УДК 517.988.63, 515.124
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1255-1260

ОДНА ОЦЕНКА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК И ТОЧЕК СОВПАДЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

© **М. В. Борзова** [1), **Е. С. Жуковский** [1),2)], **Н. Ю. Черникова** [2)]

[1)] Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: bmv_1603@mail.ru, zukovskys@mail.ru
[2)] Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: zukovskys@mail.ru, n.yu.chernikova@gmail.com

Для однозначных и многозначных отображений, действующих в метрическом пространстве X и удовлетворяющих условию Липшица, предлагается оценка снизу расстояния от заданного элемента $x_0 \in X$ до неподвижной точки. Таким образом, определяется такое $r>0$, что в шаре с центром в x_0 радиуса r нет неподвижных точек. Доказательство прямо следует из неравенства треугольника. Результат распространяется на (q_1,q_2)-метрические пространства. Аналогичная оценка получена для точек совпадения накрывающего и липшицева отображений метрических пространств.
Ключевые слова: неподвижная точка; точка совпадения; метрическое пространство; теорема Банаха; теорема Надлера; оценка снизу расстояния от заданного элемента до неподвижной точки

Напомним, что неподвижной точкой оператора φ, отображающего в себя некоторое множество X, называют такой $\tilde{x} \in X$, что $\tilde{x} = \varphi\tilde{x}$.

Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $\varphi: X \to X$ — сжатие, т. е. отображение, удовлетворяющее условию:

$$\exists \beta \in [0,1) \ \ \forall x, u \in X \ \ \mathrm{d}(\varphi x, \varphi u) \leq \beta \mathrm{d}(x,u).$$

В теореме Банаха [1] утверждается, что φ имеет единственную неподвижную точку $\tilde{x} \in X$, к элементу $\tilde{x}$ сходится последовательность итераций $x_i = \varphi x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, при любом x_0, и выполнено неравенство

$$\mathrm{d}(\tilde{x}, x_0) \leq \frac{1}{1-\beta}\,\mathrm{d}(x_0, \varphi x_0).$$

Таким образом, из теоремы Банаха следует, что неподвижная точка оператора φ содержится в замкнутом шаре $B_X(x_0, r) \doteq \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}$ радиуса $r = (1-\beta)^{-1}\mathrm{d}(x_0, \varphi x_0)$. Имеет место аналогичный результат о существовании неподвижной точки многозначного отображения — теорема Надлера (см., например [2], теорема 2.1.1).

Здесь мы получим оценку снизу расстояния от произвольного $x_0 \in X$ до неподвижной точки оператора φ, точнее, определим радиус шара с центром в x_0, в котором нет неподвижных точек этого оператора. Аналогичный результат мы получим для неподвижной точки многозначного отображения. Кроме того, получим оценку снизу расстояния от x_0 доточи совпадения накрывающего и липшицева отображений метрических пространств. Далее, эти оценки мы распространим на отображения, действующие в (q_1,q_2)-метрических пространствах.

Полученные оценки могут использоваться, например, в приближенных методах решения уравнений.

1. Оценка неподвижной точки оператора

Пусть (X, d) — метрическое (не обязательно полное) пространство, и пусть задан оператор $\varphi : X \to X$, удовлетворяющий условию Липшица

$$\exists \beta \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x, u \in X \quad \mathrm{d}(\varphi x, \varphi u) \leq \beta \mathrm{d}(x, u)$$

(неравенство $\beta < 1$ здесь не требуется).

П р е д л о ж е н и е 1. *Для любого элемента* $x_0 \in X$ *такого, что* $\varphi x_0 \neq x_0$, *открытый шар* $B_X^o(x_0, r) \doteq \{x \in X : \mathrm{d}(x, x_0) < r\}$ *радиуса* $r = (1+\beta)^{-1}\mathrm{d}(x_0, \varphi x_0)$ *не содержит неподвижных точек оператора* φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tilde{x} = \varphi \tilde{x}$. Согласно неравенству треугольника имеем

$$\mathrm{d}(x_0, \tilde{x}) + \mathrm{d}(\varphi \tilde{x}, \varphi x_0) = \mathrm{d}(x_0, \tilde{x}) + \mathrm{d}(\tilde{x}, \varphi x_0) \geq \mathrm{d}(x_0, \varphi x_0).$$

Из этого неравенства в силу условия Липшица следует

$$\mathrm{d}(x_0, \tilde{x}) + \beta \mathrm{d}(\tilde{x}, x_0) \geq \mathrm{d}(x_0, \varphi(x_0)) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(\tilde{x}, x_0) \geq \frac{1}{1+\beta}\,\mathrm{d}(x_0, \varphi x_0).$$

