УДК 517.988.6, 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1314-1320

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЯВНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© **Е. А. Плужникова [1),2)] , А. И. Шиндяпин [3)]**

[1)] Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
[2)] Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru
[3)] Университет имени Эдуардо Мондлане
CP 257 Мозамбик, Мапуто, Площадь 25 июня, 257
E-mail: shindyapin.andrey@gmail.com

Предлагается метод исследования неявных сингулярных дифференциальных включений, использующий представление такого включения в виде операторного включения в некотором пространстве измеримых функций, определяемом по типу сингулярности. К полученному операторному включению применяются утверждения о липшицевых возмущениях многозначных накрывающих отображений.
Статья состоит из трех параграфов. В первом параграфе приведены необходимые обозначения, определения, сформулирована теорема [A. Arutyunov, V.A. de Oliveira, F.L. Pereira, E. Zhukovskiy, S. Zhukovskiy // Applicable Analysis, 2015, 94, № 1] о липшицевых возмущениях многозначных накрывающих отображений; во втором — введены специальные метрические пространства измеримых функций и получены достаточные условия накрывания многозначного оператора Немыцкого в таких пространствах; в третьем параграфе на основе перечисленных результатов получены условия разрешимости задачи Коши для неявного сингулярного дифференциального включения.
Ключевые слова: неявное сингулярное дифференциальное включение; задача Коши; существование решения; накрывающее многозначное отображение; липшицево многозначное отображение

Для исследования сингулярных дифференциальных уравнений в [1], [2] было предложено определение пространства суммируемых функций, в котором соответствующие сингулярные отображения обладают "хорошими" свойствами (прежде всего, непрерывности и ограниченности, а при дополнительных ограничениях, еще и липшицевости или компактности), и становится возможным применять результаты функционального анализа. Использование такого же пространства в [3] позволило рассмотреть неявное сингулярное дифференциальное уравнение. Соответствующее операторное уравнение исследовалось с помощью результатов [4]–[6] о липшицевых возмущениях накрывающих отображений.

В данной статье аналогичные подходы применяются к исследованию неявного сингулярного дифференциального включения

$$f\Big(t,\, \frac{x(t)}{q(t)},\, x'(t)\Big) \ni 0, \quad t \in [a,b],$$

где многозначное отображение $f:[a,b]\times\mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори, а измеримая функция $q:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ обращается в 0 в точке $t=a$. Предложена формализация этого включения в виде операторного включения с накрывающим отображением в некотором, определяемом по функции q пространстве измеримых функций. Получены условия разрешимости задачи Коши и оценки решения.

1. Накрывающие отображения метрических пространств

Приведем определения понятий, необходимых для формулировки основных результатов.

Пусть заданы метрические пространства (X,ρ_X), (Y,ρ_Y). Многозначное отображение, ставящее в соответствие каждому $x\in X$ некоторое непустое множество $F(x)\subset Y$, обозначаем символом $F:X\rightrightarrows Y$. Если при любом x множество $F(x)\neq\emptyset$ замкнуто в Y, то обозначаем такое отображение через $F:X\to \mathrm{Cl}(Y)$.

Обозначим через $\mathrm{B}_X(x_0,r)\doteq\{x\in X:\rho_X(x,x_0)\le r\}$ замкнутый шар в пространстве X с центром в точке x_0 радиуса $r\ge 0$, и для произвольного множества $U\subset X$ определим множество $\mathrm{B}_X(U,r)\doteq\bigcup_{u\in U}\mathrm{B}_X(u,r)$.

Сформулируем необходимые для нашего исследования определения свойств накрывания, липшицевости и замкнутости графика многозначного отображения.

