УДК 519.86
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1304-1308

О ПРИМЕНЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

© **Н. Г. Павлова**

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: natasharussia@mail.ru

В статье исследуется вопрос существования положения равновесия в динамической модели Эванса–Аллена. В работе приводятся достаточные условия существования вектор-функции равновесных цен, которые получены как следствие теорем о существовании точек совпадения липшицевого и накрывающего отображений.
Ключевые слова: экономическое равновесие; точки совпадения; накрывающие отображения

Статья является развитием работ [1]–[3], в которых результаты теории накрывающих отображений, а именно, теоремы о существовании точек совпадения, применяются для получения достаточных условий существования положения равновесия в различных моделях экономических процессов. Принципиальным отличием данной работы является то, что в ней исследуются динамические экономико-математические модели, в которых отображения спроса и предложения зависят не только от цен на товары, но и от скоростей изменения цен. Впервые динамические модели экономических процессов с непрерывным временем рассмотрел Г.С. Эванс в [4]. В 40-е годы двадцатого века такие модели изучал П.Э. Самуэльсон, в 60-е — Р. Аллен (см. [5]). Однако до настоящего времени не существовало работ, содержащих достаточные условия существования положения равновесия в динамических моделях "спрос-предложение" с непрерывным временем для случая двух и более отраслей. Это связано с отсутствием необходимого математического аппарата. Результаты работ [6]–[8] позволяют решить эту проблему. В частности, результаты статьи [8], посвященной приложениям теории накрывающих отображений к исследованию дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, дают возможность получить достаточные условия существования вектор-функции равновесных цен в модели динамической модели Эванса–Аллена.

Формализуем поставленную задачу. Рассмотрим метрические пространства X и Y с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. В дальнейшем будем предполагать, что пространство X полно. Замкнутый шар в пространстве X с центром в точке x радиуса r будем обозначать через $B_X(x,r)$, а замкнутый шар в пространстве Y с центром в точке y радиуса r — через $B_Y(y,r)$.

О п р е д е л е н и е 1 (см. [6]). *Пусть задано* $\alpha>0$. *Отображение* $\Psi: X\to Y$ *называется* α*-накрывающим, если*

$$\Psi(B_X(x,r)) \supseteq B_Y(\Psi(x),\alpha r) \ \ \forall r\geq 0,\ \forall x\in X.$$

О п р е д е л е н и е 2 (см. [7]). *Пусть задано* $\alpha > 0$ *и множества* $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$. *Отображение* $\Psi : X \to Y$ *называется* α *-накрывающим относительно множеств* U , V , *если для любых* $u \in U$, $r > 0$, *таких, что* $B_X(u,r) \subseteq U$, *имеет место включение*

$$\Psi(B_X(u,r)) \supseteq B_Y(\Psi(u), \alpha r) \cap V.$$

О п р е д е л е н и е 3 (см. [8]). *Отображение* $\Psi : X \to Y$ *называется условно* α *-накрывающим относительно множеств* $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$, *если оно является* α *-накрывающим относительно множеств* U *и* $\tilde{V} = V \cap \Psi(U)$. *Если* $U = X$, $V = Y$, *то отображение называется условно* α *-накрывающим.*

Т е о р е м а 1 (см. [6]). *Пусть пространство* X *полно, а* D , $S : X \to Y$ *– произвольные отображения, первое из которых непрерывно и является* α *-накрывающим, а второе удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица* $\beta < \alpha$. *Тогда для произвольного* $x_0 \in X$ *существует такое* $\xi = \xi(x_0) \in X$, *что*

$$D(\xi) = S(\xi), \tag{1}$$

$$\rho_X(x_0, \xi) \le \frac{\rho_Y(D(x_0), S(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

Решение ξ уравнения (1) может быть не единственным. Это решение ξ называется точкой совпадения отображений D и S .

Из приведенной теоремы вытекает (см. [6]) следующая теорема Милютина о возмущении накрывающего отображения.

