УДК 517
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1309-1313

О ТОЧКАХ СОВПАДЕНИЯ ДВУХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ МЕТРИКОЙ

© **Е. А. Плужникова [1),2)] , Ю. А. Моисеев [1)] , А. А. Репин [1)]**

[1)] Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru, aaaum@yandex.ru, aleksejjrepin@rambler.ru
[2)] Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Рассмотрены пространства с векторнозначной метрикой, значениями которой являются элементы конуса линейного нормированного пространства. Для многозначных отображений сформулировано понятие накрывания (метрической регулярности) в пространствах с векторнозначной метрикой. Получено утверждение о точках совпадения метрически регулярного и липшицева многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой.
Ключевые слова: точки совпадения отображений; многозначные отображения; накрывающие отображения; метрически регулярные отображения; пространства с векторнозначной метрикой

Пусть задано непустое множество $\mathcal{X}$ и линейное нормированное пространство $E,$ в котором выделен некоторый замкнутый выпуклый конус E_+. Конус задает порядок в $E,$ то есть для любых элементов $r_1, r_2 \in E$ выполнено неравенство $r_1 \leqslant r_2$ тогда и только тогда, когда $r_2 - r_1 \in E_+$.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $\mathcal{P}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^2 \to E_+$ будем называть *векторнозначной метрикой,* а $(\mathcal{X}, \mathcal{P}_{\mathcal{X}})$ — *пространством с векторнозначной метрикой*, если:
1) равенство $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $x = u$;
2) для любых $x, u \in \mathcal{X}$ справедливо $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u) = \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(u,x)$;
3) для любых $x, u, v \in \mathcal{X}$ имеет место неравенство $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u) \leqslant \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,v) + \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(v,u)$.

Рассмотрим векторные аналоги определений некоторых понятий, известных для метрических пространств. *Замкнутым шаром* с центром в некоторой точке $u \in \mathcal{X}$ радиуса $r \in E_+$ в $\mathcal{X} \doteq (\mathcal{X}, \mathcal{P}_{\mathcal{X}})$ называем множество $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(u,r) \doteq \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u) \leqslant r\}$; r *-раздутие* $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(U,r)$ множества $U \subset \mathcal{X}$ определяется равенством $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(U,r) \doteq \bigcup_{x \in U} \mathrm{B}_{\mathcal{X}}(x,r)$. Сходимость в $\mathcal{X}$ определяется естественным образом. Пусть даны последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ и элемент $x \in \mathcal{X}$. Под сходимостью $x_n \to x$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{X}$ понимаем сходимость $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x) \to 0$ в $E,$ то есть $\|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n,x)\|_E \to 0$. Множество $U \subset \mathcal{X}$ *замкнуто,* если для любой сходящейся последовательности его элементов $\{x_n\} \subset U,$ $x_n \to x$ выполнено $x \in U$. Заметим, что замкнутый шар $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(u,r)$ будет замкнутым множеством в $\mathcal{X}$. Последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ будем называть *фундаментальной,* если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall m > N \quad \|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x_m)\|_E < \varepsilon.$$

Если любая фундаментальная последовать в $\mathcal{X}$ сходится, то это пространство называется *полным.*

Обозначим $\mathrm{Cl}(\mathcal{X})$ — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathcal{X}$. Отметим, что на пространства с векторнозначной метрикой не переносятся понятия расстояния от точки до множества и расстояния по Хаусдорфу между множествами, поскольку ограниченное множество в E_+ может не иметь инфимума (в отличие от линейного порядка в $\mathbb{R}$ упорядоченность в E частичная).

Пусть $E,\ M$ — некоторые линейные нормированные пространства с заданными замкнутыми выпуклыми конусами $E_+,\ M_+$; пусть $\mathcal{X},\ \mathcal{Y}$ — пространства с векторнозначными метриками $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}:\mathcal{X}^2\to E_+$, $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}:\mathcal{Y}^2\to M_+$. В пространстве $\mathcal{L}(M,E)$ линейных ограниченных операторов $F:M\to E$ определим множество положительных операторов

$$\mathcal{L}(M,E)_+ \doteq \{F : M \to E \mid F(M_+) \subset E_+\},$$

очевидно являющееся замкнутым выпуклым конусом. Обозначим $I_E:E\to E$ — тождественный оператор. Имеем $I_E\in\mathcal{L}(E,E)_+$.

