УДК 519.46
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1321-1324

# КАНОНИЧЕСКИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП ЛИ

© **А. М. Попов**

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: 3.14pat@bk.ru

Приводятся канонические подпространства для некоторых комплексных полупростых линейных групп Ли с конечной стационарной подгруппой общего положения.
*Ключевые слова:* каноническое подпространство; линейное представление; стационарная подгруппа общего положения

Настоящая работа является непосредственным продолжением работ [1], [2] автора и работ [3], [4], [5], [6]. Обозначения в настоящей работе следуют обозначениям из работ [1], [2].

Основным полем считаем поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Топологические термины будем считать относящимися к топологии Зарисского. Для действия алгебраической группы $G$ на алгебраическом многообразии $X$ подгруппа $H \subset G$ называется стационарной подгруппой общего положения, если в $X$ существует открытое по Зарисскому множество, стационарные подгруппы точек которого сопряжены $H$. В этом случае для множества $X^H = \{x \in X | Hx = x\}$, очевидно, $\overline{GX^H} = X$.

Для связной полупростой комплексной линейной группы Ли $G \subset GL(V)$ подпространство $L \subset V$ будем называть каноническим подпространством, если $\overline{G \cdot L} = V$ и $L$ – минимальное (по включению) подпространство с таким свойством. Очевидно, если $\overline{G \cdot L} = V$ и $\dim G + \dim L = \dim V$, то $L$ – каноническое подпространство.

Как написано в [2], из соображений размерности следует, что представлений с обозримыми каноническими подпространствами немного. Почти все обозримые канонические подпространства найдены в работах [1] – [6]. В настоящей работе приводятся канонические подпространства для групп из таблиц работы [4], не найденные ранее.

Всюду в дальнейшем $\mathcal{G}$ – алгебра Ли группы $G$, $r$ – ранг алгебры $\mathcal{G}$, $\varphi_i$ ($1 \leqslant i \leqslant r$) – старший вес $i$-го базисного представления, $R(\Lambda)$ – неприводимое представление со старшим весом $\Lambda$.

1. Рассмотрим действие группы $G = Sp(\mathbb{C}^6) \otimes SL(\mathbb{C}^3) \otimes SL(\mathbb{C}^2)$ в пространстве $V = S \otimes U \otimes W$, где $S = \mathbb{C}^6$, $U = \mathbb{C}^3$, $W = \mathbb{C}^2$. В этом случае $H = (\mathbb{Z}_2)^2$ (см. [3], [4]). Перебором типов полупростых элементов легко убедиться, что $H = < g, g' >$, где

$$g = diag(i,i,i,-i,-i,-i) \otimes diag(-1,1,-1) \otimes diag(i,-i), \quad g' = a_1 \otimes a_2 \otimes a_3,$$

$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ – блочная матрица с блоками размера $(3,3)$, $I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = -I$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Пусть $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ – стандартный базис в пространстве $S$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $\{u_1, u_2, u_3\}$ – базис в пространстве $U$, $\{w_1, w_2\}$ – базис в пространстве $W$. Тогда

$\{s_i\otimes u_j\otimes w_k; i=1,2,3,4,5,6;\quad j=1,2,3; k=1,2\}$ – базис в пространстве $V$. Легко проверить, что подпространство $V^H$ имеет размерность 9, т. е. $V^H$ не является каноническим, так как оно не минимальное. Но, например, подпространство $L\subset V$, $L=<s_1\otimes u_1\otimes w_1+s_6\otimes u_3\otimes w_2$, $s_5\otimes u_2\otimes w_1-s_2\otimes u_2\otimes w_2$, $s_3\otimes u_3\otimes w_1+s_4\otimes u_1\otimes w_2$, $s_6\otimes u_2\otimes w_1+s_2\otimes u_3\otimes w_1+s_5\otimes u_1\otimes w_2-$ $-\ s_1\otimes u_2\otimes w_2>$ – каноническое, $\dim L=4$. Доказательство этого факта сводится к проверке того, что $L+\mathcal{G}L=V$, т. е. к проверке того, что не равен нулю соответствующий определитель 36-го порядка. Кроме того, $\dim G+\dim L=32+4=36=\dim V$, т. е. $L$ – минимальное подпространство.

