УДК 517.911, 517.968
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1277-1284

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

© **А. А. Григоренко**

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: g.anya@mail.ru

В статье рассматривается утверждение об оценке близости решения возмущенного включения к наперед заданной непрерывной функции. Рассмотрено приложение этого утверждения для изучения возмущения линейной краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений.
*Ключевые слова:* возмущенное включение; оценка решений; возмущенная линейная краевая задача

Пусть $X$ – банахово пространство с нормой $||\cdot||_X$. Обозначим $\mathrm{comp}[X]$ – множество всех непустых компактов пространства $X$; $\rho_X[\cdot,\cdot]$ – расстояние от точки до множества; $h_X[\cdot,\cdot]$ – расстояние по Хаусдорфу в между множествами. Пусть $\mathbb{R}^n$ – арифметическое пространство с нормой $|\cdot|$, если $A\subset\mathbb{R}^n$, то $||A||=\sup\{|a|:a\in A\}$. Пусть $\mathcal{U}\subset[a,b]$ – измеримое по Лебегу множество. $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ с нормой

$$||x||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}=\int\limits_{\mathcal{U}}|x(s)|\,ds;$$

$\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ – множество всех непустых, замкнутых, ограниченных, выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$; $\mathbf{C}^n[a,b]$ – пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_{\mathbf{C}^n[a,b]}=\max\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$; $\mathbf{C}^1_+[a,b]$ – конус неотрицательных функций пространства $\mathbf{C}^1[a,b]$

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ включение

$$x\in\Psi(x)+V\Phi(x), \tag{1}$$

где $\Psi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ – многозначные операторы, линейный непрерывный интегральный оператор $V:\mathbf{L}^n[a,b]\to\mathbf{C}^n[a,b]$ определен равенством

$$(Vz)\,(t)=\int\limits_a^b V(t,s)z(s)ds,\qquad t\in[a,b]. \tag{2}$$

Включение (1) назовем **возмущенным включением.**

Под **решением включения** (1) будем понимать элемент $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$, удовлетворяющий (1). Таким образом, непрерывная функция $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ является решением включения (1) тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $v\in\Psi(x)$ и $z\in\Phi(x)$, что справедливо равенство $x=v+Vz$.

Пусть $q_0\in\mathbf{C}^n[a,b]$, $r_0\in\Psi(q_0)$ и $w_0\in\mathbf{L}^n[a,b]$. Представим функцию $q_0$ в виде

$$q_0 = r_0 + Vw_0 + e, \tag{3}$$

где $e=q_0-r_0-Vw_0$. Предположим, что функция $k\in\mathbf{L}^1[a,b]$ для каждого измеримого $\mathcal{U}\subset[a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_0;\Phi(q_0)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} k(s)ds, \tag{4}$$

а непрерывная функция $\nu:[a,b]\to[0,\infty)$ определена соотношением

$$\nu(t) = \int\limits_a^b |V(t,s)|k(s)ds + |e(t)|, \tag{5}$$

где $|V(t,s)|$ – согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n\times n$ матрицы $V(t,s)$ в представлении (2), $e\in\mathbf{C}^n[a,b]$ – функция в правой части равенства (3).

Будем говорить, что отображения $V:\mathbf{L}^n[a,b]\to\mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ **обладают свойством A**, если найдутся непрерывные изотонные операторы $\Gamma:\mathbf{C}^1_+[a,b]\to\mathbf{L}^1_+[a,b]$ и $P:\mathbf{C}^1_+[a,b]\to\mathbb{R}^1$, удовлетворяющие условиям: для любых $x,y\in\mathbf{C}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U}\subset[a,b]$ выполняются неравенства

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x),\Phi(y)] \leqslant \|\Gamma Z(x-y)\|_{\mathbf{L}^1(U)}, \tag{6}$$

$$h_{\mathbf{C}^n[a,b]}[\Psi(x),\Psi(y)] \leqslant P\left(Z(x-y)\right); \tag{7}$$