Таким образом, в шаре $B_X^o(x_0, r)$ нет неподвижных точек оператора φ. □

Стандартно определим расстояние в метрическом пространстве X от точки x до множества U равенством $\mathrm{d}(x, U) = \inf_{u \in U} \mathrm{d}(x, u)$. Обозначим через $H(U, V)$ расстояние по Хаусдорфу между непустыми множествами $U, V \subset X$. Рассмотрим теперь многозначное отображение $\Phi : X \rightrightarrows X$, удовлетворяющее условию Липшица

$$\exists \beta \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x, u \in X \quad H(\Phi x, \Phi u) \leq \beta \mathrm{d}(x, u).$$

Неподвижной точкой отображения Φ называют такой $\tilde{x} \in X$, что $\tilde{x} \in \Phi \tilde{x}$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Если для некоторого элемента* $x_0 \in X$ *выполнено* $\mathrm{d}(x_0, \Phi x_0) > 0$, *то в открытом шаре* $B_X^o(x_0, r)$ *радиуса* $r = (1+\beta)^{-1}\mathrm{d}(x_0, \Phi x_0)$ *нет неподвижных точек оператора* Φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tilde{x} \in \Phi \tilde{x}$. Справедливы неравенства

$$\mathrm{d}(x_0, \tilde{x}) + H(\Phi \tilde{x}, \Phi x_0) \geq \mathrm{d}(x_0, \tilde{x}) + \mathrm{d}(\tilde{x}, \Phi x_0) \geq \mathrm{d}(x_0, \Phi x_0).$$

Отсюда в силу условия Липшица получаем

$$\mathrm{d}(x_0, \tilde{x}) + \beta \mathrm{d}(\tilde{x}, x_0) \geq \mathrm{d}(x_0, \Phi x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}(\tilde{x}, x_0) \geq \frac{1}{1+\beta}\,\mathrm{d}(x_0, \Phi x_0).$$

Таким образом, в шаре $B_X^o(x_0, r)$ нет неподвижных точек оператора Φ. □

Получим аналогичные утверждения для (q_1, q_2)-метрического пространства (X, ρ). Расстояние в этом пространстве — отображение $\rho : X^2 \to \mathbb{R}_+$, называемое (q_1, q_2)-метрикой, удовлетворяет двум аксиомам обычной метрики:

$$\forall x, u \in X \quad \rho(x, u) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = u,$$
$$\forall x, u \in X \quad \rho(x, u) = \rho(u, x),$$

и ослабленному неравенству треугольника:

$$\exists q_1 \geq 1 \;\; \exists q_2 \geq 1 \;\; \forall x,u,w \in X \;\; \rho(x,w) \leq q_1\rho(x,u) + q_2\rho(u,w).$$

Пусть оператор $\varphi : X \to X$ удовлетворяет условию Липшица

$$\exists \beta \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall x,u \in X \;\; \rho(\varphi x, \varphi u) \leq \beta\rho(x,u).$$

П р е д л о ж е н и е 3. *Для любого элемента* $x_0 \in X$ *такого, что* $\varphi x_0 \neq x_0$, *открытый шар* $B_X^o(x_0,r) \doteq \{x \in X : \rho(x,x_0) < r\}$ *радиуса* $r = (q_1 + \beta q_2)^{-1}\rho(x_0, \varphi x_0)$ *не содержит неподвижных точек оператора* φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о повторяет доказательство предложения 1. Следует только воспользоваться вместо «обычного» ослабленным неравенством треугольника. □

Как и в «обычном метрическом» пространстве определим расстояние в (q_1,q_2)-метрическом пространстве X от точки x до множества U равенством $\rho(x,U) = \inf_{u\in U}\rho(x,u)$, и определим расстояние по Хаусдорфу между непустыми множествами $U,V \subset X$ соотношениями $H(U,V) = \min\{H_+(U,V), H_+(V,U)\}$, $H_+(U,V) = \sup_{u\in U}\rho(u,V)$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Phi : X \rightrightarrows X$, удовлетворяющее условию Липшица

$$\exists \beta \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall x,u \in X \;\; H(\Phi x, \Phi u) \leq \beta\rho(x,u).$$

П р е д л о ж е н и е 4. *Если* $\rho(x_0, \Phi x_0) > 0$ *при некотором* $x_0 \in X$, *то в открытом шаре* $B_X^o(x_0,r)$ *радиуса* $r = (q_1 + \beta q_2)^{-1}\rho(x_0, \Phi x_0)$ *нет неподвижных точек оператора* Φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о повторяет доказательство предложения 3. □