Определение 2. Отображение $\Psi:\mathcal{X}\to\mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ будем называть *регулярным с коэффициентом* $K\in\mathcal{L}(M,E)_+$ или K *-регулярным* (*относительно векторнозначных метрик*), если для любых $x_0\in\mathcal{X}$, $y_0\in\Psi(x_0)$, $y\in\mathcal{Y}$ существует такой $x\in\mathcal{X}$, что $y\in\Psi(x)$ и имеет место оценка

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,x_0) \leqslant K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(y,y_0).$$

Свойство регулярности относительно векторнозначных метрик эквивалентно следующему включению

$$\forall r \in M_+ \quad \forall x_0 \in \mathcal{X} \quad \mathrm{B}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(x_0),r\big) \subset \Psi\big(\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(x_0,Kr)\big),$$

поэтому будем также назвать данное отображение K *-накрывающим* (*относительно векторнозначных метрик*) (см. [1–4]). Таким образом, отображение $\Psi:\mathcal{X}\to\mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ является регулярным тогда и только тогда, когда оно накрывающее.

Для формулировки основного результата определим еще одно понятие — липшицевости многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой.

Определение 3. Отображение $\Phi:\mathcal{X}\to\mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ будем называть *липшицевым с операторным коэффициентом* $Q\in\mathcal{L}(E,M)_+$ или Q *-липшицевым* (*относительно векторнозначных метрик*), если для любых $x_0,x\in\mathcal{X}$, $y_0\in\Phi(x_0)$ существует такой $y\in\Phi(x)$, что выполнено

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(y,y_0) \leqslant Q\,\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,x_0).$$

Отметим, что данное соотношение равносильно включению

$$\forall x_0,x \in \mathcal{X} \quad \Phi(x) \subset \mathrm{B}_{\mathcal{Y}}\big(\Phi(x_0),Q\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_0,x)\big).$$

Для отображения $\Phi:\mathcal{X}\to\mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ стандартно определим график — множество $\mathrm{gph}(\Phi)\doteq$ $\doteq\{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}:\ y\in\Phi(x),x\in\mathcal{X}\}$.

Точкой совпадения отображений $\Psi,\Phi:\mathcal{X}\to\mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ называют (см. [5]) аргумент $x\in\mathcal{X}$, для которого справедливо

$$\Psi(x)\cap\Phi(x)\neq\varnothing.$$

Сформулируем утверждение, уточняющее теорему о точках совпадения многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой из работы [1].

Теорема 1. *Пусть существуют такие* $K\in\mathcal{L}(M,E)_+$, $Q\in\mathcal{L}(E,M)_+$, *что отображение* $\Psi:\mathcal{X}\to\mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ *является* K *-накрывающим, а отображение* $\Phi:\mathcal{X}\to\mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ — Q *-липшицевым (относительно векторнозначных метрик); графики этих отображений* $\mathrm{gph}(\Psi)$, $\mathrm{gph}(\Phi)$ *замкнуты и хотя бы один из них является полным подпространством произведения* $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$; *пространство* E *является банаховым. Тогда, если для спектрального радиуса* ϱ *линейного* *ограниченного положительного оператора* $KQ \in \mathcal{L}(E,E)_+$ *имеет место оценка* $\varrho(KQ) < 1$, *то для любых* $x_0 \in \mathcal{X}$, $\psi_0 \in \Psi(x_0)$, $\phi_0 \in \Phi(x_0)$ *существует точка совпадения* x *отображений* Ψ *и* Φ, *удовлетворяющая неравенству*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,x_0) \leqslant (I_E - KQ)^{-1} K\, \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_0,\phi_0), \tag{1}$$

и существует $y \in \Psi(x_0) \cap \Phi(x_0)$ *такой, что*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(y,\phi_0) \leqslant Q(I_E - KQ)^{-1} K\, \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_0,\phi_0). \tag{2}$$

З а м е ч а н и е 1. В условии теоремы 1 можно потребовать, чтобы вместо пространства E банаховым было пространство M. В этом случае оценку (1) следует заменить равносильным неравенством

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,x_0) \leqslant K(I_M - QK)^{-1}\, \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_0,\phi_0),$$

а оценку (2) нужно записать в следующем виде

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(y,\phi_0) \leqslant (I_M - QK)^{-1} QK\, \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\psi_0,\phi_0).$$

З а м е ч а н и е 2. Если $E = M = \mathbb{R}$, то есть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — «обычные» метрические пространства, то теорема 1 равносильна теореме А. В. Арутюнова из работы [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Многозначные накрывающие отображения пространств с векторнозначной метрикой в исследовании функциональных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1974–1982.