для функции $\nu\in\mathbf{C}^1_+[a,b]$, определенной соотношением (5), сходится в пространстве $\mathbf{C}^1[a,b]$ ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{A}^i\nu,\ \mathcal{A}^0\nu=\nu,\ \mathcal{A}^i\nu=\mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{i-1}\nu\right),\ i=1,2,\ldots, \tag{8}$$

где непрерывный оператор $\mathcal{A}:\mathbf{C}^1_+[a,b]\to\mathbf{C}^1_+[a,b]$ определен равенством

$$\left(\mathcal{A}z\right)(t) = \int\limits_a^b |V(t,s)|(\Gamma z)(s)ds + P(z), \tag{9}$$

а отображение $Z:\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathbf{C}^1_+[a,b]$ определено соотношением

$$(Zx)(t) = |x(t)|. \tag{10}$$

Пусть $\xi(\nu)$ – сумма ряда (8), т. е.

$$\xi(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{A}^i\nu. \tag{11}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $q_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$, $w_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$ *и пусть функция* $q_0$ *представима равенством* (3). *Далее, пусть отображения* $V: \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi: \mathbf{C}^n[a,b] \to \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi: \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством A. Тогда найдется такое решение* $x$ $(x = v + Vz,\ v \in \Psi(x),\ z \in \Phi(x))$ *включения* (1), *для которого выполняются следующие оценки: при любом* $t \in [a,b]$

$$|x(t) - q_0(t)| \leqslant \xi(\nu)(t); \tag{12}$$

$$\|v - r_0\|_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leqslant P(\xi(\nu)); \tag{13}$$

*при почти всех* $t \in [a,b]$

$$|z(t) - w_0(t)| \leqslant k(t) + (\Gamma\xi(\nu))(t), \tag{14}$$

*где* $\nu, \xi(\nu), P, \Gamma, k$ *удовлетворяют соотношениям* (5), (11), (7), (6), (4), *соответственно.*

Далее, для общего вида линейной краевой задачи функционально-дифференциальной системы уравнений определим общую возмущенную краевую задачу, которая состоит из функционально-дифференциального включения, определяемого возмущениями линейной функционально-дифференциальной системы уравнений, и из включения для краевых условий, связанных возмущениями линейного вектор-функционала.

Пусть оператор $\Lambda: \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{D}^n[a,b]$ определен равенством

$$(\Lambda z)(t) = \int\limits_0^t z(s)\,ds.$$

Оператор $\Lambda$ будем называть **оператором интегрирования.** Рассмотрим линейный непрерывный оператор $\mathcal{L}: \mathbf{D}^n[a,b] \to \mathbf{L}^n[a,b]$. Запишем отображение $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L}x = Q\dot{x} + A(\cdot)x(a), \tag{15}$$

где оператор $Q: \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{L}^n[a,b]$ (главная часть оператора $\mathcal{L}$ в представлении (15)) $Q = \mathcal{L}\Lambda$, каждый столбец $n \times n$ матрицы $A(t)$ представляет собой результат применения оператора $\mathcal{L}$ к соответствующему столбцу единичной матрицы: $A(t) = (\mathcal{L}E)(t)$. Будем *предполагать, что оператор* $Q$ *имеет обратный и обратный оператор* $Q^{-1}: \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{L}^n[a,b]$ *непрерывен.*

Рассмотрим линейную краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}x = 0, \quad lx = 0, \tag{16}$$

где $l: \mathbf{D}^n[a,b] \to \mathbb{R}^n$ – линейный непрерывный вектор-функционал.

Будем предполагать, что *краевая задача* (16) *имеет только нулевое решение.* В этом случае согласно [1, стр. 34] существует непрерывный оператор Грина $G: \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{D}^n[a,b]$, определенный равенством

$$(Gz)(t) = \int\limits_a^b G(t,s)z(s)\,ds, \quad t \in [a,b], \tag{17}$$

который для произвольного $z \in \mathbf{L}^n[a,b]$ решение $x \in \mathbf{D}^n[a,b]$ краевой задачи

$$\mathcal{L}x = z, \quad lx = 0 \tag{18}$$

представляет в виде $x = Gz$ и, наоборот, каждое значение $Gz$ – решение задачи (18).

