УДК 519.6
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1261-1267

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

© А. В. Герасимова, Е. Б. Ланеев, М. Н. Муратов, Е. Ю. Пономаренко, В. В. Суровцев

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: olena.gerasimova@gmail.com, elaneev@yandex.ru,
finger@rambler.ru, ponomarenko.e.yu@gmail.com, real1sv@gmail.com

Получено устойчивое решение обратной задачи восстановления функции плотности распределения источников, соответствующей телу постоянной толщины, в смешанной краевой задаче для уравнения Пуассона по данным на границе области.
Ключевые слова: некорректно поставленная задача; обратная задача потенциала; класс тел Сретенского; метод регуляризации Тихонова

В работе рассматривается обратная задача восстановления плотности распределения источников, соответствующей телу постоянной толщины, относящегося к классу Сретенского [1] в рамках смешанной задачи для уравнения Пуассона. Задача сводится к обратной задаче потенциала [2], которая в свою очередь приведена к линейному интегральному уравнению первого рода, устойчивое решение которого строится на основе метода регуляризации Тихонова [3]. В этом случае решение обратной задачи потенциала аналогично решению векторного варианта [4] задачи продолжения поля потенциала [5], использованного в [6] для решения линейной обратной задачи потенциала для бесконечно тонких тел, а также для решения обратной задачи потенциала для тел постоянной толщины [7].

equatoin0

1. Постановка задачи

В цилиндрической области

$$D(F,\infty)=\{(x,y,z):0<x<l_x,0<y<l_y,F(x,y)<z<\infty\} \tag{1}$$

рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta\, u(M)=\rho, & M\in D(F,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_S=-hu|_S, & \\ u|_{x=0,l_x}=0,\ u|_{y=0,l_y}=0, & \\ E\to 0, z\to\infty, & \end{cases} \tag{2}$$

где поверхность

$$S=\{(x,y,z):0<x<l_x,0<y<l_y,z=F(x,y)<H\}, \tag{3}$$

Будем считать, что плотность источников ρ в задаче (2) соответствует телу постоянной толщины h, ограниченного плоскостями $z = H$ и $z = H + h$:

$$\rho(x, y, z) = \sigma(x, y)\theta(z - H)\theta(H + h - z). \tag{4}$$

В соответствие с (4) мы рассматриваем функции плотности распределения источников постоянные вдоль оси z и переменные в плоскости (x, y) внутри носителя плотности.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. Пусть в рамках модели (2) функция u на поверхности S задается, то есть известна функция

$$u|_S = f, \tag{5}$$

а плотность ρ неизвестна. Поставим задачу восстановления функции ρ вида (4) по заданной функции f. При известных параметрах H и h известны, задача состоит в восстановлении функции $\sigma(x, y)$ в (4) по известной функции f на поверхности S.

2. Восстановление плотности в случае точных данных

Отметим, что если $u|_S$ известна, то в силу того, что на поверхности S согласно (2) имеет место третье краевое условие, известна и нормальная производная g функции u, а именно:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = g = -hf. \tag{6}$$

Пусть $\varphi(M, P)$ – функции источника задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области

$$D^\infty = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < \infty\} \tag{7}$$

вида

$$\varphi(M, P) = \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}|z_M - z_P|}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \sin\frac{\pi n x_M}{l_x} \sin\frac{\pi m y_M}{l_y} \sin\frac{\pi n x_P}{l_x} \sin\frac{\pi m y_P}{l_y}.$$

Применим формулу Грина в области $D(F, \infty)$ к решению $u(P)$ задачи (2) и функции источника $\varphi(M, P)$, поместив точку M в область $D(-\infty, F)$

$$D(-\infty, F) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < F(x, y)\}, \tag{8}$$

с учетом (5) и (6) получим

$$\int\limits_{Supp\rho} \rho(P)\varphi(M, P)dV_P = \Phi(M), \tag{9}$$

где

$$\Phi(M) = \int\limits_S \left[g(P)\varphi(M, P) - f(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P)\right]d\sigma_P. \tag{10}$$