О п р е д е л е н и е 1 [7]. Пусть $\alpha>0$, $W\subset Y$. Отображение $F:X\rightrightarrows Y$ называется *α-накрывающим множество* W, если для любых $r\ge 0$, $x_0\in X$ имеет место вложение

$$W\cap\mathrm{B}_Y(F(x_0),\alpha r)\subset F(\mathrm{B}_X(x_0,r));$$

здесь число α называют *коэффициентом накрывания.*

Свойство α-накрывания множества W равносильно соотношению:

$$\forall\, x_0\in X\quad \forall\, y_0\in F(x_0)\quad \forall\, y\in W\quad \exists\, x\in X\quad F(x)\ni y\ \ \&\ \ \rho_X(x,x_0)\le\alpha^{-1}\rho_Y(y,y_0).$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\beta\ge 0$, $W\subset Y$. Отображение $F:X\rightrightarrows Y$ будем называть *β-липшицевым относительно множества* W, если

$$\forall\, x_0\in X\quad W\cap F(x_0)\neq\emptyset\ \Rightarrow\ \forall\, y_0\in W\cap F(x_0)\quad \forall\, x\in X\quad \exists\, y\in F(x)\quad \rho_Y(y,y_0)\le\beta\rho_X(x,x_0);$$

здесь β называют *коэффициентом Липшица.*

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что график отображения $F:X\rightrightarrows Y$ *замкнут относительно множества* $W\subset Y$, если для любых $x_i\in X$, $y_i\in F(x_i)$, $i=1,2,\ldots,$ $x\in X$, $y\in W$ из сходимостей $x_i\to x$, $y_i\to y$ следует $y\in F(x)$.

Пусть задан элемент $y\in Y$ и определено отображение $\Phi:X^2\rightrightarrows Y$, являющееся по одному аргументу накрывающим и липшицевым по другому аргументу. Рассмотрим включение

$$F(x)\doteq\Phi(x,x)\ni y \tag{1}$$

относительно неизвестного $x\in X$. Сформулируем утверждение о разрешимости этого включения, следующее из результатов работы [8].

Т е о р е м а 1. *Пусть метрическое пространство X являются полным и выполнены следующие условия: для всех $x\in X$ отображение $\Phi(\cdot,x):X\rightrightarrows Y$ является α-накрывающим множество $W\doteq\{y\}$, отображение $\Phi(x,\cdot):X\rightrightarrows Y$ является β-липшицевым относительно множества W; график отображения F, определенного равенством (1), замкнут относительно W.*

Тогда, если $\beta<\alpha$, то включение (1) *разрешимо и, кроме того, для произвольных $x_0\in X$, $y_0\in\Phi(u^0,u^0)$ существует решение $x\in X$ этого включения, удовлетворяющее оценке*

$$\rho_X(x,x_0)\leqslant\frac{1}{\alpha-\beta}\rho_Y\big(y,y_0\big).$$

2. Условия накрывания сингулярного оператора Немыцкого

Для $U \subset \mathbb{R}$ обозначим $|U| \doteq \sup_{u \in U} |u|$.

Пусть заданы две измеримые функции $z_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $v : [a,b] \to \mathbb{R}_+$. Для исследования сингулярного дифференциального уравнения в [1], [3] было определено метрическое пространство $L_\infty(z_0, v) \doteq L_\infty([a,b], \mathbb{R}, z_0, v)$ таких измеримых функций $z : [a,b] \to \mathbb{R}$, что функция $t \in [a,b] \mapsto \mapsto \frac{z(t)-z_0(t)}{v(t)}$ существенно ограничена, с метрикой

$$\forall z_1, z_2 \in L_\infty(z_0, v) \quad \rho_{L_\infty(z_0,v)}(z_1, z_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} \frac{|z_2(t) - z_1(t)|}{v(t)}.$$

В частности, если $z_0(t) \equiv 0$ и $v(t) \equiv 1$, то $L_\infty(0,1)$ это "стандартное" пространство существенно ограниченных функций. Отметим, что при любых z_0, v метрическое пространство $L_\infty(z_0, v)$ является полным. Отметим, также, что если функции z_0, v суммируемы, то любая функция из $L_\infty(z_0, v)$ будет суммируемой.

Для применения теоремы 1 к исследованию неявных сингулярных дифференциальных включений нам требуются условия накрывания многозначного оператора Немыцкого, действующего в определенных здесь пространствах измеримых функций. Сформулируем соответствующее утверждение.