Пусть $X:[a,b]\to\mathbb{R}^{n\times n}$ фундаментальная матрица решений первого уравнения (16), удовлетворяющая условию

$$l(X)=E \tag{19}$$

($E$ – единичная матрица, матрица $l(X)$ представляет собой результат применения вектор-функционала $l$ к соответствующему столбцу матрицы $X$). В этом случае краевую задачу

$$\mathcal{L}x=z, \quad lx=c, \tag{20}$$

где $z\in\mathbf{L}^n[a,b]$, $c\in\mathbb{R}^n$, можно представить в виде

$$x=Xc+Gz. \tag{21}$$

Отметим, что равенства (20) в реальных математических моделях выполняются с какой-то степенью точности. Кроме того, сами линейные операторы $\mathcal{L}:\mathbf{D}^n[a,b]\to\mathbf{L}^n[a,b]$, $l:\mathbf{D}^n[a,b]\to\mathbb{R}^n$ определяются для различных процессов с теми или иными допущениями и предположениями, которые определяются либо неполнотой информации об реальном исследуемом процессе, либо «простотой» описания самой математической модели этого процесса. В связи с этими обстоятельствами целесообразно рассмотреть включения

$$\mathcal{L}x\in\Phi(x), \quad lx\in\varphi(x), \tag{22}$$

в которых многозначные отображения $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to 2^{\mathbf{L}^n[a,b]}$, $\varphi:\mathbf{C}^n[a,b]\to 2^{\mathbb{R}^n}$ могут описать неточность информации об процессе, различного рода предположения и допущения, а также степень аппроксимации математической модели этого процесса.

Будем говорить, что функция $x\in\mathbf{D}^n[a,b]$ – **решение задачи** (22), если $x$ удовлетворяет и первому и второму включениям в (22).

Краевую задачу (22) будем называть **возмущенной линейной краевой задачей** или просто **возмущенной краевой задачей.**

Рассмотрим интегральное включение

$$x\in X\varphi(x)+G\Phi(x), \tag{23}$$

где $X$ – фундаментальная матрица первого уравнения (16), удовлетворяющая равенству (19), отображение $G:\mathbf{L}^n[a,b]\to\mathbf{D}^n[a,b]$ – оператор Грина, определенный соотношением (17).

Л е м м а 1. *Возмущенная краевая задача* (22) *эквивалентна интегральному включению* (23). *Любое решение $x$ включения* (23) *однозначно представимо в виде* (21), *где* $c\in\varphi(x)$, $z\in\Phi(x)$.

Таким образом, согласно лемме 1 частным случаем возмущенного включения (1) является возмущенная краевая задача (22).

Рассмотрим возмущенную линейную задачу (22):

$$\mathcal{L}x\in\Phi(x), \quad lx\in\varphi(x), \tag{24}$$

где $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$, $\varphi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\operatorname{comp}\mathbb{R}^n$ – многозначные отображения.

Пусть $q\in\mathbf{C}^n[a,b]$, $r\in\varphi(q)$ и $w\in\mathbf{L}^n[a,b]$. Представим функцию $q$ равенством

$$q=Xr+Gw+e, \tag{25}$$

где $e=q-Xr-Gw$. Предположим, что функция $k\in\mathbf{L}^1[a,b]$ для каждого измеримого $\mathcal{U}\subset[a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}\left[w;\Phi(q)\right]\leq\int\limits_{\mathcal{U}}k(s)\,ds, \tag{26}$$

а непрерывная функция $\nu:[a,b]\to[0,\infty)$ определена соотношением

$$\nu(t)=\int\limits_a^b |G(t,s)|k(s)\,ds+|e(t)|, \tag{27}$$

где $|G(t,s)|$ – согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n\times n$ матрицы $G(t,s)$ в представлении (17), $e\in\mathbf{C}^n[a,b]$ – функция в правой части равенства (25).

