=1}^n X_i, \quad \overline{Y} = \prod_{j=1}^m Y_j$$

и зададим в них векторные метрики, полагая для  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{X}$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \overline{X}$  и  $y = (y_1, \dots, y_m) \in \overline{Y}$ ,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \overline{Y}$

$$\overline{\rho}_X(x, u) = (\rho_{X_1}(x_1, u_1), \dots, \rho_{X_n}(x_n, u_n)), \quad \overline{\rho}_Y(y, \omega) = (\rho_{Y_1}(y_1, \omega_1), \dots, \rho_{Y_m}(y_m, \omega_m)).$$

Обозначим  $B_{X_i}(u_i, d_i) \doteq \{x_i \in X_i : \rho_{X_i}(u_i, x_i) \leq d_i\}$  — замкнутый шар в пространстве  $X_i$  с центром в точке  $u_i \in X_i$  радиуса  $d_i \geq 0$ . Аналогично, обозначим  $B_{Y_j}(\omega_j, r_j)$  замкнутый шар в

пространстве  $(Y_j, \rho_{Y_j})$ . Определим произведения этих шаров

$$\begin{aligned}\overline{B}_{\overline{Y}}(\omega, r) &\doteq \prod_{j=1}^m B_{Y_j}(\omega_j, r_j) = \{y \in \overline{Y}, \bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, \omega) \leq r\}, \text{ где } r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}_+^m, \\ \overline{B}_{\overline{X}}(u, d) &\doteq \prod_{i=1}^n B_{X_i}(u_i, d_i), \text{ где } d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}_+^n.\end{aligned}$$

Определение свойства накрывания отображений, действующих из  $\overline{X}$  в  $\overline{Y}$  предложено в [10]. Приведем определение несколько более общего понятия, предложенного Е. С. Жуковским.

Пусть, задано множество  $W \subset \overline{Y}$ ,  $n \times m$  матрица  $A$  с неотрицательными компонентами  $a_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . По заданным  $u^0 \in \overline{X}$ ,  $R \in \mathbb{R}_+^m$  определим множество

$$\mathfrak{B}(u^0, R) \doteq \{(u, r) \in \overline{B}_{\overline{X}}(u^0, R) \times \mathbb{R}_+^m : Ar + \bar{\rho}_{\overline{X}}(u, u^0) \leq R\}. \quad (1)$$

Определение 1. Отображение  $F: \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$  называем векторно условно  $A$ -накрывающим множество  $W$  на совокупности  $\mathfrak{B}(u^0, R)$  если

$$\begin{aligned}\forall u \in \overline{B}_{\overline{X}}(u^0, R) \quad \forall y \in W \cap F(\overline{X}) \quad A\bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, F(u)) + \bar{\rho}_{\overline{X}}(u, u^0) \leq R \Rightarrow \\ \exists x \in \overline{X} \quad F(x) = y, \quad \bar{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \leq A\bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, F(u)).\end{aligned}$$

Далее будем рассматривать пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ ,  $AC_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$  как произведения соответствующих метрических пространств, т. е. определим в этих пространствах векторные метрики равенствами

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_{\mathbb{R}^n}(d, \gamma) &\doteq (|d_1 - \gamma_1|, \dots, |d_n - \gamma_n|) \quad \forall d, \gamma \in \mathbb{R}^n, \\ \bar{\rho}_{L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)}(y, w) &\doteq (||y_1 - w_1||_{L_\infty([a, b], \mathbb{R})}, \dots, ||y_n - w_n||_{L_\infty([a, b], \mathbb{R})}) \quad \forall y, w \in L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n), \\ \bar{\rho}_{AC_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)}(x, v) &\doteq (||x_1 - v_1||_{AC_\infty([a, b], \mathbb{R})}, \dots, ||x_n - v_n||_{AC_\infty([a, b], \mathbb{R})}) \quad \forall x, v \in AC_\infty([a, b], \mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Пусть заданы функция  $y \in L_\infty([a, b], \mathbb{R}^m)$ , вектор  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  и определена удовлетворяющая условиям Каратеодори (т. е. измеримая по первому и непрерывная по совокупности остальных аргументов) функция  $f = (f_1, \dots, f_m): [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Пусть при любом  $r \in \mathbb{R}_+^m$  существует такая функция  $\eta_r \in L_\infty([a, b], \mathbb{R})$ , что при почти всех  $t \in [a, b]$  и любых  $x, \omega \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, r)$  выполнено неравенство  $|f(t, x, \omega)| \leq \eta_r(t)$ . Рассмотрим при  $t \in [a, b]$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) = y_1(t), \\ f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) = y_2(t), \\ \dots, \\ f_m(t, x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) = y_m(t), \end{array} \right. \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x_1(a) = \gamma_1, \quad x_2(a) = \gamma_2, \quad \dots, \quad x_n(a) = \gamma_n. \quad (3)$$

