УДК 517
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1329-1334

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© **Х. М. Т. Тахир**

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: khalidtahir89@yahoo.com

Получено утверждение о функционально-дифференциальном неравенстве, аналогичное известной теореме Чаплыгина. Результат может использоваться для нахождения оценок решений конкретных функционально-дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: задача Коши; функционально-дифференциальное уравнение; теорема Чаплыгина о дифференциальном неравенстве

На основании утверждений о неподвижных точках монотонных операторов в нормированных пространствах (см. §33, §38 [1]) получены условия существования решения задачи Коши и найдены оценки решений.

Будем обозначать: $L = L([0,T],\mathbb{R})$ — банахово пространство суммируемых функций $y:[0,T]\to\mathbb{R},$ $\|y\|_L = \int\limits_0^t |y(t)|dt;$ $AC = AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to\mathbb{R},$ производная которых $\dot{x}\in L,$ с нормой $\|x\|_{AC} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_L;$ $C = C([0,T],\mathbb{R})$ — банахово пространство непрерывных функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}, \|x\|_C = \max\limits_{t\in[0,T]} |x(t)|.$

Пусть заданы: линейный вольтерров оператор $\mathcal{L}: AC([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R}),$ произвольный (вообще говоря, нелинейный) вольтерров оператор $F: AC([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R})$ и $\alpha\in\mathbb{R}.$ Для функционально-дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}x = Fx \tag{1}$$

рассмотрим задачу Коши с начальным условием

$$x(0) = \alpha. \tag{2}$$

Выберем произвольную функцию $f\in L([0,T],\mathbb{R})$ и рассмотрим также задачу Коши для соответствующего линейного уравнения

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(0) = \alpha. \tag{3}$$

При естественных предположениях (а именно, в случае вольтерровой обратимости главной части оператора $\mathcal{L}$, подробнее (см. [2], с.35) задача (3) имеет единственное решение, и это решение представимо в виде

$$x(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^t C(t,s)\, f(s)\, ds, \tag{4}$$

где $X(\cdot)\in AC([0,T],\mathbb{R})$ — фундаментальное решение однородного уравнения $\mathcal{L}x=0$, $C(t,s)$ — функция Коши, а выражение $\int\limits_0^t C(t,s)\,f(s)\,ds$ называют оператором Коши. Такая запись линейного ограниченного оператора Коши

$$f\in L([0,T],\mathbb{R})\mapsto\int\limits_0^{(\cdot)} C(\cdot,s)\,f(s)\,ds\in AC([0,T],\mathbb{R})$$

является следствием интегрального представления любого линейного ограниченного оператора $L([0,T],\mathbb{R})\to AC([0,T],\mathbb{R})$ (см. [3], с. 302–305). Согласно этому представлению функция Коши $C(t,s)$ измерима (по плоской мере) и существенно ограничена. Вследствие вольтерровости интегрального оператора Коши выполнено $C(t,s)=0$ при $s>t$ (см., например, [4], теорема 3), что позволяет этот оператор записывать как интеграл на множестве $[0,t]$, а не на всем отрезке $[0,T]$. Свойства функции Коши конкретных линейных функционально-дифференциальных уравнений изучены в [5].

Определим в пространстве $C=C([0,T],\mathbb{R})$ конус C_+ неотрицательных функций и зададим упорядоченность, полагая для любых $x,u\in C$ выполненным неравенство $x\geq u$, если $x-u\in$ $\in C_+$, то есть, если $x(t)-u(t)\geq 0$ при всех $t\in[0,T]$. Аналогично, определим в $L=L([0,T],\mathbb{R})$ и $AC=AC([0,T],\mathbb{R})$ конусы L_+ и AC_+ неотрицательных функций и порядок

$$\forall y,z\in L\;\; y\geq z\;\Leftrightarrow\; y-z\in L_+,\quad \forall y,z\in AC\;\; y\geq z\;\Leftrightarrow\; y-z\in AC_+.$$

Отметим, что в пространстве L конус L_+ является *сильно миниэдральным*, то есть каждое ограниченное сверху (снизу) по норме множество обладает точной верхней (нижней) границей, и *вполне правильным*, то есть любая монотонная ограниченная по норме последовательность сходится (см.[1], с. 256, 257). Конусы $C_+\subset C$, $AC_+\subset AC$, перечисленными свойствами не обладают.

