УДК 515.126.4 + 515.126.83
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1247-1254

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

© **С. Бенараб, В. Мерчела, Е. А. Панасенко**

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: merchela.wassim@gmail.com, panlena_t@mail.ru

Рассматривается включение с многозначным отображением, действующим в пространствах с векторнозначными метриками. Показано, что если многозначное отображение F представимо в виде $F(x)=\Upsilon(x,x)$, где отображение Υ является замкнутым и метрически регулярным с некоторым операторным коэффициентом K по одному аргументу, липшицевым с операторным коэффициентом Q по другому аргументу, и спектральный радиус оператора KQ меньше единицы, то включение $F(x)\ni y$ разрешимо. Получены оценки векторнозначного расстояния от решения x этого включения до заданного элемента x_0. Во второй части работы эти результаты использованы для исследования интегрального включения неявного вида относительно неизвестной суммируемой функции.

Ключевые слова: пространство с векторнозначной метрикой; многозначное отображение; метрически регулярное отображение; интегральное включение неявного вида

Вопросы устойчивости свойства метрической регулярности (и равносильного свойства накрывания) при липшицевых возмущениях рассмотрены в работах Е.Р. Авакова, А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского, А.Д. Иоффе, А.А. Милютина, Б.Ш. Мордуховича, Ф.Л. Перейры. На основании полученных результатов были исследованы вопросы существования и получены оценки решений неявных дифференциальных и интегральных уравнений (см. [1], [2]). В связи с исследованием систем уравнений, краевых задач и задач управления в [3], [4] были предложены распространения ряда результатов о накрывающих отображениях метрических пространств на пространства с векторнозначной метрикой. Данная работа продолжает эти исследования.

Пусть E — линейное нормированное пространство, в котором задан выпуклый замкнутый острый конус E_+. Определим в E упорядоченность

$$\forall e,\tilde e\in E \quad \tilde e\le e \quad \Leftrightarrow \quad e-\tilde e\in E_+.$$

Будем предполагать, что норма $\|\cdot\|_E$ в пространстве E является монотонной:

$$\forall e,\tilde e\in E_+ \quad \tilde e\le e \ \Rightarrow\ \|\tilde e\|_E\le\|e\|_E.$$

Пусть задано непустое множество Ω. Отображение $\mathcal{P}_\Omega:\Omega^2\to E_+$ называют *векторнозначной метрикой,* если для любых $\omega,u,v\in\Omega$ выполнены следующие соотношения:

$$\mathcal{P}_\Omega(\omega,u)=0 \ \Leftrightarrow\ \omega=u; \quad \mathcal{P}_\Omega(\omega,u)=\mathcal{P}_\Omega(u,\omega); \quad \mathcal{P}_\Omega(\omega,u)\le\mathcal{P}_\Omega(\omega,v)+\mathcal{P}_\Omega(v,u).$$

Векторнозначную метрику $\mathcal{P}_\Omega$ будем сокращенно назвать в. *метрикой,* соответственно, пару $(\Omega,\mathcal{P}_\Omega)$ будем называть в. *метрическим пространством.*

Без ограничения общности в определении в. метрического пространства можно считать пространство E банаховым. Действительно, в случае, если линейное нормированное пространство E не является полным, его можно дополнить до некоторого полного пространства $\overline{E}$. Замыкание в полученном банаховом пространстве $\overline{E}$ множества E_+ будет выпуклым замкнутым острым конусом, который обозначим через $\overline{E}_+$. Не меняя значений в. метрики $\mathcal{P}_\Omega$, можем полагать, что это отображение действует из Ω^2 в банахово пространство $\overline{E}_+$.