Т е о р е м а 2. *Пусть* X *— полное метрическое пространство,* Y *— нормированное пространство, отображение* $D\colon X \to Y$ *является непрерывным и* α *-накрывающим. Тогда для любого отображения* $S\colon X \to Y$, *удовлетворяющего условию Липшица с константой Липшица* $\beta < \alpha$, *отображение* $D + S$ *является* $(\alpha - \beta)$ *-накрывающим.*

Исследуем вопрос о существовании положения равновесия в динамической непрерывной модели Вальраса–Эванса–Самуэльсона.

Пусть имеется $n \in \mathbb{N}$ товаров, причем i-ый товар в момент времени $t \in [t_1; t_2], t_1 \ge 0$ для потребителя имеет цену $p_i = p_i(t) > 0$, $i = \overline{1,n}$. Предположим также, что $\dot p(t) = (\dot p_1(t), \dot p_2(t), \dots$ $\dots, \dot p_n(t)) \in \Omega$ для п.в. t , где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — заданное замкнутое множество.

В пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{2n}$ определим нормы по формулам

$$\|x\|_1 = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| \quad \forall\, x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|y\|_2 = \max_{i=\overline{1,2n}} |y_i| \quad \forall\, y = (y_1, ..., y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n},$$

Рассмотрим метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) , где $X = \mathbb{R}^n_+$, $Y = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_+$, метрика ρ_X определяется нормой $\|\cdot\|_1$, а метрика ρ_Y — нормой $\|\cdot\|_2$.

Спрос совокупного потребителя описывается отображением $D : \Omega \times \mathbb{R}^n_+ \times [t_1; t_2] \to \mathbb{R}^n_+$, $D = D(\dot p(t), p(t), t)$, где $D_i(\dot p(t), p(t), t)$, $i = \overline{1,n}$, — объем приобретаемого в момент времени t i -го товара. Предложение совокупного производителя описывается отображением $S : \Omega \times \mathbb{R}^n_+ \times$ $\times\, [t_1; t_2] \to \mathbb{R}^n_+$, $S = S(\dot p(t), p(t), t)$, где $S_i(\dot p(t), p(t), t)$, $i = \overline{1,n}$, — объем произведенного и предлагаемого в момент времени t на рынке i -го товара. Будем предполагать, что отображения D и S удовлетворяют условиям Каратеодори:

k_1) отображения $D(\cdot,\cdot,t)$, $S(\cdot,\cdot,t)$ непрерывны при п.в. $t\in[t_1;t_2]$;

k_2) отображения $D(\dot p,p,\cdot)$, $S(\dot p,p,\cdot)$ измеримы при любых $(\dot p,p)\in\Omega\times\mathbb{R}^n_+$;

k_3) для любого $\rho>0$ существует число M , такое, что при любых $(\dot p,p)\in\Omega\times\mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющих неравенству $\|(\dot p,p)\|_2\le\rho$, и п. в. $t\in[t_1;t_2]$ имеют место неравенства $\|D(\dot p,p,t)\|_1\le M$ и $\|S(\dot p,p,t)\|_1\le M$.

Рассмотрим динамическую непрерывную модель "спрос-предложение"

$$\sigma(D(\dot p,p,t),S(\dot p,p,t)). \tag{2}$$

О п р е д е л е н и е 4. *Пусть* $\delta\in(0;t_2-t_1)$. *Положением равновесия в модели (2) называется абсолютно непрерывная функция* $p^\delta:[t_1;t_1+\delta]\to\mathbb{R}^n_+$, *производная которой существенно ограничена, для которой выполняются условия*

$$p(t_1)=\bar p:=(\bar p_1,\bar p_2,\ldots,\bar p_n), \tag{3}$$

$$D(\dot p,p,t)=S(\dot p,p,t),\ \ \dot p\in\Omega\ \ \dot\forall t\in[t_1;t_1+\delta]. \tag{4}$$