Пусть  $c \in (a, b]$ . Решением задачи (2), (3), определенным на  $[a, c]$ , будем называть функцию  $x_c \in AC_\infty([a, c], \mathbb{R}^n)$ , удовлетворяющую уравнениям системы (2) при почти всех  $t \in [a, c]$  и начальным условиям (3).

Пусть заданы  $u^0 \in L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ ,  $R \in \mathbb{R}_+^n$ . Определим при каждом  $t \in [a, b]$  совокупность  $\mathfrak{B}(u^0(t), R) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$  равенством (1), где  $\overline{X} = \mathbb{R}^n$ , т. е.

$$\mathfrak{B}(u^0(t), R) \doteq \{(u, r) \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(u^0(t), R) \times \mathbb{R}_+^m : Ar + \bar{\rho}_{\mathbb{R}^n}(u, u^0(t)) \leq R\}.$$

Заметим, что отображение  $t \in [a, b] \mapsto \mathfrak{B}(u^0(t), R) \in \text{cl}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m)$  измеримо. Определим абсолютно непрерывную функцию  $x^0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с компонентами  $x_i^0(t) = \gamma_i + \int_a^t u_i^0(s) ds$  и для некоторого  $\sigma > 0$  положим  $D(t) = \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(x^0(t), \sigma \bar{1})$ ,  $\bar{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [a, b]$ .

Пусть задано  $d \in \mathbb{R}_+^m$ . Определим при почти всех  $t \in [a, b]$ , любом  $x \in D(t)$  множество

$$W(t, x) \doteq \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(f(t, x, u^0(t)), d).$$

Теорема 1. Пусть для некоторых матриц  $A_{n \times m}$  и  $B_{m \times n}$  с неотрицательными компонентами при почти всех  $t \in [a, b]$ , любых  $\omega \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(u^0(t), R)$ ,  $x \in D(t)$  выполнены условия:

отображение  $f(t, x, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  векторно условно  $A$ -накрывающее множество  $W(t, x)$  на совокупности  $\mathfrak{B}(u^0(t), R)$ ;  
отображение  $f(t, \cdot, \omega): D(t) \rightarrow \mathbb{R}^m$   $B$ -липшицево;  
имеет место включение  $y(t) \in f(t, x, \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(u^0(t), R))$ .

Далее, пусть существует такое  $\varepsilon > 0$ , что имеют место неравенства

$$r(y) \doteq (I_m + \varepsilon \mathfrak{J}_m) \overline{\rho}_{L_\infty([a, b], \mathbb{R}^m)}(y^0, y) \leq d, \quad Ar(y) \leq R, \quad \text{где } y^0(t) = f(t, x^0(t), u^0(t)).$$

Тогда для некоторого значения  $c \in (a, b]$  существует определенное на  $[a, c]$  решение  $x_c \in AC_\infty([a, c], \mathbb{R}^n)$  задачи (1), (2), удовлетворяющее оценке

$$\overline{\rho}_{L_\infty([a, a+\delta], \mathbb{R}^n)}(\dot{x}_c, P_c u^0) \leq A(I_m + \varepsilon \mathfrak{J}_m) \overline{\rho}_{L_\infty([a, c], \mathbb{R}^m)}(P_c y^0, P_c y),$$

здесь символом  $P_c$  обозначена операция сужения на  $[a, c]$  соответствующих функций.

