УДК 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1298-1303

МИНИМУМЫ ФУНКЦИОНАЛОВ И НЕЯВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

© С. Е. Жуковский

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Доказана устойчивость при малых липшицевых возмущениях условия типа Каристи для функционалов на метрических пространствах. Полученный результат применен к неявным дифференциальным уравнениям. Получены достаточные условия разрешимости задачи Коши для неявных дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: условия типа Каристи; минимум; неявное ОДУ

1. Условия типа Каристи

Пусть (X,ρ) – метрическое пространство, заданы функция $U: X \to \mathbb{R}$ и число γ. В [1] была получена следующая теорема.

Т е о р е м а 1 (см. теорему 3 в [1]). *Пусть метрическое пространство X полно, функция U полунепрерывна снизу, существует $\gamma \in \mathbb{R}$ такое, что $U(x) \geq \gamma$ для любого $x \in X$. Предположим, что существует $k>0$ такое, что*

$$\forall\, x \in X \quad \text{если} \quad U(x) > \gamma, \quad \text{то} \quad \exists\, x' \in X: \quad x' \neq x \quad \text{и} \quad U(x') + k\rho(x,x') \leq U(x). \tag{1}$$

Тогда для любой точки $x_0 \in X$ существует точка $\bar{x} \in X$, в которой достигается минимум функции U, и, более того, $U(\bar{x}) = \gamma$ и $\rho(x_0,\bar{x}) \leq \dfrac{U(x_0)-\gamma}{k}$.

Условие (1) в [1] было названо условием типа Каристи.

В этом параграфе мы рассмотрим следующую задачу. Пусть $V: X \times X \to \mathbb{R}$. Допустим, что по первому аргументу функция V удовлетворяет предположениям теоремы 1. Нас будет интересовать, при каких дополнительных условиях на функцию V функция $U(x) := V(x,x)$, $x \in X$, достигает минимума. Приведем ответ на этот вопрос.

П р е д л о ж е н и е 2 . *Предположим, что*
(i) *метрическое пространство X полно, при любом $x_2 \in X$ функция $V(\cdot,x_2)$ полунепрерывна снизу, и $V(x_1,x_2) \geq \gamma$ для любых $x_1,x_2 \in X$;*
(ii) *существует $k>0$ такое, что для любого $x_2 \in X$ имеет место соотношение*

$$\forall\, x \in X \quad V(x,x_2) > \gamma \quad \Rightarrow \quad \exists\, x' \in X: \quad x' \neq x \quad \text{и} \quad V(x',x_2) + k\rho(x,x') \leq V(x,x_2).$$

(iii) *существует неотрицательное $\beta < k$ такое, что для любого $x_1 \in X$ функция $U(x_1,\cdot)$ является β -липшицевой.*

Тогда

$$\forall\, x_0 \in X \quad \exists\, \bar{x} \in X: \quad V(\bar{x}, \bar{x}) = \gamma \quad \text{и} \quad \rho(\bar{x}, x_0) \le \frac{U(x_0, x_0) - \gamma}{k - \beta}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $U(x) := V(x, x)$, $x \in X$. Покажем, что для функции U выполнены все предположения теоремы 1, и в частности, выполнено условие типа Каристи (1) с константой $k - \beta$.

Из предположения (i) следует, что функция U полунепрерывна снизу и $U(x) \ge \gamma$ для любого $x \in X$. Поэтому достаточно доказать, что для функции U выполняется условие (1) с константой $k - \beta$. Возьмем произвольную точку $x \in X$ такую, что $U(x, x) > \gamma$. Тогда по предположению (ii) существует точка $x' \in X$ такая, что

$$x' \ne x \quad \text{и} \quad U(x', x) + k\rho(x', x) \le U(x, x). \tag{2}$$

Из предположения (iii) следует, что

$$U(x', x') - U(x', x) \le \beta\rho(x, x'). \tag{3}$$

Применяя последовательно соотношения (3) и (2) получаем, что

$$U(x', x') + (k - \beta)\rho(x, x') = U(x', x') - \beta\rho(x, x') + k\rho(x, x') \le U(x', x) + k\rho(x, x') \le U(x, x).$$

Таким образом, для функции U выполняется условие (1) с константой $k - \beta$. Следовательно, для любого $x_0 \in X$ искомая точка $\bar{x} \in X$ существует. □

В предложении 2 предполагается, что нижняя граница функции $U(\cdot, x_2)$ – число γ, не зависит от x_2. Такое предположение выглядит искусственным, однако в следующем параграфе мы покажем, что оно естественным образом выполняется для широкого класса задач.

