

УДК 519.85:612.821-056.2  
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1335-1340

## МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

© И. А. Финогенко<sup>1)</sup>, М. П. Дьякович<sup>2),3)</sup>

<sup>1)</sup> Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН  
664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134,  
E-mail: fin@icc.ru

<sup>2)</sup> Ангарский государственный технический университет  
665835, Российская Федерация, г. Ангарск, ул. Чайковского, 60

<sup>3)</sup> Восточно-Сибирский институт медико-экологических исследований СО РАН  
665835, Российская Федерация, г. Ангарск, 12-й микрорайон, 3  
E-mail: marik914@rambler.ru

В статье предлагается метод построения интегральных показателей для систем, имеющих иерархическую структуру. Особенностью исследуемых систем является многомерность и разнородность составляющих их характеристик. Задача построения комплексной оценки состояния таких объектов или процессов является актуальной для различных отраслей знаний (экономики, экологии, медицины). С математической точки зрения построение интегральных показателей относится к задачам многокритериального анализа иерархий, поэтому первым шагом при построении интегрального показателя является декомпозиция объекта на составляющие его части. Такую декомпозицию удобно представлять в виде графа. Скаляризация векторного критерия состояния системы реализуется в линейной функции — вложенной линейной свертки с весовыми коэффициентами значимости каждого критерия. Основная проблема построения линейной свертки состоит в выборе весовых коэффициентов. Здесь для этой цели используется метод анализа иерархий, позволяющий обоснованно переводить качественные градации состояния системы в количественные. Далее интегральный показатель рассматривается как целевая функция, подлежащая улучшению некоторым оптимальным образом.

*Ключевые слова:* вложенная линейная свертка; метод анализа иерархий; интегральный показатель; связанное со здоровьем качество жизни

### 1. Введение

В этой статье мы продолжаем исследования, начатые в работе [1]. Основной результат состоит в том, что предложен новый подход к построению интегральных показателей систем с векторным критерием качества (состояния) многомерных систем. Отметим, что в задачах многокритериального анализа систем часто возникает задача определения относительной значимости критериев или характеристик системы, которая связана с определенными трудностями и выполняется методами экспертного опроса, что неизбежно привносит элементы субъективности. Многое зависит от опытности и квалификации эксперта, а также от системы его индивидуальных предпочтений и набора приоритетов. Ранжирование или расстановка приоритетов критериев означает, что должны быть определены коэффициенты значимости этих критериев, которые мы будем здесь называть весовыми коэффициентами. Обычно эксперт располагает какой-либо информацией качественного характера о состоянии или поведении системы,

а также о целях, которые необходимо достигать, управляя системой. Одним из современных методов преобразования качественной информации об исследуемом объекте в количественную является метод анализа иерархий (МАИ). Эта теория зародилась в начале семидесятых годов прошлого столетия в работах американского ученого-математика Т. Саати [2, 3] и хорошо себя зарекомендовала в решении задач, где необходим выбор и принятие решений на основе альтернатив. Но основные процедуры МАИ позволяют ранжировать те или иные характеристики системы по важности с помощью весовых коэффициентов, которые затем могут использоваться и для других целей, не связанных с выбором. Эти процедуры известны [1-4] и мы здесь на них детально не останавливаемся. Отметим лишь, что основой являются так называемые матрицы парных сравнений, для составления которых необходимы эксперты в предметной области, а дальнейшие действия осуществляются чисто математическими методами линейной алгебры. Отметим также, что МАИ позволяет осуществлять проверку достоверности суждений эксперта при сравнении (возможно разнородных) характеристик системы. Одновременно эксперту рекомендуется сравнивать не более 9-ти характеристик, но общее их число может быть значительно больше за счет того, что система представлена в виде многоуровневой иерархии.

Одним из методов изучения и оптимизации многомерных систем является метод скаляризации векторных критериев качества [5]. Основой метода является выбор той или иной скалярной функции векторного аргумента в зависимости от целей исследований. Одной из них и самой простой является линейная функция, и тогда метод скаляризации называется методом линейной свертки. Она используется, если число критериев качества системы невелико. Если критериев много и они распределены по уровням иерархической модели исследуемого объекта, то целесообразно вначале построить свертки на нижнем уровне иерархии. Метод вложенной линейной свертки состоит в том, что компонентами каждого вышестоящего уровня иерархии будут являться построенные ранее свертки нижестоящего уровня, начиная с самого нижнего и, поднимаясь по вертикали иерархии, до самого верхнего (см. [6, 7]), который называется целью или фокусом иерархии. В итоге будет получена линейная скалярная функция векторного аргумента, коэффициенты которой вычисляются с использованием МАИ. Как правило, интегральный показатель (индикатор) систем получается из свертки после нормирования. Он характеризует общее состояние системы, выступает механизмом обратной связи между субъектом и объектом управления для улучшения состояния или качества объекта или служит целевой функцией в задаче оптимизации системы с некоторой целью ее функционирования. Метод скаляризации векторного критерия качества и МАИ хорошо дополняют друг друга, позволяя изучать многомерные системы с возможно разнородными критериями. В частности системы или объекты, возникающие в медицине при изучении связанного со здоровьем качества жизни населения [1, 4, 7]. Целью данной статьи является описание комбинированного метода вложенной линейной свертки и МАИ для построения интегральных показателей многомерных систем.