Это утверждение уточняет результаты о разрешимости задачи Коши для неявных дифференциальных уравнений цитируемых выше работ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
2. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.
3. Arutyunov A., de Oliveira V.A., Lobo Pereira F., Zhukovskiy S., Zhukovskiy E. On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. Iss. 1. P. 129–143.
4. Жуковский С.Е., Минзялева З.Т. О разрешимости управляемых систем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2014. Т. 19. № 2. С. 380–383.
5. Перейра Ф.Л., Жуковский С.Е. О Приложениях накрывающих отображений к задаче Коши для дифференциальных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2626–2628.
6. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–456.
7. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.
8. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. О периодической краевой задаче для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Известия ИМИ УдГУ. 2012. № 1 (39). С. 52–53.
9. Жуковский Е.С., Жуковская Т.В. Об условиях разрешимости краевой задачи для нелинейного абстрактного функционально-дифференциального уравнения // Известия ИМИ УдГУ. 2012. № 1 (39). С. 50–51.
10. Жуковский Е.С., Мунембе Ж. П. О возмущениях многозначных векторно накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. № 5. С. 1146–1150.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-97504).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Трещев Валентин Сергеевич, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: treshchev.math@mail.ru

UDC 517.988.5

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-432-436

## ABOUT THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF IMPLICIT DIFFERENTIAL EQUATIONS

© V. S. Treshchev

Conditions of solvability of the Cauchy problem for a system of implicit differential equations are offered. The results about vector covering mappings due to E.S. Zhukovsky are used.

*Key words:* system of differential equations; the Cauchy problem; vector covering mappings; metric spaces.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 14-01-97504).

### REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Avakov E.R., Zhukovskiy E.S. Nakryvayushchie otobrazheniya i ih prilozheniya k differencial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoy // Differencial'nye uravneniya. 2009. T. 45. № 5. S. 613–634.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O korrektnosti differencial'nyh uravneniy, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoy // Differencial'nye uravneniya. 2011. T. 47. № 11. S. 1523–1537.
3. Arutyunov A., de Oliveira V.A., Lobo Pereira F., Zhukovskiy S., Zhukovskiy E. On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. Iss. 1. P. 129–143.
4. Zhukovskiy S.E., Mingaleeva Z.T. O razreshimosti upravlyayemyh sistem // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2014. T. 19. № 2. S. 380–383.
5. Perejra F.L., Zhukovskiy S.E. O Prilozheniyah nakryvayushchih otobrazheniy k zadache Koshi dlya differencial'nyh vklyucheniy // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2013. T. 18. № 5-2. S. 2626–2628.
6. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. Nakryvayushchie otobrazheniya v proizvedenii metricheskikh prostranstv i kraevye zadachi dlya differencial'nyh uravneniy, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoy // Differencial'nye uravneniya. 2013. T. 49. № 4. S. 439–456.
7. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. Ob upravlenii ob"ektami, dvizhenie kotoryh opisyvaetsya neyavnymi nelinejnymi differencial'nyimi uravneniyami // Avtomatika i telemekhanika. 2015. № 1. S. 31–56.
8. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. O periodicheskoy kraevoy zadache dlya differencial'nogo uravneniya, ne razreshennogo otnositel'no proizvodnoy // Izvestiya IMI UdGU. 2012. № 1 (39). S. 52–53.
9. Zhukovskiy E.S., Zhukovskaya T.V. Ob usloviyah razreshimosti kraevoy zadachi dlya nelinejnogo abstraktnogo funkcional'no-differencial'nogo uravneniya // Izvestiya IMI UdGU. 2012. № 1 (39). S. 50–51.

10. *Zhukovskiy E.S., Munembe ZH.P. O vozmushcheniyah mnogoznachnyh vektorno nakryvayushchih otobrazheniy* // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2015. T. 20. № 5. S. 1146–1150.

Received 21 March 2016.

Treshchev Valentin Sergeyevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student of the Functional Analysis Department, e-mail: treshchev.math@mail.ru