В в. метрическом пространстве $\Omega \doteq (\Omega, \mathcal{P}_\Omega)$ стандартно определим *замкнутый шар* $\mathrm{B}_\Omega(\omega_0, e) \doteq \{\omega \in \Omega : \mathcal{P}_\Omega(\omega, \omega_0) \le e\}$ с центром в точке $\omega_0 \in \Omega$ радиуса $e \in E_+$ и e*-раздутие* $\mathrm{B}_\Omega(U, e) \doteq \bigcup_{\omega_0 \in U} \mathrm{B}_\Omega(\omega_0, e)$ множества $U \subset \Omega$. Сходимость $\omega_i \to \omega$ при $i \to \infty$ в Ω понимается как сходимость $\|\mathcal{P}_\Omega(\omega_i, \omega)\|_E \to 0$. Множество $U \subset \Omega$ *замкнуто,* если для любой сходящейся последовательности его элементов $\omega_i \in U$, $\omega_i \to \omega$ выполнено $\omega \in U$. Последовательность $\{\omega_i\} \subset \Omega$ называется *фундаментальной,* если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall i > N \quad \forall j > N \quad \|\mathcal{P}_\Omega(\omega_i, \omega_j)\|_E < \varepsilon.$$

Если любая фундаментальная последоват в Ω сходится, то это пространство называется *полным.*

Пусть E, M — некоторые банаховы пространства с заданными замкнутыми выпуклыми конусами E_+, M_+; $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — пространства с в. метриками $\mathcal{P}_\mathcal{X} : \mathcal{X}^2 \to E_+$, $\mathcal{P}_\mathcal{Y} : \mathcal{Y}^2 \to M_+$. В пространстве $\mathcal{L}(M, E)$ линейных ограниченных операторов $F : M \to E$ определим множество положительных операторов

$$\mathcal{L}(M, E)_+ \doteq \{F : M \to E \mid F(M_+) \subset E_+\},$$

которое будет в $\mathcal{L}(M, E)$ замкнутым выпуклым конусом. Обозначим $I_E : E \to E$ — тождественный оператор; $I_E \in \mathcal{L}(E, E)_+$. Через $\mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ обозначим совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathcal{Y}$.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $\Psi : \mathcal{X} \to \mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ будем называть в. *метрически регулярным с операторным коэффициентом* $K \in \mathcal{L}(M, E)_+$ (или коротко K*-регулярным*) *относительно множества* $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$, если для любых $x_0 \in \mathcal{X}$, $y_0 \in \Psi(x_0)$, $y \in \mathcal{W}$ существует такой $x \in \mathcal{X}$, что справедливо

$$y \in \Psi(x) \ \text{ и } \ \mathcal{P}_\mathcal{X}(x, x_0) \leqslant K \mathcal{P}_\mathcal{Y}(y, y_0).$$

Определение 1 эквивалентно следующему соотношению:

$$\forall r \in M_+ \quad \forall x_0 \in \mathcal{X} \quad \mathcal{W} \cap \mathrm{B}_\mathcal{Y}\big(\Psi(x_0), r\big) \subset \Psi\big(\mathrm{B}_\mathcal{X}(x_0, Kr)\big).$$

Нам потребуется также аналоги условия Липшица и понятия замкнутости для многозначного отображения, действующего в в. метрических пространствах.

О п р е д е л е н и е 2. Отображение $\Phi : \mathcal{X} \to \mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ будем называть *липшицевым с операторным коэффициентом* $Q \in \mathcal{L}(E, M)_+$ (или Q*-липшицевым*) *относительно множества* $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$, если для любых $x_0, x \in \mathcal{X}$, $y_0 \in \mathcal{W} \cap \Phi(x_0)$ существует такой $y \in \Phi(x)$, что выполнено неравенство

$$\mathcal{P}_\mathcal{Y}(y, y_0) \leqslant Q\, \mathcal{P}_\mathcal{X}(x, x_0).$$

Определение 2 эквивалентно следующему соотношению:

$$\forall x_0, x \in \mathcal{X} \quad \mathcal{W} \cap \Phi(x_0) \subset \mathrm{B}_\mathcal{Y}\big(\Phi(x), Q\mathcal{P}_\mathcal{X}(x, x_0)\big).$$

О п р е д е л е н и е 3. Отображение $\Phi : \mathcal{X} \to \mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ будем называть *замкнутым относительно множества* $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$, если для любых $x_i, x \in \mathcal{X}$, $y_i \in \Phi(x_i)$, $y \in \mathcal{W}$ из соотношений $\|\mathcal{P}_X(x_i, x)\|_E \to 0$, $\|\mathcal{P}_Y(y_i, y)\|_M \to 0$ следует $y \in \Phi(x)$.