## 2. Основная часть

Пусть  $M$  — произвольное множество. Любое подмножество  $R$  из декартона произведения  $M \times M$  называется бинарным отношением и бинарное отношение называется отношением частичного порядка, если выполняются следующие свойства (см. [5]):

1.  $(x, x) \in R$  (рефлексивность);
2. Если  $(x, y) \in R$  и  $(y, x) \in R$ , то  $x = y$  (антисимметричность);
3. Если  $(x, y) \in R$  и  $(y, z) \in R$ , то  $(x, z) \in R$  (транзитивность).

Если  $(x, y) \in R$ , то говорят, что  $x$  не превосходит (подчинен)  $y$ , а  $y$  доминирует над  $x$ . Могут также употребляться термины "  $x$  хуже  $y$ " и "  $y$  лучше  $x$  ".

Элементы  $n$ -мерного векторного пространства будем обозначать  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . На множестве всех пар векторов частичный порядок может быть определен следующим образом. Будем говорить, что вектор  $x$  подчинен вектору  $y$ , если для всех индексов  $i = 1, \dots, n$  выполняется  $x_i \leq y_i$ . Такую упорядоченность будем называть покоординатной. Для покоординатной упорядоченности во множестве всех векторов очевидно имеются несравнимые элементы и это является основной проблемой векторной оптимизации. Скаляризация векторного критерия качества — один из путей решения этой проблемы.

Пусть  $w = (w_1, \dots, w_n)$  — некоторый фиксированный вектор. Обозначим через  $\langle w, x \rangle = \sum_1^n w_i x_i$  скалярное произведение векторов  $w$  и  $x$ . Будем говорить, что вектор  $x$  подчинен вектору  $y$ , если  $\langle w, x \rangle \leq \langle w, y \rangle$ . Такое бинарное отношение называется квазипорядком, оно не обладает свойством антисимметричности и не содержит несравнимых элементов. Но здесь возникает проблема в том, что по сути сравниваются уже не отдельные элементы, а множества элементов, которые называются классами эквивалентности. На плоскости это будут семейства прямых линий, зависящих от вектора  $w$ .

Опишем иерархическую структуру исследуемой системы. Пусть  $X_1$  обозначает основную характеристику исследуемого объекта. Она имеет количественный показатель  $x_1$  и весовой коэффициент  $w_1 = 1$ . Предположим, что  $X_1$  распадается на несколько непересекающихся множеств  $X_{21}, X_{22}, \dots$ . Будем говорить, что эти характеристики образуют второй уровень декомпозиции объекта. Они имеют количественные показатели  $x_{21}, x_{22}$  и весовые коэффициенты  $w_{21}, w_{22}, \dots$ . Каждое из множеств  $X_{21}, X_{22}, \dots$  в свою очередь могут иметь непересекающиеся составляющие, которые образуют третий уровень декомпозиции и т. д. Полученную таким образом конструкцию будем называть структурной моделью качества исследуемой системы (СМК).

Вектор показателей характеристик нижнего уровня СМК объекта, который и подлежит сравнительному анализу, будем называть его состоянием (качеством). Весовые коэффициенты определяют относительную значимость отдельных характеристик объекта для оценки его качества и вычисляются с помощью процедур МАИ на каждом уровне СМК. Они заключены между 0 и 1.