Сформулируем основной результат работы.

Т е о р е м а. *Пусть для функции Коши линейного уравнения (3) при* $0\leq s\leq t\leq T$ *выполнено неравенство* $C(t,s)\geq 0$. *Пусть вольтерров оператор* $F:AC([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R})$ *является монотонным. Тогда, если для некоторой абсолютно непрерывной функции* u_0 *справедливы неравенства*

$$\dot u_0\geq Fu_0,\quad u_0(0)\geq\alpha,$$

то существует глобальное или предельно продолженное решение $\tilde x$ *задачи Коши (1), (2), удовлетворяющее на своей области определения неравенству*

$$\dot{\tilde x}(t)\leq\dot u(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача (1), (2) равносильна уравнению

$$\dot x=F\Big(\alpha X+\int\limits_0^{(\cdot)} C(\cdot,s)\,\dot x(s)\,ds\Big).$$

Обозначим $\dot x=z$, получим уравнение

$$z=F\Big(\alpha X+\int\limits_0^{(\cdot)} C(\cdot,s)\,z(s)\,ds\Big)\tag{5}$$

в пространстве $L=L([0,T],\mathbb{R})$. Определим отображение

$$\Psi : L([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R}), \quad \Psi z = F\Big(\alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} C(\cdot,s)\, z(s)\, ds\Big).$$

Заметим, что являясь композицией вольтерровых отображений, оператор Ψ вольтерров.

Покажем, что уравнение (5) имеет локальное решение.

Для произвольного $\tau\in(0,T)$ определим отображения:

$$\Pi^\tau \doteq \Pi^\tau_{L([0,T],\mathbb{R})} : L([0,\tau],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R}),$$

$$(\Pi^\tau z_\tau)(t) = \begin{cases} z_\tau(t), & \text{если} \quad t\in[0,\tau], \\ 0, & \text{если} \quad t\in(\tau,T], \end{cases} \qquad \forall z_\tau \in L([0,\tau],\mathbb{R});$$

$$P^\tau \doteq P^\tau_{L([0,T],\mathbb{R})} : L([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,\tau],\mathbb{R}), \quad (P^\tau z)(t) = z(t), \quad t\in[0,\tau], \quad z\in L([0,T],\mathbb{R}).$$

Определим функции $x_0(t)=\alpha X(t)-1$, $v_0(t)=(Fx_0)(t)$, $w_0(t)=\min\{v_0(t),\dot u_0(t)\}$, $t\in[0,t]$. Найдем $\tau>0$ так, чтобы $\int\limits_0^t C(t,s)\, w_0(s)\, ds \geq -1$ при $t\in[0,\tau]$. Это возможно, так как вследствие ограниченности функции Коши функция $\int\limits_0^t C(t,s)\, w_0(s)\, ds$ непрерывна по t и $\int\limits_0^0 C(0,s)\, w_0(s)\, ds = 0$. Тогда на отрезке $[0,\tau]$ выполнено

$$w_0(t) \leq (Fx_0)(t) = \big(F(\alpha X(\cdot)-1)\big)(t) \leq F\Big(\alpha X(\cdot) + \int\limits_0^{(\cdot)} C(\cdot,s)\, w_0(s)\, ds\Big)(t).$$

При $t\in[0,\tau]$ уравнение (5) запишем в виде операторного уравнения

$$z_\tau = P^\tau \Psi \Pi^\tau z_\tau. \tag{6}$$

Для функций $w_{0\tau}=P^\tau w_0$ и $\dot u_{0\tau}=P^\tau \dot u_0$ выполнены неравенства

$$w_{0\tau} \leq \dot u_{0\tau}, \quad w_{0\tau} \leq P^\tau\Psi\Pi^\tau w_{0\tau}, \quad \dot u_{0\tau} \geq P^\tau\Psi\Pi^\tau \dot u_{0\tau}.$$