Пусть заданы: отображение $\Upsilon : \mathcal{X}^2 \to \mathrm{Cl}(Y)$ и элемент $\tilde{y} \in Y$. Следующее утверждение о разрешимости включения

$$\tilde{y} \in \Upsilon(x, x), \tag{1}$$

является многозначным аналогом результата [3].

Т е о р е м а 1. *Пусть пространство $\mathcal{X}$ является полным, и пусть существуют такие $K \in \mathcal{L}(M, E)_+$, $Q \in \mathcal{L}(E, M)_+$, что отображение $\Upsilon(\cdot, x) : \mathcal{X} \to \mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ является K-регулярным относительно множества $\mathcal{W} \doteq \{\tilde{y}\}$ и замкнутым относительно множества $\mathcal{W}$, а отображение $\Upsilon(x, \cdot) : \mathcal{X} \to \mathrm{Cl}(\mathcal{Y})$ — Q-липшицевым относительно того же множества $\mathcal{W}$. Тогда, если для спектрального радиуса ϱ оператора $KQ \in \mathcal{L}(E, E)_+$ имеет место оценка $\varrho(KQ) < 1$, то включение* (1) *имеет решение; более того, для любых $x_0 \in \mathcal{X}$ и $y_0 \in \Upsilon(x_0, x_0)$ существует решение $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ включения* (1), *удовлетворяющее оценке*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(\tilde{x}, x_0) \leqslant (I_E - KQ)^{-1} K \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\tilde{y}, y_0). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о использует идеи и во многом повторяет доказательства аналогичных теорем для однозначных и многозначных отображений «обычных метрических» пространств [1, 2] и соответствующей теоремы для однозначных отображений в. метрических пространств [3]. Коротко опишем основные моменты доказательства.

Предположения данного утверждения позволяют определить итерационные последовательности $\{x_i\} \subset \mathcal{X}$, $\{y_i\} \subset \mathcal{Y}$ такие, что при любом $i = 1, 2, \ldots$ выполнены соотношения

$$y_i \in \Upsilon(x_i, x_i), \quad \tilde{y} \in \Upsilon(x_{i+1}, x_i),$$
$$\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\tilde{y}, y_i) \le Q \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_i, x_{i-1}), \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{i+1}, x_i) \le K \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\tilde{y}, y_i),$$

из которых следует неравенство

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{i+1}, x_i) \le KQ \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_i, x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Так как $\varrho(KQ) < 1$, то в полном пространстве $\mathcal{X}$ последовательность $\{x_i\}$ сходится к некоторому элементу $\tilde{x} \in \mathcal{X}$. Из приведенных соотношений также следует сходимость последовательности $\{y_i\} \subset \mathcal{Y}$ к элементу $\tilde{y} \in \mathcal{Y}$. В силу липшицевости отображения $\Upsilon(x_i, \cdot)$ существует такой $\tilde{y}_i \in \Upsilon(x_i, \tilde{x})$, что $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\tilde{y}_i, y_i) \le Q \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{i-1}, \tilde{x})$. Отсюда получаем $\tilde{y}_i \to \tilde{y}$. Теперь из замкнутости отображения $\Upsilon(\cdot, \tilde{x})$ следует, что $\tilde{y} \in \Upsilon(\tilde{x}, \tilde{x})$.