Представляя тензоры из $V$ трехмерными матрицами, можно утверждать, что любую трехмерную $(6,3,2)$-матрицу из открытого по Зарисскому подмножества в $V$ можно привести действием группы $G$ к каноническому виду $\left\{\begin{pmatrix}\alpha&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\beta&\delta\\0&\delta&\gamma&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&\gamma&\delta&0\\-\delta&-\beta&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\alpha\end{pmatrix}\right\}$, где первая матрица – верхний слой трехмерной матрицы, а вторая матрица – ее нижний слой.

2. Рассмотрим действие группы $G=G_2\otimes Sp(\mathbb{C}^4)(R(\varphi_1)\otimes id)$ в пространстве $V=U\otimes W$, где $U=U(G_2,R(\varphi_1))$ – пространство представления $R(\varphi_1)$ особой группы $G_2$, $W=\mathbb{C}^4$. В этом случае $H=\{e\}$ (см. [4]), $\dim V=28$, $\dim G=24$. Пусть $S$ – подгруппа (ненулевых) скалярных матриц в $G$. Тогда для естественного действия $G/S$ в ассоциированном проективном пространстве $P(V)$ стационарная подгруппа общего положения $H'/S=\mathbb{Z}_2$ (см. [4]), и $\overline{G\cdot P(V)^{H'}}=P(V)$.

Если $\{u_1,\ldots,u_7\}$ – базис в пространстве $U$, $\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ – базис в пространстве $W$, то $\{u_i\otimes w_j, 1\leqslant i\leqslant 7, j=1,2,3,4\}$ – базис в пространстве $V$ и для любого $\nu\in V$ $\nu=\sum x^{ij}u_i\otimes w_j$. Пусть $\pm\varepsilon_1,\pm\varepsilon_2,\pm\varepsilon_3,0$ – веса (относительно стандартной картановской подалгебры) простейшего представления $R(\varphi_1)$ алгебры $G_2$ и $\varepsilon_1$ – старший вес, простые корни алгебры $G_2$ – это $\alpha_1=-\varepsilon_2,\alpha_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3$. Можно считать, что базисные векторы в пространстве $U$ – это $u_1=u_{\varepsilon_1},u_2=u_{-\varepsilon_3},u_3=u_{-\varepsilon_2},u_4=u_0,u_5=u_{\varepsilon_2},u_6=u_{\varepsilon_3},u_7=u_{-\varepsilon_1}$. Перебором типов полупростых элементов легко убедиться, что $H'/S=<\overline{e},\overline{g}>$, где $g=t\otimes diag(i,i,-i,-i)$, $t$ – полупростой элемент из $G_2$ второго порядка такой, что $\alpha_1(t)=-1$, $\alpha_2(t)=1$.

Пусть $V^{H'}$ – линейное подпространство в $V$, ассоциированное с проективным подпространством $P(V)^{H'}$. Тогда $\overline{G\cdot V^{H'}}=V$. Можно проверить, что $\dim V^{H'}=14$, т.е. подпространство $V^{H'}$ не является каноническим, так как оно не минимальное. Но, например, 4-мерное подпространство $L\subset V^{H'}$, $L=<u_1\otimes w_1+u_6\otimes w_4$, $u_4\otimes w_1+u_2\otimes w_4$, $u_4\otimes w_2+u_5\otimes w_3$, $u_7\otimes w_2+u_3\otimes w_3>$ – каноническое. Доказательство этого факта сводится к проверке того, что $L+\mathcal{G}L=V$, т. е. к проверке того, что не равен нулю соответствующий определитель 28-го порядка. Кроме того, $\dim G+\dim L=24+4=28=\dim V$, т. е. $L$ – минимальное подпространство. Таким образом, любой тензор из открытого по Зарисскому множества в $V$ можно привести действием группы $G$ к каноническому виду

$$\alpha(u_1\otimes w_1+u_6\otimes w_4)+\beta(u_4\otimes w_1+u_2\otimes w_4)+\gamma(u_4\otimes w_2+u_5\otimes w_3)+\delta(u_7\otimes w_2+u_3\otimes w_3).$$

Представляя тензоры из $V$ матрицами, можно утверждать, что любую $(7,4)$-матрицу из открытого по Зарисскому подмножества в $V$ можно привести действием группы $G$ к каноническому виду $\begin{pmatrix}\alpha&0&0&\beta&0&0&0\\0&0&0&\gamma&0&0&\delta\\0&0&\delta&0&\gamma&0&0\\0&\beta&0&0&0&\alpha&0\end{pmatrix}$.