Обычную линейную свертку можно использовать, если число критериев качества объекта (характеристик декомпозиции) невелико. Тогда их легко ранжировать по значимости. Если же критериев много и они распределены по уровням СМК, то возникает задача расстановки весовых коэффициентов не только по горизонталям СМК с учетом значимости характеристик одного уровня, но и распространение весовых коэффициентов по вертикалям от высшестоящих уровней на нижестоящие. Предлагается следующий метод достижения этой цели. Вначале расставляются весовые коэффициенты на все уровнях для всех характеристик СМК. Затем на самом нижнем уровне СМК строятся линейные свертки для декомпозиции каждой характеристики предыдущего уровня. Эти свертки служат компонентами линейных сверток на высшем уровне и т. д. Полученную в итоге свертку на самом верхнем уровне будем называть вложенной линейной сверткой для векторного критерия качества всего объекта. Она имеет вид

$$J(w, x) = w^1 x_1 + w^2 x_2 + \dots, \quad (1)$$

где  $x_1, x_2, \dots$  — вектор нижнего уровня СМК,  $w^1, w^2, \dots$  — вектор весовых коэффициентов, компоненты которого сформированы следующим образом: это произведения весовых коэффициентов всех уровней СМК начиная с первого по иерархии по декомпозициям составляющих ее характеристик. Например, пусть  $X_{ij}$  —  $j$ -я характеристика на  $i$ -м уровне СМК, которая на нижестоящем уровне декомпозируется на  $X_{i+1,1}, X_{i+1,2}, \dots$  с весовыми коэффициентами  $w_{i+1,1}, w_{i+1,2}, \dots$ . Они умножаются на  $w_{i,j}$  и т. д. до самого нижнего уровня, где и получаем весовые коэффициенты вложенной линейной свертки. С использованием МАИ сумма всех весовых коэффициентов будет равна 1.

Примем следующее соглашение (см. [7]).

1. Характеристики одного и того же уровня СМК попарно не пересекаются. Это означает, что один и тот же количественный показатель не будет использоваться дважды в интегральных оценках качества уровней и СМК в целом.

2. Практика показывает, что эксперту не следует одновременно сравнивать более девяти объектов.

3. Декомпозиция характеристики с нулевым весовым коэффициентом прекращается.

4. Первый уровень (вершина СМК) имеет весовой коэффициент, равный единице.

5. Для всех  $i = 1, 2, \dots$  выполняется  $0 \leq x_i \leq L$ .

Интегральный показатель запишем в виде

$$I(w, x) = J(w, x)/L. \quad (2)$$

Очевидно, что  $0 \leq I(w, x) \leq 1$  и  $I(w, x)$  тем ближе к 1, чем выше значения  $x_i$ . Максимум, равный 1, достигается при  $x_i = L$  для всех  $i = 1, 2, \dots$ .

Любая функция векторного аргумента в направлении градиента растет быстрее всего. Поэтому может быть предложена следующая процедура улучшения показателя  $I(w, x)$  до максимального: из начального состояния вектора показателей следует двигаться в направлении градиента  $\nabla I(w, x) = w/L$ , который представляет собой вектор весовых коэффициентов, поделенный на  $L$ . После того, как один (или несколько) из показателей достигает своего максимального значения  $L$ , весовой коэффициент при них приравнивается нулю, полученное состояние принимается за начальное и процедура повторяется. Не более, чем через  $m$  шагов интегральный показатель достигнет своего максимального значения, равного 1, где  $m$  — размерность вектора состояния системы на нижнем уровне СМК. Иными словами можно сказать так: для наивысшего улучшения  $I(w, x)$  все показатели должны изменяться пропорционально своим весовым коэффициентам с одним и тем же коэффициентом пропорциональности.

В заключение отметим, что примеры построения СМК для таких систем, как связанное со здоровьем качество жизни населения (СЗКЖ), и исследование их методом вложенных линейных сверток и МАИ, можно найти в статьях [1, 4, 7]. В статье [1] в основу построения СМК для системы СЗКЖ положен опросник SF-36 в соответствии с инструкциями, подготовленной компанией "Преферанс". Он широко распространен в США и странах Европы при проведении исследований качества жизни. Цель СМК обозначена, как качество жизни. Это основная характеристика. Она разбита на две: физический и психический компоненты здоровья, каждый из которых подразделяется еще на четыре компонента и показатели которых варьируются между 0 и  $L = 100$ , где 100 представляет полное здоровье.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Финогенко И.А., Дьякович М.П., Блохин А.А. Методология оценивания качества жизни, связанного со здоровьем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 1. С. 121–130.
2. Саати Т. Принятие решений при зависимостях и обратных связях. Аналитические сети. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2001.
3. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993.
4. Финогенко И.А., Дьякович М.П. Применение метода анализа иерархий в одной задаче системного анализа социальных систем // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2015. № 3 (47). С. 110–116.
5. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации и принятия решений. СПб.: Лань, 2001.
6. Воронин А.Н. Вложенные скалярные свертки // Проблемы управления и информатики. 2003. № 5. С. 10–21.
7. Финогенко И.А., Финогенко В.И., Дьякович М.П. Метод вложенных линейных сверток для оценки качества здоровья населения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Иркутск, 2008. № 2(18). С. 154–160.