Для получения оценки (2) надо воспользоваться неравенствами

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_0, x_i) \le \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_0, x_1) + \ldots + \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{i-1}, x_i) \le$$
$$\le \big(I_E + KQ + \ldots + (KQ)^{i-1}\big) \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_0, x_1) \le (I_E - KQ)^{-1} \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_0, x_1). \qquad \square$$

С помощью теоремы 1 можно получить условия разрешимости и оценки решений различных функциональных, интегральных, дифференциальных включений неявного вида. Способ получения таких результатов мы продемонстрируем на примере интегрального включения в пространстве суммируемых функций.

Будем обозначать $|\cdot|$ — норму в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$; $\mathrm{B}_{\mathbb{R}^n}(x, r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x радиуса r; $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $L^n \doteq L([a, b], \mathbb{R}^n)$ — пространство суммируемых функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Пусть заданы: измеримые функции $\tilde{y} : [a, b] \to \mathbb{R}^k$, $\alpha : [a, b]^2 \to \mathbb{R}^{m \times k}$ и многозначное отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^k)$. Исследуем интегральное включение

$$\tilde{y}(t) \in F\Big(t, \int_a^b \alpha(t, s)\, x(s)\, ds,\, x(t)\Big), \quad t \in [a, b], \tag{3}$$

относительно неизвестной суммируемой функции $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(a) для любых $u\in\mathbb{R}^m$, $x\in\mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot,u,x):[a,b]\to\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^k)$ измеримо;

(b) при п.в. $t\in[a,b]$ и любом $u\in\mathbb{R}^m$ отображение $F(t,u,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^k)$ непрерывно;

(c) при п.в. $t\in[a,b]$ и любом $x\in\mathbb{R}^n$ отображение $F(t,\cdot,x):\mathbb{R}^m\to\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^k)$ непрерывно;

(d) для некоторой суммируемой функции $q:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ при п.в. $t\in[a,b]$, любых $x\in\mathbb{R}^n$, $u,\tilde u\in\mathbb{R}^m$, если $\tilde y(t)\in F(t,\tilde u,x)$, то существует $y\in F(t,u,x)$, удовлетворяющий неравенству $|\tilde y(t)-y|\le q(t)|\tilde u-u|$;

(e) для некоторой существенно ограниченной функции $\kappa:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ при п.в. $t\in[a,b]$, любых $u\in\mathbb{R}^m$, $x\in\mathbb{R}^n$ и $y\in F(t,u,x)$ существует $\tilde x\in\mathbb{R}^n$ такой, что $\tilde y(t)\in F(t,u,\tilde x)$, $|\tilde x-x|\le\kappa(t)|\tilde y(t)-y|$;

(f) функция α существенно ограничена.

Т е о р е м а 2. *Пусть для некоторого $x_0\in L^n$ существует такая измеримая функция $y_0:[a,b]\to\mathbb{R}^k$, что*

$$y_0(t)\in F\Big(t,\int_a^b\alpha(t,s)\,x_0(s)\,ds,\,x_0(t)\Big)\quad\textit{при п.в.}\quad t\in[a,b],\quad y_0-\tilde y\in L^k.$$

Если для спектрального радиуса линейного интегрального оператора

$$B:L^1\to L^1,\quad (B\mathcal{P})(t)\doteq\kappa(t)q(t)\int_a^b|\alpha(t,s)|\mathcal{P}(s)\,ds,\tag{4}$$

выполнено $\varrho(B)<1$, то существует решение $\tilde x\in L^n$ включения (3)*, удовлетворяющее при п.в. $t\in[a,b]$ неравенству*

$$|\tilde x(t)-x_0(t)|\le\kappa(t)\int_a^b\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(t,s)|\tilde y(s)-y_0(s)|\,ds,\tag{5}$$

где

$$\alpha_1(t,s)=\kappa(t)q(t)|\alpha(t,s)|;\quad \alpha_i(t,s)=\int_a^b\alpha_{i-1}(t,\varsigma)\alpha_1(\varsigma,s)\,d\varsigma,\quad i=2,3,\ldots\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пространстве L^n определим в. метрику

$$\mathcal{P}_{L^n}:L^n\times L^n\to L([a,b],\mathbb{R}_+),\quad \mathcal{P}_{L^n}(x,u)(t)\doteq|x(t)-u(t)|\ \ \forall x,u\in L^n.$$

Определим пространство $\widetilde{L}^k$ таких измеримых функций $y:[a,b]\to\mathbb{R}^k$, что $y-\tilde y\in L^k$. Заметим, что $\tilde y,y_0\in\widetilde{L}^k$.

