УДК 517.977.1
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1325-1328

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ОБОБЩЕННЫХ (q_1, q_2)-КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

© **Р. Сенгупта**

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: veryricheek@hotmail.com

Рассмотрены обобщенные (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Для сжимающих отображений в этих пространствах получены достаточные условия существования неподвижных точек.
Ключевые слова: квазиметрические пространства; неподвижные точки; сжимающие отображения

В работе [1] исследовались (q_1, q_2)-квазиметрические пространства и были получены достаточные условия существования неподвижной точки у сжимающего отображения. В работе [2] был рассмотрен этот вопрос для обобщенных метрических пространств. В этой работе мы введем обобщенные (q_1, q_2)-квазиметрические пространства и получим достаточные условия для существования неподвижной точки сжимающего отображения.

Пусть заданы положительные числа q_1, q_2 и множество X. Сформулируем определение обобщенных (q_1, q_2)-квазиметрических пространств.

Определение 1. Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ называется обобщенной (q_1, q_2)-квазиметрикой, если

1. $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, z) \le q_1\rho(x, y) + q_2\rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$.

Здесь предполагается, что символ ∞ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \infty > a$;
2. $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad \infty + a = \infty$;
3. $0 \cdot \infty = 0$;
4. $\forall a > 0 \quad a \cdot \infty = \infty$.

Пара (X, ρ) называется *обобщенным* (q_1, q_2) *-квазиметрическим пространством.* Если $\rho(x, y) < < \infty \quad \forall x, y \in X$, то пара (X, ρ) называется (q_1, q_2)-квазиметрическим пространством, $(1, 1)$-квазиметрическое пространство называется квазиметрическим пространством.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}$. Положим

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x < y; \\ x - y, & \text{если } x \ge y. \end{cases}$$

Очевидно, $\rho(x, y)$ является обобщенной $(1, 1)$-квазиметрикой.

Пусть (X,ρ) – обобщенное (q_1,q_2)-квазиметрическое пространство.

О п р е д е л е н и е 2. Последовательность x_n сходится к точке $x\in X$, если $\rho(x,x_n)\to 0$.

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной последовательностью, если для любого $\varepsilon>0$ существует $N\in\mathbb{N}$ такой, что для любых m,n, для которых $n>m>N$, выполняется неравенство $\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$.

О п р е д е л е н и е 4. Пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность сходится в нем.

О п р е д е л е н и е 5. Отображение $\Phi: X\to X$ называется β-липщицевым, если

$$\rho(\Phi(x),\Phi(y))\le\beta\rho(x,y)\quad\forall x,y\in X.$$

Если $\beta<1$, то отображение называется сжимающим.

О п р е д е л е н и е 6. Отображение $\Phi: X\to X$ называется замкнутым, если из $x_n\to x$, $\Phi(x_n)\to y$ следует, что $\Phi(x)=y$.

Сформулируем основной результат.

Т е о р е м а 1. *Пусть X полное обобщенное (q_1,q_2)-квазиметрическое пространство, а $\Phi: X\to X$ замкнутое сжимающее с константой β отображение. Тогда для любого $x\in X$, для которого $\rho(x,\Phi(x))<\infty$, существует неподвижная точка $\overline{x}=\overline{x}(x)$ отображения Φ такая, что последовательность $x_0:=x$, $x_{i+1}:=\Phi(x_i)$, $i=0,1,2,...$, сходится к $\overline{x}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $x\in X$ такой, что $\rho(x,\Phi(x))<\infty$. Положим $x_0:=x$, $x_{i+1}:=\Phi(x_i)$, $i=0,1,2,...,$. Докажем, что последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной. Для этого повторим доказательство фундаментальности из [3]. Положим $d=\rho(x_0,x_1)$. Так как отображение Φ является сжимающим, то $\rho(x_i,x_{i+1})\le\beta^i d$. Имеем

$$\rho(x_i,x_{i+j})\le q_1\rho(x_i,x_{i+1})+q_2\rho(x_{i+1},x_{i+j})\le$$

$$\le q_1 d\beta^i+q_2(q_1\rho(x_{i+1},x_{i+2})+q_2\rho(x_{i+2},x_{i+j})\le$$

$$\le q_1 d\beta^i+q_1q_2d\beta^{i+1}+q_2^2(q_1\rho(x_{i+2},x_{i+3})+q_2\rho(x_{i+3},x_{i+j})\le$$

$$\le\dots\le q_1d\beta^i(1+q_2\beta+\dots+q_2^{j-2}\beta^{j-2}+q_2^{j-1}\beta^{j-1}q_1^{-1})=q_1d\beta^iS(j).$$

Здесь $S(j)=(1+q_2\beta+\dots+q_2^{j-2}\beta^{j-2}+q_2^{j-1}\beta^{j-1}q_1^{-1})$.