2. Задача Коши для неявного ОДУ

Пусть заданы непрерывное отображение $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу Коши

$$f(x, \dot{x}) = 0, \quad x(0) = x_0. \tag{4}$$

Под решением на отрезке $[0, T]$ будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x: [0, T] \to \mathbb{R}^n$ такую, что $x(0) = x_0$ и $f(x(t), \dot{x}(t)) = 0$ для почти всех $t \in [0, T]$. Сформулируем достаточные условия разрешимости задачи (4).

Т е о р е м а 3. *Предположим, что*

(i) *существует $L > 0$ такое, что отображение $f(\cdot, u)$ является L-липшицевым для любого $u \in \mathbb{R}^n$;*

(ii) *существует $k > 0$ такое, что для любых $x, u \in \mathbb{R}^n$ если $f(x, u) \ne 0$, то существует $u' \in \mathbb{R}^n$, $u' \ne u$, для которого имеет место неравенство*

$$|f(x, u')| + k|u - u'| \le |f(x, u)|.$$

Тогда для любого $T > 0$ такого, что $LT < k$, для любой измеримой существенно ограниченной функции $u_0: [0, T] \to \mathbb{R}^n$ существует решение $x(\cdot)$ задачи Коши (4), удовлетворяющее оценке

$$|\dot{x}(t) - u_0(t)| \le \frac{f\left(x_0 + \int\limits_0^t u_0(s)\, ds, u_0(s)\right)}{k - LT} \quad \forall\, t \in [0, T].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $T>0$ так, чтобы выполнялось неравенство $LT<k$, произвольную существенно ограниченную функцию $u_0:[0,T]\to\mathbb{R}^n$. Обозначим через $L^n_\infty[0,T]$ метрическое пространство измеримых существенно ограниченных функций $u:[0,t]\to\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой

$$\rho_{L^n_\infty}(u,v)=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}|u(t)-v(t)| \quad \forall\, u,v\in L^n_\infty[0,T].$$

Зададим функцию $V:L_\infty[0,T]\times L_\infty[0,T]\to\mathbb{R}$ по формуле

$$V(u_1,u_2)=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\left|f\left(x_0+\int\limits_0^t u_2(s)\,ds,u_1(t)\right)\right| \quad \forall\, u_1,u_2\in L^n_\infty[0,T].$$

Известно (см., например, [3], стр. 376), что функция V корректно определена. Докажем, что функция V удовлетворяет предположениям (i) – (iii) предложения 2.

Полнота пространства $L^n_\infty[0,T]$ очевидна. Возьмем произвольную точку $u_2\in L^n_\infty[0,T]$ и докажем, что функция $U(\cdot,u_2)$ полунепрерывна снизу. Предположим противное, т. е. существует последовательность $\{u_1^j\}\subset L^n_\infty[0,T]$ и точка $u_1\in L^n_\infty[0,T]$ такие, что $u_1^j\to u_1$, $V(u_1^j,u_2)\to a$ при $j\to\infty$ и $a<V(u_1,u_2)$. Положим $\varepsilon:=(V(u_1,u_2)-a)/2$. По построению множество

$$A:=\left\{t\in[0,T]:\ \left|f\left(x_0+\int\limits_0^t u_2(s)\,ds,u_1(t)\right)\right|>V(u_1,u_2)-\varepsilon\right\}$$

измеримо по Лебегу и имеет положительную меру. Кроме того, существует номер J такой, что при $j>J$ выполняется неравенство

$$\left|f\left(x_0+\int\limits_0^t u_2(s)\,ds,u_1^j(t)\right)\right|<a+\varepsilon \quad \dot\forall\, t\in A.$$