Тогда для потенциала в (9) получаем

$$\int\limits_{Supp\rho} \rho(P)\varphi(M, P)dV_P = \frac{2}{l_x l_y} \int\limits_{Supp\rho} dV_P \rho(P) \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}|z_M - z_P|}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \times$$
$$\times \sin(\frac{\pi n x_P}{l_x}) \sin(\frac{\pi m y_P}{l_y}) \sin(\frac{\pi n x_M}{l_x}) \sin(\frac{\pi m y_M}{l_y}).$$

Отсюда и из (4), учитывая, что $z_M < z_P$ в области $z_M < H$, следует

$$\int\limits_{Supp\rho} \rho(P)\varphi(M,P)dV_P = \frac{2}{l_x l_y}\int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y}\sigma(x_P,y_P)\int\limits_H^{H+h}dz_P\sum_{n,m=1}^{\infty}e^{-\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}(z_P-z_M)}\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}}\times$$
$$\times\sin\frac{\pi n x_P}{l_x}\sin\frac{\pi m y_P}{l_y}\sin\frac{\pi n x_M}{l_x}\sin\frac{\pi m y_M}{l_y}dx_P dy_P =$$
$$= \frac{4}{l_x l_y}\int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y}\sum_{n,m=1}^{\infty}e^{-\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}(H+\frac{h}{2}-z_M)}2\frac{\operatorname{sh}\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}\frac{h}{2}}{\pi(\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2})}\sin\frac{\pi n x_M}{l_x}\sin\frac{\pi m y_M}{l_y}\times$$
$$\times\sigma(x,y)\sin\frac{\pi n x}{l_x}\sin\frac{\pi m y}{l_y}dxdy = \int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y}K(x_M,y_M,z_M,x,y)\sigma(x,y)dxdy, \quad (11)$$

где

$$K(x_M,y_M,z_M,x,y) = \frac{4}{l_x l_y}\sum_{n,m=1}^{\infty}e^{-\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}(H+\frac{h}{2}-z_M)}\frac{\operatorname{sh}\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}\frac{h}{2}}{\pi(\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2})}\times$$
$$\times\sin\frac{\pi n x_M}{l_x}\sin\frac{\pi m y_M}{l_y}\sin\frac{\pi n x}{l_x}\sin\frac{\pi m y}{l_y}. \quad (12)$$

Поместив точку M на плоскость $z_M = a$, $a < \min F(x,y)$, где функция F задает поверхность S, из (9) из (11) получим интегральное уравнение относительно функции σ:

$$\int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y}K(x_M,y_M,a,x,y)\sigma(x,y)dxdy = \Phi(x_M,y_M,a), \quad (13)$$

где ядро интегрального оператора K имеет вид (12) и a фиксированный параметр, удовлетворяющий условию $a < \min F(x,y) < H$.

Решая уравнение (13), находим плотность σ, а, следовательно, и искомую плотность ρ вида (4).

Если плотность σ, определяющая границу тела, имеет носитель D, то $\sigma(M) = \sigma(M)\chi_D(M)$, где χ_D — характеристическая функция носителя функции плотности σ, в частности, когда $\sigma = \sigma_0 = const$ в пределах носителя, то $\sigma(M) = \sigma_0\chi_D(M)$ и

$$\chi_D(x,y) = \frac{1}{\sigma_0}\sigma(x,y).$$

Таким образом, если плотность σ найдена как решение интегрального уравнения (13), а величина σ_0 известна, то носитель D плотности, определяющий «форму» тела, можно определить формулой

$$D = \{(x,y) : \frac{1}{\sigma_0}\sigma(x,y) > \lambda,\ 0 < \lambda < 1\}. \quad (14)$$