3. Рассмотрим действие группы $G=Sp(\mathbb{C}^4)\otimes SL(\mathbb{C}^2)(R(\varphi_1\otimes R(3\varphi_1))$ в пространстве $V=S\otimes U$, где $S=\mathbb{C}^4$, $U=U(A_1,R(3\varphi_1))$ – пространство представления $R(3\varphi_1)$ группы $SL(\mathbb{C}^2)$.

В этом случае $H = (\mathbb{Z}_2)^2$ (см. [3], [4]). Перебором типов полупростых элементов легко убедиться, что $H = < g, g' >$ , где $g = diag(i, i, -i, -i) \otimes diag(i, -i)$ , $g' = a_1 \otimes a_2$ , $a_1 = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$ – блочная матрица с блоками размера $(2, 2)$ , $I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , $a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Пусть $\{s_1, \dots s_4\}$ – стандартный базис в пространстве $S$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$, $\{u_1, \dots u_4\}$ – стандартный базис в пространстве $U$. Тогда $\{s_i \otimes u_j, i = 1, \dots 4, j = 1, \dots 4\}$ – базис в пространстве $V$. Легко проверить, что подпространство $V^H$ имеет размерность 4, т. е. $V^H$ не является каноническим, так как оно не минимальное. Но, например, подпространство $L \subset V$, $L = < s_1 \otimes u_1 + s_4 \otimes u_4, s_3 \otimes u_2 + s_2 \otimes u_3, s_4 \otimes u_2 + s_1 \otimes u_3 >$ – каноническое, $\dim L = 4$ . Доказательство этого факта сводится к проверке того, что $L + \mathcal{G}L = V$ , т. е. к проверке того, что не равен нулю соответствующий определитель 16 -го порядка. Кроме того, $\dim G + \dim L = 13 + 3 = 16 = \dim V$ , т. е. $L$ – минимальное подпространство.

4. Рассмотрим действие группы $G = SL(\mathbb{C}^2) \otimes SL(\mathbb{C}^2)(R(3\varphi_1) \otimes R(\varphi_1))$ в пространстве $V = S \otimes U$, где $S = S(A_1, R(3\varphi_1))$, $U = \mathbb{C}^2$. В этом случае $H = (\mathbb{Z}_2)^2$ (см. [3], [4]). Перебором типов полупростых элементов легко убедиться, что $H = < g, g' >$ , где $g = diag(i, -i) \otimes diag(i, -i)$, $g' = a_1 \otimes a_2$ , $a_1 = a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Пусть $\{s_1, \dots s_4\}$ – стандартный базис в пространстве $S$ , $\{u_1, u_2\}$ – стандартный базис в пространстве $U$. Тогда $\{s_i \otimes u_j, i = 1, \dots 4, j = 1, 2\}$ – базис в пространстве $V$. Легко проверить, что подпространство $V^H$ имеет размерность 2, $V^H = <s_1 \otimes u_1 + s_4 \otimes u_2, s_3 \otimes u_1 + s_2 \otimes u_2>$, т. е. $L = V^H$ является каноническим подпространством, так как оно минимальное. Доказательство этого факта сводится к проверке того, что $L + \mathcal{G}L = V$ , т. е. к проверке того, что не равен нулю соответствующий определитель 8 -го порядка. Кроме того, $\dim G + \dim L = 6 + 2 = 8 = \dim V$ .