Будем говорить, что оператор Грина $G:\mathbf{L}^n[a,b]\to\mathbf{C}^n[a,b]$ и многозначные отображения $\varphi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ **обладают свойством A**, если найдутся непрерывные изотонные операторы $\Gamma:\mathbf{C}^1_+[a,b]\to\mathbf{L}^1_+[a,b]$ и $P:\mathbf{C}^1_+[a,b]\to\mathbb{R}^1$, удовлетворяющие условиям : для любых $x,y\in\mathbf{C}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U}\subset[a,b]$ выполняются неравенства

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}\left[\Phi(x);\Phi(y)\right]\le||\Gamma Z(x-y)||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}, \tag{28}$$

$$h[\varphi(x);\varphi(y)]\le P(Z(x-y)); \tag{29}$$

для функции $\nu\in\mathbf{C}^1_+[a,b]$, определенной соотношением (27), сходится в пространстве $\mathbf{C}^1[a,b]$ ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{A}^i\nu,\quad \mathcal{A}^0\nu=\nu,\quad \mathcal{A}^i\nu=\mathcal{A}(\mathcal{A}^{i-1}\nu),\quad i=1,2,\ldots, \tag{30}$$

где непрерывный оператор $\mathcal{A}:\mathbf{C}^1_+[a,b]\to\mathbf{C}^1_+[a,b]$ определен равенством

$$(\mathcal{A}z)(t)=\int\limits_a^b |G(t,s)|(\Gamma z)(s)\,ds+\lambda P(z), \tag{31}$$

где

$$\lambda=\max\{|X(t)|:t\in[a,b]\}, \tag{32}$$

а отображение $Z:\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathbf{C}^1_+[a,b]$ определено соотношением

$$(Zx)(t)=|x(t)|.$$

Пусть $\xi(\nu)$ – сумма ряда (30), т. е.

$$\xi(\nu)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{A}^i\nu. \tag{33}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть* $q\in\mathbf{C}^n[a,b]$, $r\in\varphi(q)$ *и* $w\in\mathbf{L}^n[a,b]$ *и пусть функция* $q$ *представима равенством* (25). *Далее, пусть оператор Грина* $G:\mathbf{L}^n[a,b]\to\mathbf{C}^n[a,b]$ *и многозначные отображения* $\varphi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством A. Тогда найдется такое решение* $x$ *задачи* (24), *для которого выполняются следующие оценки: при любом* $t\in[a,b]$

$$|x(t)-q(t)|\le\xi(\nu)(t), \tag{34}$$

$$||X(r-lx)||_{\mathbf{C}^n[a,b]}\le\lambda P(\xi(\nu)) \tag{35}$$

*при почти всех* $t\in[a,b]$

$$|(\mathcal{L}x)(t)-w(t)|\le k(t)+\Gamma(\xi(\nu))(t),$$

*где функции* $\nu$, $\xi(\nu)$, *число* $\lambda$ *определены соотношениями* (27), (33), (32), *функция* $k$ *удовлетворяет неравенству* (26), *отображения* $\Gamma$ *и* $P$ *удовлетворяют оценкам* (28), (29).

Действительно, т. к. задача (24) эквивалентна включению (23), при этом отображения $G : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\widetilde{\Psi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ обладают свойством $A$, где отображение $\widetilde{\Psi}$ задано равенством

$$\widetilde{\Psi} y = X\varphi(y),$$

которое для любых $x, y \in \mathbf{C}^n[a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$h_{\mathbf{C}^n[a,b]}\,[\widetilde{\Psi}(x), \widetilde{\Psi}(y)] \le \lambda P(Z(x-y)),$$

здесь число $\lambda$ определено равенством (32). Поэтому теорема 2 является следствием теоремы 1.