Решение интегрального уравнения (13) может быть получено в виде ряда Фурье

$$\sigma(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty}\tilde{\Phi}_{nm}(a)e^{\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}(H+\frac{h}{2}-a)}\frac{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}{\operatorname{sh}(\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}\frac{h}{2})}\sin\frac{\pi n x}{l_x}\sin\frac{\pi m y}{l_y}, \quad (15)$$

где $\tilde{\Phi}_{nm}(a)$ — коэффициенты Фурье

$$\tilde{\Phi}_{nm}(a) = \frac{4}{l_x l_y}\int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y}\Phi(x,y,a)\sin\frac{\pi nx}{l_x}\sin\frac{\pi my}{l_y}dxdy$$

функции Φ вида (10) при $z_M = a$. Вводя обозначение

$$K_{nm}(a) = e^{\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}(H+\frac{h}{2}-a)}\frac{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}{\operatorname{sh}\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}\frac{h}{2}}, \tag{16}$$

(15) можно записать в виде

$$\sigma(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty}\tilde{\Phi}_{nm}(a)K_{nm}(a)\sin\frac{\pi nx}{l_x}\sin\frac{\pi my}{l_y}. \tag{17}$$

Отметим, что если функция в (5) известна точно, то правая часть в (13) вида (10) и, следовательно, (9) соответствует плотности σ вида (4), поэтому коэффициенты $\tilde{\Phi}_{nm}(a) = \sigma_{nm}/K_{nm}(a)$ убывают быстрее, чем растет $\exp\{\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}}(H-a)\}(\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2})$ и ряд (17) сходится по крайней мере в L_2.

3. Решение обратной задачи в случае приближенных данных

Пусть вместо точных функций f и g известна функция f^δ и g^δ такие, что

$$||f^\delta - f||_{L_2(S)} \leqslant \delta,\ ||g^\delta - g||_{L_2(S)} \leqslant C\delta, \tag{18}$$

В этом случае функция Φ вида (10) вычисляется приближенно:

$$\Phi^\delta(M) = \int\limits_S \Big[g^\delta\varphi(M,P) - f^\delta\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P, \tag{19}$$

Отметим, что при $g = -hf,\ g^\delta = -hf^\delta$ согласно (5) в качестве константы C в (18) можно взять $C = h$.

Для разности приближенной и точной правой части интегрального уравнения (13) нетрудно получить оценку

$$\|\Phi^\delta - \Phi\|_{L_2(\Pi(a))} \leqslant C_1\delta,\ C_1 = Const.$$

Здесь

$$\Pi(a) = \{(x,y,z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = a\}\ ,\ a < \min F(x,y).$$

Устойчивое приближенное решение интегрального уравнения первого рода (13) как некорректно поставленной задачи может быть получено на основе метода регуляризации Тихонова [3]. В качестве приближенного решения интегрального уравнения будем рассматривать экстремаль функционала Тихонова

$$M[w] = \| Kw - \Phi^\delta \|^2_{L_2(\Pi(a))} + \alpha \| w \|^2_{L_2}, \tag{20}$$

где K — интегральный оператор в (13). Экстремаль σ_α^δ может быть получена как решение уравнения Эйлера для функционала (20) в виде

$$\sigma_\alpha^\delta(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(a)K_{nm}(a)}{1+\alpha K^2_{nm}(a)}\sin\frac{\pi nx}{l_x}\sin\frac{\pi my}{l_y}, \tag{21}$$

где $\tilde{\Phi}^{\delta}_{nm}(a)$ – коэффициенты Фурье функции $\Phi^{\delta}|_{\Pi(a)}$ вида (19) и $K_{nm}(a)$ имеет вид (16).

Приближенное решение (21) отличается от точного (17) регуляризирующим множителем в коэффициентах ряда.

Т е о р е м а 1. Для любого $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ такого, что $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \to 0$ при $\delta \to 0$ функция σ^{δ}_{α} вида (21) сходится к точному решению (17) в L_2 при $\delta \to 0$.