Таким образом, монотонный оператор $P^\tau\Psi\Pi^\tau : L([0,\tau],\mathbb{R}) \to L([0,\tau],\mathbb{R})$ отображает в себя ограниченное по конусу множество $[w_{0\tau},\dot u_{0\tau}]=\{z: w_{0\tau}\leq z\leq \dot u_{0\tau}\}$. Так как конус $L_+\subset L$ является вполне правильным, то монотонный оператор $P^\tau\Psi\Pi^\tau$ обладает свойством предельной монотонной компактности (см. [1], с. 307, 308), и согласно теореме 38.2 из [1] существует решение $\tilde z_\tau \in L([0,\tau],\mathbb{R})$ уравнения (6), удовлетворяющее неравенствам

$$w_{0\tau} \leq \tilde z_\tau \leq \dot u_{0\tau}.$$

Это значит, что существует локальное решение $\tilde x_\tau$ задачи (1), (2), для которого при п.в $t\in[0,\tau]$ выполнено $\dot{\tilde x}_\tau(t) \leq \dot u_0(t)$.

Теперь докажем, что любое локальное решение $\tilde x_\nu : [0,\nu]\to\mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенству $\dot{\tilde x}_(t) \leq \dot u(t)$, $t\in[0,\nu]$, можно продолжить на некоторый больший отрезок.

Определим $\tilde z_\nu = \dot{\tilde x}_\nu$, эта функция является локальным решением уравнения (5). Определим функции

$$\tilde x_0(t) = \begin{cases} \alpha X(t) + \int\limits_0^t C(t,s)\tilde z_\nu(s) ds, & t\in[0,\nu], \\ \alpha X(t) + \int\limits_0^\nu C(t,s)\tilde z_\nu(s) ds - 1, & t\in(\nu,T], \end{cases}$$

$$\tilde v_0(t) = (F\tilde x_0)(t), \quad t \in [0,T].$$

Имеем $\tilde v_0(t) = \tilde z_\nu(t)$ на $[0,\nu]$. Далее определим функции

$$\vartheta(t) = \begin{cases} \tilde z_\nu(t), & t \in [0,\nu], \\ \dot{\tilde u}_0(t), & t \in (\nu,T], \end{cases} \qquad \tilde w_0(t) = \min\{\tilde v_0(t), \vartheta(t)\}, \quad t \in [0,T].$$

Найдем $\Delta_0 > 0$ так, чтобы $\int\limits_\nu^t C(t,s)\tilde w_0(s)ds \geq -1$ при $t \in [\nu, \nu+\Delta_0]$. Это возможно, так как функция $\int\limits_\nu^t C(t,s)\tilde w_0(s)ds$ непрерывна но t и $\int\limits_\nu^\nu C(t,s)\tilde w_0(s) = 0$. Тогда на отрезке $[0,\nu]$ выполнено $\tilde w_0(t) = \tilde z_\nu(t)$, а на $(\nu,\nu+\Delta_0]$ имеем

$$\tilde w_0(t) \leq \tilde v_0(t) = (F\tilde x_0)(t) = F\Big(\alpha X(\cdot) + \int\limits_0^\nu C(\cdot,s)\tilde z_\nu(s)ds - 1\Big)(t) \leq$$

$$\leq F\Big(\alpha X(\cdot) + \int\limits_0^\nu C(\cdot,s)\tilde z_\nu(s)ds + \int\limits_\nu^t C(\cdot,s)\tilde w_0(s)ds\Big)(t) = F\Big(\alpha X(\cdot) + \int\limits_0^t C(\cdot,s)\tilde w_0(s)ds\Big)(t).$$

Определим

$$\tilde x^0(t) = \begin{cases} \alpha X(t) + \int\limits_0^t C(t,s)\tilde z_\nu(s)ds, & t \in [0,\nu], \\ \alpha X(t) + \int\limits_0^\nu C(t,s)\tilde z_\nu(s)ds + 1, & t \in (\nu,T]. \end{cases}$$

Для этой функции справедливо неравенство $\tilde x^0(t) \geq \tilde x_0(t)$ при всех $t \in [0,T]$. Положим $\tilde v^0(t) = \big(F\tilde x^0\big)(t), t \in [0,T]$. Очевидно, $\tilde v^0(t) = \tilde z_\nu(t)$ на $[0,\nu]$, и $\tilde v^0(t) \geq \tilde v_0(t)$ на всем отрезке $[0,T]$. Далее, определим функцию $\tilde w^0(t) = \max\{\tilde v^0(t), \vartheta(t)\}$, $t \in [0,T]$. Имеем $\tilde w^0(t) \geq \tilde w_0(t)$, $t \in [0,T]$.