Поскольку по построению $V(u_1,u_2)-\varepsilon=a+\varepsilon$, то

$$f\left(x_0+\int\limits_0^t u_2(s)\,ds,u_1^j(t)\right)\ \not\to\ f\left(x_0+\int\limits_0^t u_2(s)\,ds,u_1(t)\right) \quad \dot\forall\, t\in A.$$

С другой стороны в силу непрерывности отображения f поскольку u_1^j сходится к u_1 равномерно, то

$$f\left(x_0+\int\limits_0^t u_2(s)\,ds,u_1^j(t)\right)\ \longrightarrow\ f\left(x_0+\int\limits_0^t u_2(s)\,ds,u_1(t)\right) \quad \dot\forall\, t\in[0,T].$$

Полученное противоречие доказывает полунепрерывность снизу функции $V(\cdot,u_2)$. Наконец, очевидно, что $V(u_1,u_2)\geq 0$ для любых $u_1,u_2\in L^n_\infty[0,T]$. Итак, функция V удовлетворяет предположениям предложения 2 с $\gamma=0$.

Докажем, что выполняется (ii). Зафиксируем произвольные точки $u_1,u_2\in L^n_\infty[0,T]$, так, чтобы $V(u_1,u_2)\neq 0$. Для всех $t\in[0,T]$ положим

$$U_t(x):=\left|f\left(x_0+\int\limits_0^t u_2(s)\,ds,\ x\right)\right| \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n, \quad \gamma_t:=0.$$

По предположению функция $U_t(\cdot)$ непрерывна, ограничена снизу числом γ_t, и

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad U_t(x) > \gamma_t \;\Rightarrow\; \exists\, x' \in \mathbb{R}^n : \quad x' \neq x \quad \text{и} \quad U_t(x') + k|x - x'| \leq U_t(x)$$

в силу предположения (ii). Поэтому по теореме 1 для почти всех $t \in [0, T]$ существует точка $\bar{x}_t \in \mathbb{R}^n$ такая, что

$$U_t(\bar{x}_t) = 0 \quad \text{и} \quad |u_1(t) - \bar{x}_t| \leq \frac{U_t(u_1(t))}{k}.$$

Последнее равносильно тому, что

$$0 \in f\Bigg(x_0 + \int\limits_0^t u_2(s)\, ds,\; B(u_1(t), r(t))\Bigg) \quad \dot{\forall}\, t \in [0, T],$$

где

$$r(t) := \frac{1}{k}\Bigg|f\Bigg(x_0 + \int\limits_0^t u_2(s)\, ds,\; u_1(t)\Bigg)\Bigg| \quad \dot{\forall}\, t \in [0, T],$$

а $B(u_1(t), r(t))$ – замкнутый шар с центром в точке $u_1(t)$ радиуса $r(t)$. В силу леммы Филиппова об измеримом выборе (см., например, теорему 1.7.10 в [4]) существует измеримая функция $u_1' : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ такая, что

$$f\Bigg(x_0 + \int\limits_0^t u_2(s)\, ds,\; u_1'(t)\Bigg) = 0 \quad \text{и} \quad |u_1(t) - u_1'(t)| \leq r(t) \quad \dot{\forall}\, t \in [0, T].$$

Из непрерывности функции f следует, что функция r существенно ограничена, и, значит, $u_1' \in L_\infty[0, T]$. Таким образом получаем, что

$$V(u_1', u_2) + k\rho_{L_\infty^n}(u_1', u_2) = k\rho_{L_\infty^n}(u_1', u_1) \leq kr(t) = V(u_1, u_2).$$

При этом $u_1' \neq u_1$, так как $V(u_1', u_2) = 0$ и $V(u_1, u_2) \neq 0$. Таким образом доказано, что для функции V и $\gamma = 0$ выполнено предположение (ii) предложения 2.