В силу предположения **(e)** выполнено включение

$$\tilde y(t)\in F\Big(t,\int_a^b\alpha(t,s)\,x_0(s)\,ds,\,U(t)\Big),$$

где $U(t)\doteq\big\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0(t)|\le\kappa(t)|\tilde y(t)-y_0(t)|\big\}$. Согласно лемме Филиппова, существует $x_1\in L^n$, удовлетворяющий соотношениям

$$\tilde y(t)\in F\Big(t,\int_a^b\alpha(t,s)\,x_0(s)\,ds,\,x_1(t)\Big),\quad |x_1(t)-x_0(t)|\le\kappa(t)|\tilde y(t)-y_0(t)|.$$

При п.в. $t\in[a,b]$ отображение $F\big(t,\cdot,x_1(t)\big)$ непрерывно, а при любом $u\in\mathbb{R}^m$ отображение $F\big(\cdot,u,x_1(\cdot)\big)$ измеримо, таким образом, отображение

$$G:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^k),\quad G(t,u)\doteq F\big(t,u,x_1(t)\big),$$

удовлетворяет условиям Каратеодори и, следовательно, суперпозиционно измеримо. Тогда получаем, что многозначное отображение $t\mapsto F\Big(t,\int_a^b\alpha(t,s)\,x_1(s)\,ds,\,x_1(t)\Big)$ является измеримым, многозначное отображение $t\mapsto \mathrm{B}_{\mathbb{R}^k}\Big(\tilde y(t),q(t)\int_a^b|\alpha(t,s)||x_1(s)-x_0(s)|ds\Big)$ также измеримо, и пересечение этих отображений будет измеримым отображением, которое, согласно условию **(d)**, имеет непустые образы при п.в. $t\in[a,b]$. Отсюда следует существование измеримой функции y_1 такой, что

$$y_1(t)\in F\Big(t,\int_a^b\alpha(t,s)\,x_1(s)\,ds,\,x_1(t)\Big),\quad |\tilde y(t)-y_1(t)|\le q(t)\int_a^b|\alpha(t,s)||x_1(s)-x_0(s)|\,ds.$$

Поскольку $x_0,x_1\in L^n$, $q\in L([a,b],\mathbb{R}_+)$, а функция α существенно ограничена, то, согласно последней оценке, $\tilde y-y_1\in L^k$, что означает $y_1\in\widetilde{L}^k$.

Далее, по функциям $x_1,y_1,\tilde y$ найдем функцию $x_2\in L^n$, удовлетворяющую при п.в. $t\in[a,b]$ соотношениям

$$\tilde y(t)\in F\Big(t,\int_a^b\alpha(t,s)\,x_1(s)\,ds,\,x_2(t)\Big),\quad |x_2(t)-x_1(t)|\le\kappa(t)|\tilde y(t)-y_1(t)|,$$

а затем, по функциям $x_1,x_2,\tilde y$, измеримую функцию y_2, удовлетворяющую при п.в. $t\in[a,b]$ соотношениям

$$y_2(t)\in F\Big(t,\int_a^b\alpha(t,s)\,x_2(s)\,ds,\,x_2(t)\Big),\quad |\tilde y(t)-y_2(t)|\le q(t)\int_a^b|\alpha(t,s)||x_2(s)-x_1(s)|\,ds.$$

Разность $\tilde y-y_2$ принадлежит пространству L^k, то есть $y_2\in\widetilde{L}^k$.