Определим полное метрическое пространство $AC_\infty(\bar p,[t_1,t_2],\Omega)$ таких абсолютно непрерывных функций $p:[t_1,t_2]\to\mathbb{R}^n_+$, что $\dot p\in L_\infty([t_1,t_2],\Omega)$, $p(t_1)=\bar p$, с метрикой

$$\rho_{AC_\infty(\bar p,[t_1,t_2],\Omega)}(p_1,p_2)=\|p_1-p_2\|_{AC_\infty([t_1,t_2],\mathbb{R}^n)}=\|\dot p_1-\dot p_2\|_{L_\infty([t_1,t_2],\mathbb{R}^n)}=\rho_{L_\infty([t_1,t_2],\mathbb{R}^n)}(\dot p_1,\dot p_2).$$

Т е о р е м а 3. *Пусть существуют такие положительные числа* ν, R_1, R_2 , *число* $\tau\in(0,t_2-t_1]$ *и функция* $u_0\in L_\infty([t_1,t_2),\Omega)$, *что:*

1) для некоторого $\alpha>0$ *при п. в.* $t\in[t_1,t_1+\tau]$ *и любом* $p\in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar p,\nu)$ *отображение* $S(\cdot,p,t):\Omega\to\mathbb{R}^n_+$ *является условно* α *-накрывающим относительно шаров*

$$U(t)=B_\Omega(u_0(t),R_1),\ \ V(p,t)=B_{\mathbb{R}^n_+}(S(u_0(t),p,t),\alpha R_2);$$

2) существует число $\beta>0$, *такое, что при п.в.* $t\in[t_1,t_1+\tau]$ *для любого* $p\in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar p,\nu)$ *и всех* $u,\hat u\in\Omega$ *выполнено неравенство*

$$\|D(u,p,t)-D(\hat u,p,t)\|_1\le\beta\|u-\hat u\|_1;$$

3) при п. в. $t\in[t_1,t_1+\tau]$ *и любом* $p\in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar p,\nu)$ *выполнено включение*

$$0\in S(U(t),p,t)-D(U(t),p,t);$$

4) существуют такие числа $L_S\ge0$ *и* $L_D\ge0$, *что при* $t\in[t_1,t_1+\tau]$ *для всех* p, $\hat p\in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar p,\nu)$ *и любого* $u\in U(t)$ *выполнены неравенства*

$$\|S(u,p,t)-S(u,\hat p,t)\|_1\le L_S\|p-\hat p\|_1,\quad \|D(u,p,t)-D(u,\hat p,t)\|_1\le L_D\|p-\hat p\|_1;$$

5) имеет место оценка

$$r_0:=(\alpha-\beta)^{-1}\operatorname*{vraisup}_{t\in[t_1,t_1+\tau]}\|S(u_0(t),\bar p,t)-D(u_0(t),\bar p,t)\|_1<R_{\min}:=\min\{R_1,R_2\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ *существует* $\delta\in(0,\tau]$ *и соответствующее решение* $p^\delta\in AC_\infty(\bar p,[t_1,t_1+\delta],\Omega)$ *задачи (3), (4), для которого выполнено неравенство*

$$\rho_{L_\infty([t_1,t_1+\delta],\Omega)}\left(\dot p^\delta,u_0^\delta\right)<r_0+\varepsilon,$$

где u_0^δ *— сужение функции* u_0 *на* $[t_1, t_1+\delta]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображение

$$F : \Omega \times \mathbb{R}^n_+ \times [t_1; t_2] \to \mathbb{R}^n, \;\; F(\dot{p}(t), p(t), t) = S(\dot{p}(t), p(t), t) - D(\dot{p}(t), p(t), t).$$

Из условий 1, 2 и теоремы 2 следует, что существуют числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, такие, что при п.в. $t \in [t_1, t_1+\tau]$ и любом $p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$ отображение F является условно $\alpha - \beta$-накрывающим относительно шаров $U(t)$ и $V(p,t)$. Кроме того, из условия 4 следует, что существует число $L \geq 0$, такое, что при $t \in [t_1, t_1+\tau]$ для всех $p, \hat{p} \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$ и любого $u \in U(t)$ выполнено неравенство

$$\|F(u,p,t) - F(u,\hat{p},t)\|_1 \leq L\|p - \hat{p}\|_1.$$

Из условия 3 следует, что при п.в. $t \in [t_1, t_1+\tau]$ и любом $p \in B_{\mathbb{R}^n_+}(\bar{p}, \nu)$ выполнено включение $0 \in F(U(t), p, t)$, а из условия 5 — оценка

$$r_0 := (\alpha - \beta)^{-1} \operatorname*{vraisup}_{t \in [t_1, t_1+\tau]} \|F(u_0(t), \bar{p}, t)\|_1 < R_{\min} := \min\{R_1, R_2\}.$$

Применяя теорему 3 из [7] к отображению F получаем утверждение теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г.* Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 2. С. 55–67.