2. Оценка точек совпадения двух отображений

Пусть заданы отображения $f,\varphi : X \to Y$. Точкой совпадения этих отображений называют элемент $\tilde{x} \in X$, для которого выполнено равенство $f(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{x})$. Задача о точке совпадения в случае, когда X,Y — метрические пространства, исследована А.В. Арутюновым (см. [3]), и в случае, когда X,Y — (q_1,q_2)-метрические пространства — А.В. Арутюновым и А.В. Грешновым (см. [4]). В этих работах предполагается, что отображение $\varphi : X \to Y$ липшицево, а отображение $f : X \to Y$ накрывающее. Мы приведем здесь оценку снизу расстояния от произвольного $x_0 \in X$ до точек совпадения отображений $f,\varphi : X \to Y$ для (q_1,q_2)-метрических пространств. Соответствующий результат для метрических пространств вытекает из этой оценки при $q_1 = q_2 = 1$.

Пусть (X,ρ) — (q_1,q_2)-метрическое пространство, $Y \neq \emptyset$, и пусть задано отображение $\eta : Y^2 \to \mathbb{R}_+$. Никаких требований к «расстоянию» η в Y не предъявляется. Будем предполагать, что отображение $f : X \to Y$ является α*-накрывающим*, $\alpha > 0$, т. е.

$$\forall x \in X \;\; \forall y' \in Y \;\; \exists x' \in X \;\; fx' = y', \;\; \rho(x',x) \leq \alpha^{-1}\eta(y', fx),$$

а отображение $\varphi : X \to Y$ — β-липшицевым:

$$\forall x,u \in X \;\; \eta(\varphi x, \varphi u) \leq \beta\rho(x,u).$$

Так как f является α-накрывающим, то можно определить многозначное отображение

$$f^{-1} : Y \rightrightarrows X, \;\; f^{-1}y = \{x \in X : \, fx = y\}.$$

Для каждого $y \in Y$ значениями этого отображения являются непустые множества, отображение f^{-1} является липшицевым с коэффициентом $\beta = \alpha^{-1}$.

Для получения оценки точки совпадения запишем уравнение $fx = \varphi x$ в виде равносильного включения

$$x \in f^{-1}\varphi\, x.$$

Применяя к этому включению предложение 4, получим

П р е д л о ж е н и е 5. *Если при некотором* $x_0 \in X$ *выполнено* $\rho(x_0, f^{-1}\varphi\, x_0) > 0,$ *то в открытом шаре* $B^o_X(x_0, r)$ *радиуса* $r = (\alpha q_1 + \beta q_2)^{-1}\alpha\, \rho(x_0, f^{-1}\varphi\, x_0)$ *нет точек совпадения отображений* f, φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из предложения 4 в силу того, что композиция $f^{-1}\varphi : X \rightrightarrows X$ является $\alpha^{-1}\beta$-липшицевым отображением.

В заключение получим соответствующую оценку для точек совпадения многозначных отображений $F, \Phi : X \rightrightarrows Y$. Элемент $\tilde{x} \in X$ называют точкой совпадения этих отображений, если $F(\tilde{x}) \cap \Phi(\tilde{x}) \neq \emptyset$.

Пусть, как и выше (X, ρ) — (q_1, q_2)-метрическое пространство, на $Y \neq \emptyset$ задано «расстояние» $\eta : Y^2 \to \mathbb{R}_+$. Будем предполагать, что отображение $F : X \rightrightarrows Y$ является α*-накрывающим,* $\alpha > 0,$ т. е.

$$\forall x \in X \quad \forall y \in F(x) \quad \forall y' \in Y \quad \exists x' \in X \quad y' \in Fx', \quad \rho(x', x) \leq \alpha^{-1}\eta(y', y),$$

а отображение $\Phi : X \rightrightarrows Y$ — β-липшицевым:

$$\forall x, u \in X \quad H(\Phi x, \Phi u) \leq \beta\rho(x, u).$$

Здесь H — расстояние по Хаусдорфу, порожденное отображением η:

$$\forall U, V \subset Y \quad H(U, V) = \min\{H_+(U, V), H_+(V, U)\},$$
$$H_+(U, V) = \sup_{u \in U} \eta(u, V), \quad \eta(u, V) = \inf_{v \in V} \eta(u, v).$$