Поступила в редакцию 16 августа 2017 г.

Финогенко Иван Анатольевич, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, e-mail: fin@icc.ru

Дьякович Марина Пинхасовна, Ангарский государственный технический университет, г. Ангарск, Российская Федерация, доктор биологических наук, профессор, зав. кафедрой экономики, маркетинга и психологии управления; Восточно-Сибирский институт медико-экологических исследований, г. Ангарск, Российская Федерация, ведущий научный сотрудник, e-mail: marik914@rambler.ru

UDC 519.85:612.821-056.2

DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1335-1340

## METHOD OF ANALYSIS OF HIERARCHIES AND CONSTRUCTION INTEGRATED PARAMETERS FOR MULTIPLE SYSTEMS

© I. A. Finogenko<sup>1)</sup>, M. P. D'yakovich<sup>2),3)</sup>

<sup>1)</sup> Institute of System Dynamics and Control Theory after V.M. Matrosov of SB RAS  
134 Lermontov St., Irkutsk, Russian Federation, 664033

E-mail: fin@icc.ru

<sup>2)</sup> Angarsk State Technical University

60 Tchaikovsky St., Angarsk, Russian Federation, 665835

<sup>3)</sup> East-Siberian Institute of Medical and Ecological Research  
3, 12-a md., Angarsk, Russian Federation, 665827

E-mail: marik914@rambler.ru

In article the method of construction of integrated parameters for the systems having hierarchical structure is offered. Feature of researched systems will be their multidimensionality and heterogeneity of characteristics making them. The problem of construction of a complex estimation of a condition of such objects or processes is actual for various branches of knowledge (economy, ecology, medicine). From the mathematical point of view construction of integrated parameters concerns to problems multicriteria the analysis of hierarchies, therefore a first step at construction of an integrated parameter is decomposition of object on parts making it. Such decomposition is convenient for representing as the graph. We use a linear function — the enclosed linear convolution with weight factors of the importance of each criterion to make a scalar function from vector criterion. Weight factors are in turn determined by method of hierarchy's analysis, allowing to translate qualitative gradation of a condition of system in quantitative. Further the integrated parameter is considered as the criterion function subject to improvement in some optimum image.

*Keywords:* method of hierarchy's analysis; integrated parameter; nested linear convolution; health-related quality

### REFERENCES

1. Finogenko I.A., D'yakovich M.P., Blokhin A.A. The methodology of assessment of health-related quality of life // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2016. V. 21. Iss. 1. P. 121–130.
2. Saati T. Prinyatie reshenii pri zavisimostyakh i obratnykh svyazyakh. Analiticheskie seti. M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2001.

3. Saati T. Prinyatie reshenii. Metod analiza ierarkhii. M.: Radio i svyaz', 1993.
4. Finogenko I.A., D'yakovich M.P. Application of the method of hierarchy analysis in a task of system analysis for social systems // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2015. № 3(47). P. 110–116.
5. Chernorutskii I.G. Metody optimizatsii i prinyatiya reshenii. SPb.: Lan', 2001.
6. Voronin A.N. Vlozhennye skalyarnye svertki // Problemy upravleniya i informatiki. 2003. № 5. S. 10–21.
7. Finogenko I.A., Finogenko V.I., D'yakovich M.P. Method of nested linear convolutions for estimating the population's health // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2008. № 2(18). P. 154–160.

Received 16 August 2017

Finogenko Ivan Anatol'evich, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, Institute of System Dynamics and Control Theory after V.M. Matrosov, Irkutsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Chief Researcher, e-mail: fin@icc.ru

D'yakovich Marina Pinhasovna, Angarsk State Technical University, Angarsk, the Russian Federation, Doctor of Biological sciences, Professor, Head of Economics, Marketing and Management Psychology Department; East-Siberian Institute of Medical and Ecological Research, Angarsk, the Russian Federation, Leading Researcher, e-mail: marik914@rambler.ru

**Для цитирования:** Финогенко И.А., Дьякович М.П. Метод анализа иерархий и построение интегральных показателей сложных систем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1335–1340. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1335-1340.

**For citation:** Finogenko I.A., D'yakovich M.P. Metod analiza ierarhii i postroenie integral'nyh pokazateleii slozhnyh sistem [Method of analysis of hierarchies and construction integrated parameters for multiple systems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1335–1340. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1335-1340 (In Russian, Abstr. in Engl.).