Пусть задано отображение $g : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R})$, удовлетворяющее условиям Каратеодори, т. е. измеримое по первому и непрерывное (в метрике Хаусдорфа) по второму аргументу. Пусть заданы измеримые функции $z_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $v, w : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ и пусть $y_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ — измеримое сечение отображения $g(\cdot, z_0(\cdot)) : [a,b] \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R})$, т.е. $y_0(t) \in g(t, z_0(t))$ при п.в. t. Определим отображение $G : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R})$ равенством

$$G(t,z) \doteq \frac{g\big(t,\, z_0(t) + v(t)z\big) - y_0(t)}{w(t)}. \tag{2}$$

Предположим, что

$$\forall r > 0 \quad \exists R > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad |z| \le r \;\Rightarrow\; |G(t,z)| \le R \quad \dot{\forall} t \in [a,b]. \tag{3}$$

По отображению $g : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R})$ определим оператор Немыцкого, сопоставляющий каждой функции $z \in L_\infty(z_0, v)$ множество $\mathrm{S}\big[g(\cdot, z(\cdot))\big]$ всех измеримых сечений отображения $g(\cdot, z(\cdot)) : [a,b] \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R})$. При выполнении условия (3) оператор N_g действует из пространства $L_\infty(z_0, v)$ в пространство $L_\infty(y_0, w)$ и имеет замкнутый (относительно всего $L_\infty(y_0, w)$) график.

Пусть задана функция $y \in L_\infty(y_0, w)$. Определим функцию

$$\widetilde{y} : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{y}(t) \doteq \frac{y(t) - y_0(t)}{w(t)},$$

которая, очевидно является существенно ограниченной.

Т е о р е м а 2. *Пусть существует такое* $\alpha > 0$, *что при п.в.* $t \in [a,b]$ *отображение* $G(t, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R})$ *является* α*-накрывающим множество* $\{\widetilde{y}(t)\} \subset \mathbb{R}$. *Тогда оператор Немыцкого* $N_g : L_\infty(z_0, v) \to \mathrm{Cl}\big(L_\infty(y_0, w)\big)$, $N_g z = \mathrm{S}\big[g(\cdot, z(\cdot))\big]$, *будет* α*-накрывающим множество* $\{y\} \subset L_\infty(y_0, w)$.

Проиллюстрируем применение приведенного утверждения на следующем примере простейшего однозначного оператора Немыцкого.

П р и м е р 1. Пусть

$$g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t,z) \doteq |z|.$$

Оператор Немыцкого определяется в данном случае равенством $(N_g z)(t) \doteq |z(t)|$. Если положить $z_0(t) \equiv 0$, тогда $y_0(t) \equiv 0$, и для любой измеримой функции $v:[0,1] \to \mathbb{R}_+$ оператор N_g действует в пространстве $L_\infty(0,v)$. Задаваемая соотношением (8.) функция равна $G(t,z) = |z|$. Очевидно, функция $G(t,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ является 1-накрывающей любое одноточечное подмножество $\mathbb{R}_+$. Следовательно, для любой неотрицательной функции $y \in L_\infty(0,v)$, оператор $N_g : L_\infty(0,v) \to L_\infty(0,v)$ является 1-накрывающим множество $\{y\}$.

3. Задача Коши для неявного сингулярного дифференциального уравнения

Применим теоремы 1, 2 к исследованию разрешимости задачи Коши для неявного сингулярного дифференциального включения.