Повторяя приведенные рассуждения, получим последовательности функций $\{x_i\}\subset L^n$ и $\{y_i\}\subset\widetilde{L}^k$, для которых, при любом $i=1,2,...$ и п.в. $t\in[a,b]$, будут выполнены соотношения:

$$y_i(t)\in F\Big(t,\int_a^b\alpha(t,s)\,x_i(s)\,ds,\,x_i(t)\Big),\quad \tilde y(t)\in F\Big(t,\int_a^b\alpha(t,s)\,x_i(s)\,ds,\,x_{i+1}(t)\Big),$$

$$|x_{i+1}(t)-x_i(t)|\le\kappa(t)|\tilde y(t)-y_i(t)|,\quad |\tilde y(t)-y_i(t)|\le q(t)\int_a^b|\alpha(t,s)||x_i(s)-x_{i-1}(s)|\,ds. \tag{6}$$

Из оценок (6) следует, что при п.в. $t\in[a,b]$

$$|x_{i+1}(t)-x_i(t)|\le\kappa(t)q(t)\int_a^b|\alpha(t,s)||x_i(s)-x_{i-1}(s)|\,ds$$

или

$$\mathcal{P}_{L^n}(x_{i+1},x_i)(t)\le(B\mathcal{P}_{L^n}(x_i,x_{i-1}))(t),\quad i=1,2,..., \tag{7}$$

где оператор B определен равенством (4). Поскольку $\varrho(B)<1$, то, рассуждая далее как в доказательстве теоремы 1, получаем, что последовательность $\{x_i\}$ будет сходится к функции $\tilde x\in L^n$ такой, что $\tilde y(t)\in F\Big(t,\int_a^b\alpha(t,s)\,\tilde x(s)ds,\,\tilde x(t)\Big)$ при п.в. $t\in[a,b]$.

Покажем, что для решения $\tilde{x}$ справедлива оценка (5). Прежде всего, из неравенства (7), положительности оператора B и условия $\varrho(B)<1$ следует, что для любого $i=1,2,...$ при п.в. $t\in[a,b]$ выполнено

$$\mathcal{P}_{L^n}(x_0,x_i)(t)\leq\mathcal{P}_{L^n}(x_0,x_1)(t)+\mathcal{P}_{L^n}(x_1,x_2)(t)+...+\mathcal{P}_{L^n}(x_{i-1},x_i)(t)\leq$$
$$\leq\Big((I_{L^1}+B+...+B^{i-1})\mathcal{P}_{L^n}(x_0,x_1)\Big)(t)\leq\Big((I_{L^1}-B)^{-1}\mathcal{P}_{L^n}(x_0,x_1)\Big)(t), \qquad (8)$$

где оператор $(I_{L^1}-B)^{-1}:L^1\to L^1$ есть сумма ряда Неймана $I_{L^1}+B+B^2+\ ...$. Интегральный оператор B действует в L^1, регулярен (и положителен), с ядром $\kappa(t)q(t)|\alpha(t,s)|$, поэтому для любого i оператор B^i также будет интегральным оператором с ядром $\alpha_i(t,s)$, определяемым равенствами (см., например, [5, с. 158])

$$\alpha_1(t,s)\doteq\kappa(t)q(t)|\alpha(t,s)|;\quad \alpha_i(t,s)\doteq\int_a^b\alpha_{i-1}(t,\varsigma)\,\alpha_1(\varsigma,s)\,d\varsigma,\quad i=2,3,\dots.$$

Более того, суммой ряда Неймана будет интегральный оператор с ядром $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(t,s)$. Таким образом, учитывая первое неравенство в (6), из (8) получаем искомую оценку (5). $\square$