В случае, когда $\sigma(M) = \sigma_0 \chi_D(M)$ в соответствие с (14) построим приближение D^{δ}_{λ} к носителю D плотности σ на основе приближенной функции плотности источников (21)

$$D^{\delta}_{\lambda} = \{(x,y) : \frac{1}{\sigma_0}\sigma^{\delta}_{\alpha}(x,y) > \lambda, \;\; 0 < \lambda < 1\}. \tag{22}$$

Т е о р е м а 2. В условиях теоремы 1 мера разделенной разности $\mu(D^{\delta}_{\lambda}\Delta D) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Доказательство теорем 1 и 2 дословно повторяет доказательство соответствующих теорем в [7].

Формулы (22), (21), (19) решают поставленную обратную задачу.

4. Приложение результатов к обратной задаче термографии

Решение обратной задачи может быть использовано для решения обратной задачи термографии [8]. Задача (2) представляет собой модель теплопроводящего тела цилиндрической формы, содержащего источники тепла (4), на боковых гранях которого поддерживается нулевая температура, а на поверхности S имеет место теплообмен со средой нулевой температуры, описываемый законом Ньютона, т. е. третьим краевым условием. Если в рамках модели (2) распределение температуры на поверхности S может быть измерено как функция f, например, тепловизионными методами, то в рамках этой модели может быть поставлена рассмотренная здесь обратная задача восстановления плотности распределения источников. Полученные результаты могут быть использованы при математической обработке термограмм в тепловизионных исследованиях в медицине [9] и других областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л.Н.* О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала // ДАН СССР. 1954. Т. 99. № 1. С. 21–22.
2. *Прилепко А.И.* Обратные задачи теории потенциала // Математические заметки. 1973. Т. 14. № 5. С. 755–767.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
4. *Ланеев Е.Б.* Устойчивое решение одной некорректно поставленной краевой задачи для потенциального поля // Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика. 2000. № 1. С. 105–112.
5. *Тихонов А.Н., Гласко В.Б., Литвиненко О.К., Мелихов В.Р.* О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс на основе метода регуляризации // Известия АН СССР. Физика Земли. 1968. № 1. С. 30–48.
6. *Ланеев Е.Б., Муратов М.Н., Пономаренко Е.Ю.* Об одной линейной обратной задаче потенциала в нечетно-периодической модели // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1249–1255.
7. *Ланеев Е.Б., Муратов М.Н., Пономаренко Е.Ю., Бааж О.* Об одной линейной обратной задаче потенциала для постоянной толщины // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2019–2025.
8. *Ланеев Е.Б., Муратов М.Н.* Об одной обратной задаче к краевой задаче для уравнения Лапласа с условием третьего рода на неточно заданной границе // Вестник РУДН. Серия Математика. 2003. № 10(1). С. 100–110.
9. *Иваницкий Г.Р.* Тепловидение в медицине // Вестник РАН. 2006. Т. 76. № 1. С. 48–58.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-05134) и инициативного проекта РУДН № 033801-0-000.

Поступила в редакцию 10 сентября 2017 г.

Герасимова Алена Валерьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: olena.gerasimova@gmail.com

Ланеев Евгений Борисович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: elaneev@yandex.ru

Муратов Михаил Николаевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: finger@rambler.ru

Пономаренко Екатерина Юрьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: ponomarenko.e.yu@gmail.com

Суровцев Виктор Васильевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, заместитель директора по инновациям Медицинского института, e-mail: real1sv@gmail.com

UDC 519.6
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1261-1267

ON ONE INVERSE PROBLEM OF SOURCES DENSITY DISTRIBUTION RECONSTRUCTION IN A MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION

© A. V. Gerasimova, E. B. Laneev, M. N. Muratov, E. Yu. Ponomarenko, V. V. Surovtsev

RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: olena.gerasimova@gmail.com, elaneev@yandex.ru, finger@rambler.ru, ponomarenko.e.yu@gmail.com, real1sv@gmail.com

An inverse problem with mixed boundary value conditions for the Poisson equation for bodies of constant thickness is considered, aiming to reconstruct the sources density distribution. A stable solution of the problem is obtained.