Будем говорить, что оператор Грина $G : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ и многозначные отображения $\varphi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ **обладают свойством** $B$, если выполняются следующие условия: найдется неотрицательная функция $\beta \in \mathbf{L}^1[a,b]$, что для любых $x, y \in \mathbf{C}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}\,[\Phi(x); \Phi(y)] \le \int\limits_{\mathcal{U}} \beta(s)ds||x-y||_{\mathbf{C}^n[a,b]}; \tag{36}$$

найдется число $\alpha \ge 0$, что для любых $x, y \in \mathbf{C}^n[a,b]$ функционал $\varphi$ удовлетворяет неравенству

$$h[\varphi(x); \varphi(y)] \le \alpha||x-y||_{\mathbf{C}^n[a,b]} \tag{37}$$

для функции $\beta \in \mathbf{L}^1[a,b]$ и числа $\alpha \ge 0$ справедливо соотношение

$$\max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |G(t,s)|\beta(s)ds + \alpha\lambda < 1, \tag{38}$$

где число $\lambda$ определено равенством (32).

Далее, непрерывный оператор $\widetilde{\mathcal{A}} : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$ определим равенством

$$(\widetilde{\mathcal{A}} z)(t) = (\int\limits_a^b |G(t,s)|\beta(s)ds + \alpha\lambda)||z||_{\mathbf{C}^1[a,b]}. \tag{39}$$

Пусть непрерывная функция $\nu : [a,b] \to [0,\infty)$ определена соотношением (27). Обозначим

$$\widetilde{\xi}(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}^i \nu \quad (\widetilde{\mathcal{A}}^0 \nu = \nu, \quad \widetilde{\mathcal{A}}^i \nu = \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\mathcal{A}}^{i-1}\nu)). \tag{40}$$

Так как для любого $i = 0, 1, \ldots$ выполняется оценка

$$||\widetilde{\mathcal{A}}^i \nu||_{\mathbf{C}^1[a,b]} \le \zeta^i ||\nu||_{C^1[a,b]}, \tag{41}$$

где

$$\zeta = \max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |G(t,s)|\beta(s)ds + \alpha\lambda, \tag{42}$$

и согласно неравенству (38) $\zeta < 1$, то ряд (40) сходится в пространстве $\mathbf{C}^1[a,b]$.

Из теоремы 2 вытекает

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $q \in \mathbf{C}^n[a,b]$, $r \in \varphi(q)$ *и* $w \in \mathbf{L}^n[a,b]$ *и пусть функция* $q$ *представима равенством* (25). *Далее, пусть оператор Грина* $G : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ *и многозначные отображения* $\varphi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством* $B$. *Тогда найдется такое решение* $x$ *задачи* (24), *для которого выполняются следующие оценки: при любом* $t \in [a,b]$

$$|x(t) - q(t)| \leq \widetilde{\xi}(\nu)(t);$$

$$||X(r - lx)||_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leq \lambda\alpha||\widetilde{\xi}(\nu)||_{\mathbf{C}^1[a,b]};$$

*при почти всех* $t \in [a,b]$ *справедливо соотношение*

$$|(\mathcal{L}x)(t) - w(t)| \leq k(t) + \beta(t)||\widetilde{\xi}(\nu)||_{\mathbf{C}^1[a,b]},$$

*где функции* $\nu$, $\widetilde{\xi}(\nu)$, *число* $\lambda$ *определены соотношениями* (27), (40), (32), *число* $\alpha$, *функции* $k$, $\beta$ *удовлетворяют неравенствам* (37), (26), (36).

З а м е ч а н и е 1. Если $\mathcal{L}x = \dot{x}$, $lx = x(a)$, $\varphi(x) = x_0$ $(x_0 \in \mathbb{R}^n)$, $\Phi$ – оператор Немыцкого, то оценки, установленные в теореме 2 и следствии 1 аналогичны оценкам опубликованных в работах [2], [3], [4]. Кроме того, эти оценки дополняют оценки [5], [6], [7] поскольку не предполагают выпуклозначности отображения $\varphi$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

2. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.