Так как F является α-накрывающим, то можно определить многозначное отображение

$$F^{-1} : Y \rightrightarrows X, \quad F^{-1}y = \{x \in X : \, y \in Fx\}.$$

Очевидно, $F^{-1}y \neq \emptyset$ при любом $y \in Y$. Отображение F^{-1} является липшицевым с коэффициентом $\beta = \alpha^{-1}$. Запишем условие $Fx \cap \Phi x \neq \emptyset$ в виде равносильного соотношения

$$x \in F^{-1}\Phi\, x.$$

К этому включению применимо предложение 4, поскольку композиция $F^{-1}\Phi : X \rightrightarrows X$ является $\alpha^{-1}\beta$-липшицевым отображением. Таким образом, справедливо

П р е д л о ж е н и е 6. *Если при некотором* $x_0 \in X$ *выполнено* $\rho(x_0, F^{-1}\Phi\, x_0) > 0,$ *то в открытом шаре* $B^o_X(x_0, r)$ *радиуса* $r = (\alpha q_1 + \beta q_2)^{-1}\alpha\, \rho(x_0, F^{-1}\Phi\, x_0)$ *нет точек совпадения отображений* F, Φ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Banach S.* Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales // Fundamenta Mathematicae. 1922. V. 3. P. 133–181.

2. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Либроком, 2011. 226 с.

3. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

4. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения // Доклады РАН. 2016. Т. 469. № 5. С. 527–531.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00553, № 15-01-05134), государственной программы Министерства образования и науки РФ № 3.8563.2017/7.8.

Поступила в редакцию 13 августа 2017 г.

Борзова Марина Васильевна, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, инженер научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования», e-mail:bmv_ 1603@mail.ru

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики; Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, ведущий научный сотрудник математического института им. С.М. Никольского, e-mail: zukovskys@mail.ru

Черникова Наталья Юрьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат химических наук, доцент, профессор кафедры химии и биологии, e-mail: n.yu.chernikova@gmail.com

UDC 517.988.63, 515.124
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1255-1260

ONE ESTIMATE OF FIXED POINTS AND COINCIDENCE POINTS OF MAPPINGS OF METRIC SPACES

© M. V. Borzova [1)], E. S. Zhukovskiy [1),2)], N. Yu. Chernikova [2)]

[1)] Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: bmv_1603@mail.ru, zukovskys@mail.ru
[2)] RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: zukovskys@mail.ru, n.yu.chernikova@gmail.com

For single-valued and multi-valued mappings acting in a metric space X and satisfying the Lipschitz condition, we propose a lower estimate of the distance from a given element $x_0 \in X$ to a fixed point. Thus, we find $r > 0$ such that there are no fixed points in the ball with center at x_0 of radius r. The proof follows directly from the triangle inequality. The result is extended to (q_1, q_2) - metric spaces. An analogous estimate is obtained for coincidence points of covering and Lipschitz mappings of metric spaces.

Keywords: fixed point; point of coincidence; metric space; Banach theorem; Nadler's theorem; lower estimate of the distance from a given element to a fixed point

REFERENCES

1. *Banach S.* Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales // Fundamenta Mathematicae. 1922. V. 3. P. 133–181.

2. *Borisovich YU.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskiy V.V.* Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy. M.: Librokom, 2011. 226 s.

3. *Arutyunov A.V.* Covering mappings in metric spaces and fixed points // Doklady Mathematics. 2007. V. 76. Iss. 2. P. 665–668.

4. *Arutyunov A.V., Greshnov A.V.* Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points // Doklady Mathematics. 2016. V. 94. Iss. 1. P. 434–437.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-01-00553, № 15-01-05134), by the state program of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation № 3.8563.2017/7.8.

Received 13 August 2017

Borzova Marina Vasilevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Engineer of the scientific and educational center «Fundamental mathematical research», e-mail: bmv_1603@mail.ru

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics; RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Leading Researcher of the Mathematical Institute named after S.M. Nikolsky, e-mail: zukovskys@mail.ru

Chernikova Natal'ya Yur'evna, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Chemical Sciences, Associate Professor, Professor of Chemistry and Biology Department, e-mail: n.yu.chernikova@gmail.com

Для цитирования: *Борзова М.В., Жуковский Е.С., Черникова Н.Ю.* Одна оценка неподвижных точек и точек совпадения отображений метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1255–1260. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1255-1260.

For citation: Borzova M.V., Zhukovskiy E.S., Chernikova N.Yu. Odna otsenka nepodvizhnykh tochek i tochek sovpadeniya otobrazheniy metricheskikh prostranstv [One estimate of fixed points and coincidence points of mappings of metric spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1255–1260. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1255-1260 (In Russian, Abstr. in Engl.).