Keywords: ill-posed problem; inverse problem of the potential; the Sretenskiy class of bodies; method of Tikhonov regularization

REFERENCES

1. *Sretenskiy L.N.* O edinctvennocti oppedeleniya fopmy ppityagivayushchego tela po znacheniyam ego vneshnego potentsiala // DAN SSSR. 1954. T. 99. № 1. S. 21–22.

2. *Prilepko A.I.* Inverse problems of potential theory (elliptic, parabolic, hyperbolic, and transport equations) // Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1973. V. 14. Iss. 5. P. 990–996.

3. *Tihonov A.N., Arsenin V.Ya.* Metody resheniya nekorrektnyh zadach. M.: Nauka, 1979. 288 c.

4. *Laneev E.B.* Ustoychivoe reshenie odnoy nekorrektno postavlennoy kraevoy zadachi dlya potentsial'nogo polya // Vestnik RUDN. Seriya Prikladnaya matematika i informatika. 2000. № 1. S. 105–112.

5. *Tihonov A.N., Glasko V.B., Litvinenko O.K., Melihov V.R.* O prodolzhenii potentsiala v storonu vozmushchayushchih mass na osnove metoda regulyarizatsii // Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli. 1968. № 1. S. 30–48.
6. *Laneev E.B., Muratov M.N., Ponomarenko E.Yu.* Ob odnoy lineynoy obratnoy zadache potentsiala v nechetno-periodicheskoy modeli // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2015. V. 20. Iss. 5. P. 1249–1255.
7. *Laneev E.B., Muratov M.N., Ponomarenko E.Yu., Baazh O.* Ob odnoy lineynoy obratnoy zadache potentsiala dlya postoyannoy tolshchiny // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2016. V. 21. Iss. 6. P. 2019–2025.
8. *Laneev E.B., Muratov M.N.* Ob odnoy obratnoy zadache k kraevoy zadache dlya uravneniya Laplasa s usloviem tret'ego roda na netochno zadannoy granitse // Vestnik RUDN. Seriya Matematika. 2003. № 10(1). S. 100–110.
9. *Ivanitskii G.R.* Thermovision in medicine // Herald of the Russian Academy of Sciences. 2006. V. 76. № 1. P. 44–53.

ACKNOWLEDGEMENTS: The present research is supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 15-01-05134) and initiative project RUDN University № 033801-0-000.

Received 10 September 2017

Gerasimova Alyona Valer'evna, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, post graduate student of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: olena.gerasimova@gmail.com

Laneev Evgeniy Borisovich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: elaneev@yandex.ru

Muratov Mikhail Nikolaevich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate professor of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: finger@ramler.ru

Ponomarenko Ekaterina Yuryevna, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, post graduate student of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: ponomarenko.e.yu@gmail.com

Surovtsev Viktor Vasil'evich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, deputy director of innovation Institute of Medicine, e-mail: real1sv@gmail.com

Для цитирования: *Герасимова А.В., Ланеев Е.Б., Муратов М.Н., Пономаренко Е.Ю., Суровцев В.В.* Об одной обратной задаче восстановления плотности распределения источников в смешанной задаче для уравнения Пуассона // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1261–1267. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1261-1267.

For citation: Gerasimova A.V., Laneev E.B., Muratov M.N., Ponomarenko E.Yu., Surovtsev V.V. Ob odnoy obratnoy zadache vosstanovleniya plotnosti raspredeleniya istochnikov v smeshannoy zadache dlya uravneniya Puassona [On one inverse problem of sources density distribution reconstruction in a mixed boundary value problem for the Poisson equation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1261–1267. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1261-1267 (In Russian, Abstr. in Engl.).