Пусть заданы: $\gamma \in \mathbb{R}$, неубывающая функция $q:[a,b] \to \mathbb{R}_+$ такая, что $q(a)=0$, $q(t)>0$ при $t \neq a$, и отображение $f:[a,b]\times\mathbb{R}^2 \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R})$, удовлетворяющее условиям Каратеодори. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$f\Big(t, \frac{x(t)}{q(t)}, x'(t)\Big) \ni 0, \quad t \in [a,b], \quad x(a) = \gamma. \tag{4}$$

Пусть заданы суммируемые функции $z_0:[a,b]\to\mathbb{R}$, $v,w:[a,b]\to\mathbb{R}_+$. Положим

$$x_0(t) = \gamma + \int_a^t z_0(s)\,ds, \quad t \in [a,b].$$

Пусть y_0 — некоторое измеримое сечение многозначного отображения $f\big(\cdot, \frac{x_0(\cdot)}{q(\cdot)}, z_0(\cdot)\big)$, положим $\widetilde{y}(t) \doteq -\frac{y_0(t)}{w(t)}$, $t\in[a,b]$. Определим отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^2\to\mathrm{Cl}(\mathbb{R})$ равенством

$$F(t,x,z) \doteq \frac{1}{w(t)}\Big(f\Big(t, \frac{x}{q(t)}, z_0(t)+v(t)z\Big) - y_0(t)\Big).$$

Будем предполагать выполнение следующего условия

$$\forall r>0 \quad \exists R>0 \quad \forall x,z \in \mathbb{R} \quad |x| \le r \quad |z| \le r \;\Rightarrow\; |F(t,x,z)| \le R \quad \dot{\forall} t \in [a,b].$$

Т е о р е м а 3. *Пусть для некоторых* $\alpha > \lambda \ge 0$ *выполнены условия:*

- *для п.в.* $t\in[a,b]$, *любых* $x \in \mathbb{R}$ *отображение* $F(t,x,\cdot):\mathbb{R}\to\mathrm{Cl}(\mathbb{R})$ *является* α*-накрывающим множество* $\{\widetilde{y}(t)\}\subset\mathbb{R}$*;*
- *функции* $\dfrac{x_0(t)}{q(t)}$, $\dfrac{1}{q(t)}\displaystyle\int_a^t v(s)\,ds$, $t\in[a,b]$, *существенно ограничены;*
- *для п.в.* $t\in[a,b]$, *любых* $z\in\mathbb{R}$ *отображение* $f(t,\cdot,z):\mathbb{R}\to\mathrm{Cl}(\mathbb{R})$ *является* λ*-липшицевым относительно множества* $\{0\}\subset\mathbb{R}$*;*
- *имеет место неравенство* $\beta \doteq \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} \dfrac{\lambda}{q(t)w(t)}\displaystyle\int_a^t v(s)\,ds < \alpha$.

Тогда существует решение $x \in AC_\infty(z_0,[a,b],\mathbb{R},v)$ *задачи* (4)*, производная которого удовлетворяет оценке*

$$\rho_{L_\infty(z_0,[a,b],\mathbb{R},v)}(x',z_0) \leqslant \frac{1}{\alpha-\beta}\rho_{L_\infty(y_0,[a,b],\mathbb{R},w)}(0,y_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о использует представление задачи Коши в виде интегрального включения

$$f\left(t,\, \frac{1}{q(t)}\Big(\gamma + \int_a^t z(s)ds\Big),\, z(t)\right) \ni 0, \tag{5}$$

которое мы формализуем как включение (1) с отображением

$$\Phi : L_\infty(z_0, v) \times L_\infty(z_0, v) \to \mathrm{Cl}\big(L_\infty(y_0, w)\big),$$

$$\big(\Phi(z_1, z_2)\big)(t) \doteq f\left(t,\, \frac{1}{q(t)}\Big(\gamma + \int_a^t z_2(s)ds\Big),\, z_1(t)\right).$$

Разрешимость включения (5) доказывается на основании теоремы 1, а теорема 2 позволяет установить свойство накрывания отображения Φ по первому аргументу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шиндяпин А.И.* О краевой задаче для одного сингулярного уравнения // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 3. С. 450–455.

2. *Shindiapin A.* On linear singular functional-differential equations in one functional space // Abstract and Applied Analysis. 2004. V. 7. P. 567–575.

3. *Shindiapin A.I., Zhukovskiy E.S.* Covering mappings in the theory of implicit singular differential equations // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2107–2112.

4. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

5. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

6. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.

7. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. Iss. 1. P. 105–127.

8. *Arutyunov A., de Oliveira V.A., Pereira F.L., Zhukovskiy E., Zhukovskiy S.* On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. № 1. P. 129–143.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-41-680975, № 15-01-04601).

Поступила в редакцию 9 сентября 2017 г.

Плужникова Елена Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа; Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Шиндяпин Андрей Игоревич, Университет имени Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и информатики, e-mail: shindyapin.andrey@gmail.com

UDC 517.988.6, 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1314-1320

ON ONE METHOD OF STUDYING IMPLICIT SINGULAR DIFFERENTIAL INCLUSIONS

© **E. A. Pluzhnikova** [1),2)] **, A. I. Shindyapin** [3)]

[1)] Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsionalnaya st., Tambov, Russian Federation, 392000
[2)] RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru
[3)] Universidade Eduardo Mondlane
257 Praca 25 de Junho, Maputo, Mocambique, CP 257
E-mail: shindyapin.andrey@gmail.com

We propose a method of studying singular differential inclusions based on the representation of such an inclusion in the form of an operator inclusion in some space of measurable functions depending on the type of a given singularity. To the operator inclusion we apply the results on Lipschitz perturbations of multi-valued covering mappings.
The article consists of three sections. In the first one we give the necessary definitions and formulate the theorem [A. Arutyunov, V.A. de Oliveira, F.L. Pereira, E. Zhukovskiy, S. Zhukovskiy // Applicable Analysis, 2015, 94, № 1] on the Lipschitz perturbations of multi-valued covering mappings. In the second section we introduce special metric spaces of integrable functions and obtain sufficient conditions of covering for the multi-valued Nemytskii operator in such spaces. Finally, using the mentioned results, we derive the existence conditions for the Cauchy problem for an implicit singular differential inclusion.
Keywords: implicit singular differential inclusion; Cauchy problem; existence of solution; covering multi-valued mapping; Lipschitz multi-valued mapping

REFERENCES

1. *Shindyapin A. I.* A boundary value problem for a singular equation // Differentsial'nye Uravneniya. 1984. V. 20. № 3. P. 450–455.
2. *Shindiapin A.* On linear singular functional-differential equations in one functional space // Abstract and Applied Analysis. 2004. V. 7. P. 567–575.
3. *Shindiapin A.I., Zhukovskiy E.S.* Covering mappings in the theory of implicit singular differential equations // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2016. V. 21. Iss. 6. P. 2107–2112.
4. *Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S.* Covering mappings and their applications to differential equations not solved with respect to the derivative // Differential Equations. 2009. V. 45. № 5. P. 627–649.
5. *Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S., Zhukovskii S.E.* On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative // Differential Equations. 2011. V. 47. № 11. P. 1541–1555.
6. *Zhukovskii E.S., Pluzhnikova E.A.* Covering mappings in a product of metric spaces and boundary value problems for differential equations unsolved for the derivative // Differential Equations. 2013. V. 49. № 4. P. 420–436.
7. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. № 1. P. 105–127.
8. *Arutyunov A., de Oliveira V.A., Pereira F.L., Zhukovskiy E., Zhukovskiy S.* On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. № 1. P. 129–143.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 17-41-680975, № 15-01-04601).

Received 9 September 2017

Pluzhnikova Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department; RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Shindiapin Andrey Igorevich, Eduardo Mondlane University, Mozambique, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Department of Mathematics and Computer Science,
e-mail: shindyapin.andrey@gmail.com

Для цитирования: *Плужникова Е.А., Шиндяпин А.И.* Об одном методе исследования неявных сингулярных дифференциальных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1314–1320. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1314-1320

For citation: Pluzhnikova E.A., Shindyapin A.I. Ob odnom metode issledovaniya neyavnykh singulyarnykh differentsial'nykh vklyucheniy [On one method of studying implicit singular differential inclusions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1314–1320. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1314-1320 (In Russian, Abstr. in Engl.).