З а м е ч а н и е 1. В силу условия $\varrho(B)<1$, правая часть неравенства (5) — это линейный положительный интегральный оператор $z\mapsto\kappa(t)\int_a^b\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i(t,s)z(s)\,ds$, действующий из L^1 в L^1, с ядром $\eta(t,s)\doteq\kappa(t)\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i(t,s)$, удовлетворяющим оценке $\operatorname*{vrai\,sup}\limits_{s\in[a,b]}\int_a^b\eta(t,s)ds<\infty$.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 2 не является формальным следствием теоремы 1, поскольку условия **(a)** – **(f)** не гарантируют даже действие оператора Немыцкого, порожденного отображением F, из пространства L^k в пространство $\widetilde{L}^k$. Тем не менее, рассмотренный в доказательстве теоремы 1 подход к построению итерационных последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ применим в условиях теоремы 2 и используется в ее доказательстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

2. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. Iss. 3. P. 1026–1044.

3. *Жуковский Е.С.* О возмущениях накрывающих отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 375–379.

4. *Жуковский Е.С.* О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57. № 2. С. 297–311.

5. Функциональный анализ. Под общей редакцией С.Г. Крейна. СМБ. М.: Наука, 1972. 544 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00553, № 16-01-00386).

Поступила в редакцию 15 августа 2017 г.

Бенараб Сарра, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: merchela.wassim@gmail.com

Мерчела Вассим, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: merchela.wassim@gmail.com

Панасенко Елена Александровна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: panlena_t@mail.ru

UDC 515.124
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1247-1254

ABOUT EXISTENCE AND ESTIMATION OF SOLUTION TO ONE INTEGRAL INCLUSION

© **S. Benarab, W. Merchela, E. A. Panasenko**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsionalnaya st., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: merchela.wassim@gmail.com, panlena_t@mail.ru

An inclusion with multi-valued mapping acting in spaces with vector-valued metrics is under discussion. It is shown that, if a multi-valued mapping F can be written as $F(x)=\Upsilon(x,x)$, where the mapping Υ is closed and metrically regular with some operator coefficient K with respect to one argument, Lipschitz with operator coefficient Q with respect to the other argument, and the spectral radius of the operator KQ is less than one, then the inclusion $F(x)\ni y$ is solvable. The estimations of the vector-valued distance from a solution x of the inclusion to a given element x_0 are derived. In the second part of the paper, these results are used to investigate an integral inclusion of the implicit type with respect to the unknown integrable function.
Keywords: space with vector-valued metric; multi-valued mapping; metrically regular mapping; implicit type integral inclusion

REFERENCES

1. *Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S.* Covering mappings and their applications to differential equations not solved with respect to the derivative // Differential Equations. 2009. V. 45. № 5. P. 627–649.
2. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. Iss. 3. P. 1026–1044.
3. *Жуковский Е.С.* On perturbations of covering mappings in spaces with vector-valued metrics // Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. 2016. V. 21. Iss. 2. P. 375–379. (In Russian)
4. *Zhukovskii E.S.* Perturbations of vectorial coverings and systems of equations in metric spaces // Siberian Mathematical Journal. 2016. V. 57. № 2. P. 230–241.
5. Funkcional'nyi analiz. Pod obshchei redakciei S.G. Kreina. SMB. Moscow, Nauka Publ., 1972. 544 p. (In Russian)

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 17-01-00553, № 16-01-00386).

Received 15 August 2017

Benarab Sarra, Tambov State University named after G.R. Derzhavina, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student, Functional Analysis Department, e-mail: merchela.wassim@gmail.com

Merchela Wassim, Tambov State University named after G.R. Derzhavina, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student, Functional Analysis Department, e-mail: merchela.wassim@gmail.com

Panasenko Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavina, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: panlena_t@mail.ru

Для цитирования: *Бенараб С., Мерчела В., Панасенко Е.А.* О существовании и оценке решения одного интегрального включения // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1247–1254. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1247-1254.

For citation: Benarab S., Merchela W., Panasenko E.A. O sushchestvovanii i otsenke resheniya odnogo integral'nogo vklyucheniya [About existence and estimation of solution to one integral inclusion]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1247–1254. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1247-1254 (In Russian, Abstr. in Engl.).