Пусть $m_0=\min\{j\in\mathbb{N}: q_2\beta^j<1\}$. Имеем

$$\rho(x_i,x_{i+k})\le q_1\rho(x_i,x_{i+m_0})+q_2\rho(x_{i+m_0},x_{i+k})\le$$

$$\le q_1\rho(x_i,x_{i+m_0})+q_2(q_1\rho(x_{i+m_0},x_{i+2m_0})+q_2\rho(x_{i+2m_0},x_{i+k}))\le$$

$$\le q_1\rho(x_i,x_{i+m_0})+q_1q_2\rho(x_{i+m_0},x_{i+2m_0})+q_2^2(q_1\rho(x_{i+2m_0},x_{i+3m_0})+q_2\rho(x_{i+3m_0},x_{i+k}))\le$$

$$\le\dots\le q_1\rho(x_i,x_{i+m_0})+q_1q_2\rho(x_{i+m_0},x_{i+2m_0})+\dots+q_1q_2^{r-1}\rho(x_{i+(r-1)m_0},x_{i+rm_0})+q_2^r\rho(x_{i+rm_0},x_{i+k})\le$$

$$\le q_1^2d\beta^iS(m_0)(1+q_2\beta_0^m+q_2^2\beta^{2m_0}+\dots+q_2^{r-1}\beta^{(r-1)m_0})+q_2^rq_1d\beta^{i+rm_0}S(k-rm_0)=$$

$$=q_1^2d\beta^i(S(m_0)S(q_2\beta^{m_0},r))+q_2^r\beta^{i+rm_0}q_1dS(k-rm_0)).$$

Здесь $S(q_2\beta^{m_0},r)=(1+q_2\beta_0^m+q_2^2\beta^{2m_0}+\dots+q_2^{r-1}\beta^{(r-1)m_0})$, а r–целая часть числа k/m_0. Поскольку $q_2\beta^{m_0}<1$, то

$$\rho(x_i,x_{i+k})\le q_1^2d\beta^i(S(m_0)S(q_2\beta^{m_0},r)+q_2^r\beta^{rm_0}q_1^{-1}S(k-rm_0))\le$$

$$\le q_1^2d\beta^i(\frac{S(m_0)}{1-q_2\beta^{m_0}}+q_1^{-1}S(k-rm_0)).$$

Поскольку $0 \le k - rm_0 < m_0$, то $q_1^{-1}S(k - rm_0)$ ограничено равномерно по всем k. Следовательно, последовательность $\{x_k\}$ является фундаментальной. Поскольку пространство X является полным, то существует предел $\overline{x}$ для последовательности $\{x_k\}$. Кроме того, $\Phi(x_k) \to \overline{x}$. В силу замкнутости отображения Φ имеем $\Phi(\overline{x}) = \overline{x}$, то есть точка $\overline{x}$ является неподвижной. Теорема доказана.

В предположениях теоремы 1 неподвижная точка может быть не единственной. Так, например, если $X = \{x_1, x_2\}$, $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1) = \infty$, $\rho(x_1, x_1) = \rho(x_2, x_2) = 0$, а $\Phi : X \to X$ – тождественное отображение. Тогда выполнены предположения Теоремы 1, но Φ имеет две неподвижные точки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения // Доклады Академии наук. 2016. Т. 469. № 5. С. 527–531.

2. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and their applications // In Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of VF Demyanov), 2017 P. 1–3. IEEE.

3. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2018 (в печати).

БЛАГОДАРНОСТИ: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01168).

Поступила в редакцию 23 августа 2017 г.

Сенгупта Ричик, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: veryricheek@hotmail.com

UDC 517.977.1
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1325-1328

ON FIXED POINTS OF CONTRACTION MAPPINGS ACTING IN GENERALIZED (q_1, q_2)-QUASIMETRIC SPACES

© **R. Sengupta**

RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: veryricheek@hotmail.com

Generalized (q_1, q_2)-quasimetric spaces are considered. For contraction mappings in these spaces sufficient conditions for existence of fixed points are obtained.
Keywords: quasi-metric spaces; fixed points; contraction mappings

REFERENCES

1. *Arutyunov A.V., Greshnov A.V.* Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points // Dokl.RAS. 2016. V. 469. Iss 5. P. 527–531.

2. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and their applications // In Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov), 2017 P. 1–3. IEEE.

3. *Arutyunov A.V., Greshnov A.V.* (q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and fixed points // Izvestia RAS. Mathematical series. 2018 (in print).

ACKNOWLEDGEMENTS: The study was performed by a grant from the Russian Science Foundation (project № 17-11-01168).

Received 23 August 2017

Sengupta Richik, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Post-graduate student, Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: veryricheek@hotmail.com

Для цитирования: *Сенгупта Р.* О неподвижных точках сжимающих отображений в обобщенных (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1325–1328. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1325-1328.

For citation: Sengupta R. O nepodvizhnih tochkah szhimajushhih otobrazhenij v obobshhennyh (q_1, q_2)-kvazimetricheskih prostranstvah. [On fixed points of contraction mappings acting in generalized (q_1, q_2)-quasimetric spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1325–1328. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1325-1328 (In Russian, Abstr. in Engl.).