Докажем, что для функции V выполнено предположение (iii) предложения 2. Для произвольных $u_1, u_2, \widetilde{u}_2$ в силу липшицевости функции f по второму аргументу имеем

$$|V(u_1, u_2) - V(u_1, \widetilde{u}_2)| = \Bigg|f\Bigg(x_0 + \int\limits_0^t u_2(s)\, ds,\; u_1(t)\Bigg) - f\Bigg(x_0 + \int\limits_0^t \widetilde{u}_2(s)\, ds,\; u_1(t)\Bigg)\Bigg| \leq$$

$$\leq L\Bigg|\int\limits_0^t u_2(s)\, ds - \int\limits_0^t \widetilde{u}_2(s)\, ds,\Bigg| \leq L\int\limits_0^t |u_2(s) - \widetilde{u}_2(s)|\, ds \leq LT\rho_{L_\infty^n}(u_2, \widetilde{u}_2).$$

Значит, функция V липшицева по второму аргументу с константой $LT < k$. Значит, предположение (iii) предложения 2 выполняется.

Итак, функция V удовлетворяет всем предположениям предложения 2. Поэтому из предложения 2 следует, что существует функция $\bar{u} \in L_\infty^n[0, T]$ такая, что

$$V(\bar{u}, \bar{u}) = 0 \quad \text{и} \quad \rho_{L_\infty^n}(\bar{u}, u_0) \leq \frac{V(u_0, u_0)}{k - LT}.$$

Полагая

$$x(t) := x_0 + \int\limits_0^t \bar{u}(s)\,ds \quad \forall\, t \in [0, T],$$

получаем

$$x(0) = x_0, \quad f(x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad |\dot{x}(t) - u_0(t)| \le \frac{f\left(x_0 + \int\limits_0^t u_0(s)\,ds, u_0(s)\right)}{k - LT} \quad \dot{\forall}\, t \in [0, T].$$

Следовательно, $x(\cdot)$ – искомое решение. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В.* Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 30–44.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
3. *Zabreiko P.P., Koshelev A.I., Krasnosel'skii M.A., et al.* Integral Equations. M.: Nauka, 1968.
4. *Warga J.* Optimal Control of Differential and Functional Equations. N.Y.: Academic Press, 1972.

БЛАГОДАРНОСТИ: Результаты §1 получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект № МК-2085.2017.1). Результаты §2 получены при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01168).

Поступила в редакцию 13 августа 2017 г.

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

UDC 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1298-1303

ON MINIMA OF FUNCTIONALS AND IMPLICIT DIFFERENTIAL EQUATIONS

© S. E. Zhukovskiy

RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

The stability of Caristi-like conditions under small Lipschitz perturbations is proved for functionals on metric spaces. The result obtained is used for the investigation of implicit differential equation. Sufficient conditions for solvability of Cauchy problem for implicit ordinary differential equations are obtained.

Keywords: Caristi-like conditions; minimum; implicit ODE

REFERENCES

1. *Arutyunov A.V.* Caristi's condition and existence of a minimum of a lower bounded function in a metric space. Applications to the theory of coincidence points // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 291. P. 30–44.
2. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. M.: Nauka, 1976.
3. *Zabreiko P.P., Koshelev A.I., Krasnosel'skii M.A., et al.* Integral Equations. M.: Nauka, 1968.
4. *Warga J.* Optimal Control of Differential and Functional Equations. N.Y.: Academic Press, 1972.

ACKNOWLEDGEMENTS: The results of Section 1 were obtained with the support of the grant of the President of Russian Federation (project № MK-2085.2017.1). The results of Section 2 were obtained with the support of the grant of the Russian Science Foundation (project № 17-11-01168).

Received 13 August 2017

Zhukovskiy Sergey Evgenyevich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Для цитирования: *Жуковский С.Е.* Минимумы функционалов и неявные дифференциальные уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1298–1303. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1298-1303.

For citation: Zhukovskiy S.E. Minimumi funktsionalov i neyavnie differentsial'nie uravneniya [On minima of functionals and implicit differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1298–1303. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1298-1303 (In Russian, Abstr. in Engl.).