Так как функция $\int\limits_\nu^t C(t,s)\tilde w^0(s)ds$ непрерывна t и $\int\limits_\nu^\nu C(t,s)\tilde w^0(s)ds = 0$, то существует $\Delta^0 > 0$, для которого $\int\limits_\nu^t C(t,s)\tilde w^0(s)ds \leq 1$ при всех $t \in [\nu, \nu+\Delta^0]$. Тогда на отрезке $[0,\nu]$ выполнено $\tilde w^0(t) = \tilde z_\nu(t)$, а не интервале $[\nu, \nu+\Delta^0]$ справедливы соотношения

$$\tilde w^0(t) \geq \tilde v^0(t) = (F\tilde x^0)(t) = F\Big(\alpha X(\cdot) + \int\limits_0^\nu C(\cdot,s)\tilde z_\nu(s)ds + 1\Big)(t) \geq$$

$$\geq F\Big(\alpha X(\cdot) + \int\limits_0^\nu C(\cdot,s)\tilde z_\nu(s)ds + \int\limits_\nu^t C(\cdot,s)\tilde w^0(s)ds\Big)(t) = F\Big(\alpha X(\cdot) + \int\limits_0^t C(\cdot,s)\tilde w^0(s)ds\Big)(t).$$

Пусть $\Delta = \min\{\Delta_0, \Delta^0\}$. При п.в $t \in [0, \nu+\Delta]$ выполнены неравенства

$$\tilde w(t) \leq (\Psi\tilde w_0)(t), \quad \tilde w^0(t) \geq (\Psi w^0)(t), \quad \tilde w_0(t) \leq \tilde w^0(t).$$

Таким образом монотонный оператор $P^{\nu+\Delta}\Psi\Pi^{\nu+\Delta} : L([0,\nu+\Delta],\mathbb{R}) \to L([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})$ отображает в себя ограниченное по конусу множество

$$[\tilde w_{0\,\nu+\Delta}, \tilde w_{0\,\nu+\Delta}] = \{z \in L([0,\nu+\Delta],\mathbb{R}) :\, \tilde w_{0\,\nu+\Delta} \leq z \leq \tilde w^0_{\nu+\Delta}\}.$$

Согласно теореме 38.2 из [1] существует решение $\tilde{z}_{\nu+\Delta} \in L([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})$ уравнения $\tilde{z}_{\nu+\Delta} = P^{\nu+\Delta}\Psi\Pi^{\nu+\Delta} z_{\nu+\Delta}$, удовлетворяющее неравенствам $\tilde{w}_0(t) \le \tilde{z}_{\nu+\Delta}(t) \le \tilde{w}^0(t)$, $t \in +[0,\nu+\Delta]$. Так как $\tilde{w}_0(t) = \tilde{w}^0(t) = \tilde{z}_\nu(t)$, $t \in [0,\nu]$, то $\tilde{z}_{\nu+\Delta}(t) = \tilde{z}_\nu(t)$, $t \in [0,\nu]$, то есть $\tilde{z}_{\nu+\Delta}$ это продолжение решения $\tilde{z}_\nu$.

Итак, показано, что произвольное локальное решение $\tilde{x}_\nu$ задачи (1), (2) продолжаемо на некоторый больший отрезок $[0,\nu+\Delta]$, причем существует продолжение $x_{\nu+\Delta}$ этого решения, производная которого удовлетворяет оценке

$$\dot{x}_{\nu+\Delta}(t), \le \dot{u}(t), \quad t \in [0,\nu+\Delta].$$

Определим на множестве Ξ всех локальных решений x_ν задачи (1), (2), удовлетворяющих неравенству $\dot{x}_\nu(t) \le u(t)$, $t \in [0,\nu]$, порядок

$$x_\nu \le x_\eta \ \Leftrightarrow\ \nu \le \eta, \ \ \forall t \in [0,\nu] \ \ x_\nu(t) = x_\eta(t).$$