2. *Жуковский Е.С.* О точках совпадения векторных отображений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. № 10. С. 14–28.

3. *Zhukovskiy E.S.* On coincidence points of multivalued vector mappings of metric spaces // Mathematical Notes. 2016. V. 100. № 3–4. P. 363–379.

4. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E., Zhukovskiy E.S.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343.

5. *Арутюнов А.В.* Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.

6. *Арутюнов А.В.* Задача о точках совпадения многозначных отображений и устойчивость по Уламу–Хайерсу // Доклады Академии наук. 2014. Т. 445. № 4. С. 379–383.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00553, № 15-01-04601).

Поступила в редакцию 2 сентября 2017 г.

Плужникова Елена Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа; Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Моисеев Юрий Анатольевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: aaaum@yandex.ru

Репин Алексей Анатольевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: aleksejjrepin@rambler.ru

UDC 517
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1309-1313

ON COINCIDENCE POINTS OF TWO MULTI-VALUED MAPPINGS IN SPACES WITH VECTOR-VALUED METRICS

© E. A. Pluzhnikova [1),2)] , Yu. A. Moiseev [1)] , A. A. Repin [1)]

[1)] Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsionalnaya st., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru, aleksejjrepin@rambler.ru
[2)] RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Spaces with vector-valued metrics are considered. The values of a vector-valued metric are elements of a cone in some linear normed space. The concept of covering (metric regularity) for multi-valued mappings in spaces with vector-valued metrics is formulated. A statement about coincidence points of a metrically regular and a Lipschitz multi-valued mappings in spaces with vector-valued metrics is obtained.
Keywords: coincidence points of mappings; multi-valued mappings; covering mappings; metrically regular mappings; spaces with vector-valued metrics

REFERENCES

1. *Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A.* Multi-valued covering maps spaces with vector-valued metrics in research of functional inclusions // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2016. V. 21. Iss. 6. P. 1974-1982.
2. *Zhukovskiy E.S.* On Coincidence Points for Vector Mappings // Russian Mathematics. 2016. V. 60. Iss. 10. P. 10–22.
3. *Zhukovskiy E.S.* On coincidence points of multivalued vector mappings of metric spaces // Mathematical Notes. 2016. V. 100. Iss. 3–4. P. 363–379.
4. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E., Zhukovskiy E.S.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343.
5. *Arutyunov A.V.* Coincidence points of two maps // Functional Analysis and Its Applications. 2014. V. 48. Iss. 1. P. 72–75.
6. *Arutyunov A.V.* Zadacha o tochkah sovpadeniya mnogoznachnyh otobrazheniy i ustoychivost' po Ulamu–Hayersu // Doklady Akademii nauk. 2014. T. 445. № 4. S. 379–383.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 17-01-00553, № 15-01-04601).

Received 2 September 2017

Pluzhnikova Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department; RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Moiseev Yuriy Anatol'evich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student, Functional Analysis Department, e-mail: aaaum@yandex.ru

Repin Alexey Anatol'evich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student, Functional Analysis Department, e-mail: aleksejjrepin@rambler.ru

Для цитирования: *Плужникова Е.А., Моисеев Ю.А., Репин А.А.* О точках совпадения двух многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1309–1313. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1309-1313.

For citation: Pluzhnikova E.A., Moiseev Yu.A., Repin A.A. O tochkah sovpadeniya dvuh mnogoznachnyh otobrazheniy v prostranstvah s vektornoznachnoy metrikoy [On coincidence points of two multi-valued mappings in spaces with vector-valued metrics]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1309–1313. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1309-1313 (In Russian, Abstr. in Engl.).