Далее в таблице приводится список представлений с обозримыми каноническими подпространствами $L$ (с указанием размерности $L$ ), для которых эти канонические подпространства ещё не найдены.

| № | Группа | Представление | $\dim L$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $Spin11 \otimes SL(\mathbb{C}^2)$ | $R(\varphi_5) \otimes R(\varphi_1)$ | 6 |
| 2 | $Spin10 \otimes SL(\mathbb{C}^4)$ | $R(\varphi_4) \otimes R(\varphi_1)$ | 4 |
| 3 | $Spin9 \otimes SL(\mathbb{C}^2)$ | $R(\varphi_4) \otimes R(\varphi_1)$ | 6 |
| 4 | $SL(\mathbb{C}^5) \otimes SL(\mathbb{C}^4)$ | $R(\varphi_2) \otimes R(\varphi_1)$ | 1 |
| 5 | $Spin7 \otimes Sp(\mathbb{C}^6)$ | $R(\varphi_3) \otimes R(\varphi_1)$ | 6 |
| 6 | $Spin7 \otimes Sp(\mathbb{C}^8)$ | $R(\varphi_3) \otimes R(\varphi_1)$ | 7 |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов А.М., Лисица А.Ю.* Некоторые канонические подпространства полупростых линейных групп Ли // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2014. Т. 19. Вып. 2. С. 412–414.

2. *Попов А.М., Лисица А.Ю.* Некоторые канонические подпространства полупростых комплексных линейных групп Ли // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2014. Т. 19. Вып. 2. С. 415–417.

3. *Попов А.М.* Конечные стационарные подгруппы общего положения простых линейных групп Ли // Труды ММО. 1985. Т. 48. С. 7–59.

4. *Попов А.М.* Конечные стационарные подгруппы общего положения неприводимых полупростых линейных групп Ли // Труды ММО. 1987. Т. 50. С. 209–248.

5. *Элашвили А.Г.* Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли // Функциональный анализ. 1972. Вып. 1. № 6. С. 51–62.

6. *Элашвили А.Г.* Стационарные подалгебры точек общего положения для неприводимых линейных групп Ли // Функциональный анализ. 1972. Вып. 2. № 6. С. 65–78.

Поступила в редакцию 24 августа 2017 г.

Попов Александр Митрофанович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: 3.14pat@bk.ru

UDC 519.46
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1321-1324

# CANONICAL SUBSPACES OF SOME REPRESENTATIONS OF SEMISIMPLE LINEAR LIE GROUPS

© **A. M. Popov**

RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: 3.14pat@bk.ru

The canonical subspaces for some representations of semisimple linear Lie groups with finite isotropy subgroup in general position are resulted.
*Keywords:* canonical subspace; linear representation; the isotropy subgroup in general position

REFERENCES

1. *Popov A.M.* Finite isotropy subgroups in general position of simple linear Lie groups // AMS, Trans. Moscow Math. Soc. 1986. P. 3–63.
2. *Popov A.M.* Finite isotropy subgroups in general position of irreducible semisimple linear Lie groups // AMS, Trans. Moscow Math. Soc. 1988. P. 205–249.
3. *Popov A.M., Lisitsa A.Yu.* Some canonical subspaces of semisimple linear Lie groups // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2014. V. 19. Iss. 2. P. 412–414.
4. *Popov A.M., Lisitsa A.Yu.* Some canonical subspaces of semisimple complex linear Lee groups // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2014. V. 19. Iss. 2. P. 415–417.
5. *Elashvili A.G.* Canonical form and stationary subalgebras of points of general position for simple linear Lie groups // Functional Analysis and Its Applications. 1972. V. 6. Iss. 1. P. 44–53.
6. *Elashvili A.G.* Stationary subalgebras of points of the common state for irreducible linear Lie groups // Functional Analysis and Its Applications. 1972. V. 6. Iss. 2. C. 139–148.

Received 24 August 2017

Popov Alexander Mitrofanovich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: 3.14pat@bk.ru

**Для цитирования:** *Попов А.М.* Канонические подпространства некоторых представлений полупростых линейных групп Ли // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1321–1324. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1321-1324.

**For citation:** Popov A.M. Kanonicheskie podprostranstva nekotoryh predstavleniy poluprostyh lineynyh grupp Li [Canonical subspaces of some representations of semisimple linear Lie groups]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1321-1324. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1321-1324 (In Russian, Abstr. in Engl.).