Относительно этого порядка согласно теореме Хаусдорфа существует максимальная цепь $S \subset \Xi$, содержащая произвольное заданное локальное решение x_ν. Каждому $x_\eta \in S$ сопоставим число $\eta \in [0,T]$ и найдем $\bar{\eta} = \sup\{\eta : x_\eta \in S\}$. Определим функцию $\tilde{x}_{\bar{\eta}} : [0,\bar{\eta}) \to \mathbb{R}$, $x_{\bar{\eta}}(t) = x_\eta(t)$, где $\eta = \frac{t+\bar{\eta}}{2}$. С увеличением $\eta \in (0,\bar{\eta})$ значение $\|x_\eta\|_{AC([0,\eta],\mathbb{R})}$ не убывает. Если $\lim\limits_{\eta\to\bar{\eta}-0} \|x_\eta\|_{AC([0,\eta],\mathbb{R})} = \infty$ то $\tilde{x}_{\bar{\eta}}$ — предельно продолженное решение.

Пусть $\lim\limits_{\eta\to\bar{\eta}-0} \|x_\eta\|_{AC([0,\eta],\mathbb{R})} = r_0 < \infty$, т.е. выполнено $|x_\eta(0)| + \int\limits_0^\eta |\dot{x}_\eta(s)|ds \to r_0$ при $\eta \to \bar{\eta}-0$. Тогда $|\tilde{x}_{\bar{\eta}}(0)| + \int\limits_0^{\bar{\eta}} |\dot{\tilde{x}}_{\bar{\eta}}(s)|ds = r_0$, таким образом функцию $\tilde{x}_{\bar{\eta}}$ можно доопределить в одной точке $t = \bar{\eta}$, и мы получим локальное решение, определенное на отрезке $[0,\bar{\eta}]$. В случае $\bar{\eta} < T$ это локальное решение, согласно доказанному выше, можно продолжить на больший отрезок $[0,\bar{\eta}+\Delta]$, что противоречит определению числа $\bar{\eta}$. Таким образом, $\bar{\eta} = T$, т.е. получено глобальное решение.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 512 с.

2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

4. *Жуковский Е.С.* К теории уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1599–1605.

5. *Максимов В.П.* О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 4. С. 601–606.

Поступила в редакцию 3 августа 2017 г.

Тахир Халид Мизхир Тахир, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: khalidtahir89@yahoo.com

UDC 517
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1329-1334

THE EXISTENCE AND ESTIMATES OF SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A NONLINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

© **Kh. M. T. Tahir**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsionalnaya st., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: khalidtahir89@yahoo.com

We obtain an assertion about functional-differential inequality analogous to the well-known theorem of Chaplygin. The result can be used to find estimates of solutions of specific functional-differential equations.
Keywords: Cauchy problem; functional-differential equation; the Chaplygin theorem on differential inequality

REFERENCES

1. *Krasnoselsky M.A., Zabreiko P.P.* Geometricheskie metody nelinejnogo analiza. M: Nauka, 1975. 512 p.
2. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rahmatullina L.F.* Vvedenie v teoriyu funkcionalno-differencialnyh uravnenij. M: Nauka, 1991. 280 s.
3. *Kantorovich L.V. Akilov G.P* Funkcionalnyj analiz. M: Nauka, 1984. 752 s.
4. *Zhukovskij E.S.* Contribution to the theory of Volterra equations // Differential Equations. 1989. V. 25. Iss. 9. P. 1132–1137.
5. *Maksimov V.P.* The Cauchy formula for a functional-differential equation // Differential Equations. 1977. V. 13. Iss. 4. P. 601–606.

Received 3 August 2017

Tahir Khalid Mizhir Tahir, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student, Functional Analysis Department, e-mail: khalidtahir89@yahoo.com

Для цитирования: *Тахир Х.М.Т.* Существование и оценки решений задачи Коши для нелинейного функционально-дифференциального уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1329–1334. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1329-1334.

For citation: Tahir Kh.M.T. Sushchestvovanie i ocenki reshenij zadachi Koshi dlya nelinejnogo funkcionalno-differencialnogo uravneniya [The existence and estimates of solutions of the Cauchy problem for a nonlinear functional-differential equation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1329–1334. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1329-1334 (In Russian, Abstr. in Engl.).