3. *Чугунов П.И.* Свойства решений дифференциальных включений и управляемые системы // Прикладная математика и пакеты прикладных программ. Иркутск: Изд-во СЭИСО АН СССР, 1980. С. 155–179.

4. *Толстоногов А.А., Чугунов П.И.* О множестве решений дифференциального включения в банаховом пространстве. I // Сибирский математический журнал. 1983. Т. 24. № 6. С. 144–159.

5. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Некоторые результаты по теории возмущений многозначных операторов с выпуклыми замкнутыми значениями отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и их приложения // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 1997. Т. 2. Вып. 2. С. 111–120.

6. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Асимптотическое представление множеств $\delta$-решений включения типа Гаммерштейна // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 1997. Т. 2. Вып. 3. С. 294–298.

7. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Математический сборник. 1998. Т. 189. № 6. С. 3–32.


Поступила в редакцию 22 августа 2017 г.

Григоренко Анна Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: g.anya@mail.ru

UDC 517.911, 517.968
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1277-1284

# APPLICATION OF THE EXISTENCE THEOREM AND ESTIMATE OF SOLUTIONS OF THE PERTURBED INCLUSION TO THE STUDY OF THE PERTURBED LINEAR PROBLEM

© **A. A. Grigorenko**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsionalnaya st., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: g.anya@mail.ru

In the article, a statement about estimation of the closeness of solutions of the perturbed inclusion to a given continuous function is formulated. An application of this statement to the study of perturbation of a linear boundary value problem for functional-differential equations is considered.

*Keywords:* perturbed inclusion; estimation of solutions; perturbed linear boundary value problem

REFERENCES

1. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rahmatulina L.F.* Introduction to the theory of functional-differential equations. M.: Nauka, 1991. 280 p.

2. *Blagodatskih V.I., Filippov A.F.* Differential inclusions and optimal control // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 1986. V. 169. P. 199–259.

3. *Chugunov P.I.* Properties of solutions of differential inclusions and managed systems // Applied Mathematics and Application Packages. Irkutsk: Izdatelstvo SAISO AN SSSR, 1980. P. 155–179.

4. *Tolstonogov A.A., Chugunov P.I.* Set of solutions of a differential inclusion in Banach space. I // Siberian Mathematical Journal. 1983. V. 24. Iss. 6. P. 941–954.

5. *Bulgakov A.I., Tkach L.I.* Some results on the perturbation theory of multivalued operators with convex closed values of a Hammerstein-type map with nonconvex images and their applications // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 1997. V. 2. Iss. 2. P. 111–120.

6. *Bulgakov A.I., Tkach L.I.* Asymptotic representation of sets of $\delta$-solutions of inclusions of Hammerstein type // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 1997. V. 2. Iss. 2. P. 294–298.

7. *Bulgakov A.I., Tkach L.I.* Perturbation of a convex-valued operator by a set-valued map of Hammerstein type with non-convex values, and boundary-value problems for functional-differential inclusions // Sbornik: Mathematics. 1998. V. 189. Iss. 6. P. 821–848.

Received 22 August 2017

Grigorenko Anna Alexandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: g.anya@mail.ru

**Для цитирования:** *Григоренко А.А.* Применение теоремы о существовании и оценке решений возмущенного включения к изучению возмущенной линейной задачи // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1277–1284. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1277-1284.

**For citation:** Grigorenko A.A. Primenenie teoremy o sushchestvovanii i ocenke reshenij vozmushchennogo vklyucheniya k izucheniyu vozmushchennoj linejnoj zadachi [Application of the existence theorem and estimate of solutions of the perturbed inclusion to the study of the perturbed linear problem]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1277–1284. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1277-1284 (In Russian, Abstr. in Engl.).