2. *Жуковский С.Е., Павлова Н.Г.* О приложении теории накрывающих отображений к исследованию нелинейной модели рынка // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 1. С. 47–48.

3. *Павлова Н.Г.* О применении теории накрывающих отображений к исследованию экономико-математических моделей // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ. 2017. Т. 54. С. 287–290.

4. *Evans G.C.* Mathematical introduction to economics. N.Y.: McGraw-Hill, 1930.

5. *Аллен Р.* Математическая экономия. М.: Изд-во Иностранной лит-ры, 1963.

6. *Арутюнов А.В.* Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.

7. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. Iss. 1. P. 5–16.

8. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-8215.2016.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00849).

Поступила в редакцию 16 августа 2017 г.

Павлова Наталья Геннадьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: natasharussia@mail.ru

UDC 519.86
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1304-1308

ON THE APPLICATION OF THE RESULTS OF COVERING MAPPINGS THEORY FOR THE STUDY OF DYNAMICAL MODELS OF ECONOMIC PROCESSES

© **N. G. Pavlova**

RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: natasharussia@mail.ru

The paper is a study of the existence of equilibruim points in the dynamic Walrasian-Evans-Samuelson model. Sufficient conditions for the existence of the vector-function of equilibruim prices are derived from the existence theorems for coincidence points of Lipschitz continuous and covering mappings.
Key words: economical equalibruim; coincidence points; covering mappings

REFERENCES

1. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E., Pavlova N.G.* Equilibrium price as a coincidence point of two mappings // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. V. 53. Iss. 2. P. 158–169.
2. *Zhukovskiy S.E., Pavlova N.G.* On the application of covering mapping theory to nonlinear market models // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2013. V. 18. Iss. 1. P. 47–48.
3. *Pavlova N.G.* O primenenii teorii nakryvayushchih otobrazheniy k issledovaniyu ehkonomiko-matematicheskih modeley // Trudy Matematicheskogo tsentra im. N.I. Lobachevskogo / Kazanskoe matematicheskoe obshchestvo. - Kazan': Izd-vo Kazanskogo matematicheskogo obshchestva, Izd-vo Akademii nauk RT. 2017. T. 54. S. 287–290.
4. *Evans G.C.* Mathematical introduction to economics. N.Y.: McGraw-Hill, 1930.
5. *Allen R.* Matematicheskaya ehkonomiya. M.: Izd-vo Inostrannoy lit-ry, 1963.
6. *Arutyunov A.V.* Coincidence points of two maps // Functional Analysis and Its Applications. 2014. V. 48. Iss. 1. P. 72–75.
7. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. Iss. 1. P. 5–16.
8. *Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S.* Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative // Differential Equations. 2009. V. 45. Iss. 5. P. 627–649.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is financially supported by the grant of the President of the Russian Federation for the state support of the leading scientific schools (project НШ-8215.2016.1) and by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-01-00849).

Received 16 August 2017

Pavlova Natalia Gennadievna, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Для цитирования: *Павлова Н.Г.* О применении результатов теории накрывающих отображений к исследованию динамических моделей экономических процессов // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1304–1308. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1304-1308.

For citation: Pavlova N.G. O primenenii rezul'tatov teorii nakryvayushchih otobrazheniy k issledovaniyu dinamicheskih modeley ekonomicheskih protsessov [On the application of the results of covering mappings theory for the study of dynamical models of economic processes]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1304–1308. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1304-1308 (In Russian, Abstr. in Engl.).