

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© В. И. Фомин

Тамбовский государственный технический университет
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106
E-mail: vasilyfomin@bk.ru

Построено линейное приближение сферической поверхности.

Ключевые слова: единичная сфера; большая окружность; диаметральной плоскость; сферический треугольник; диаметр разбиения; оптимальная касательная плоскость; оптимальная точка касания

Введение

Как известно [1, с. 137], понятие площади ограниченной полной двусторонней поверхности Φ определяется следующим образом: 1) Φ разбивается гладкими или кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i ; 2) на каждой части Φ_i выбирается произвольным образом точка M_i , и в этой точке проводится касательная плоскость $K(M_i)$ к поверхности Φ ; 3) рассматривается площадь s_i проекции Φ_i на плоскость $K(M_i)$; 4) площадь фигуры Φ определяется как предел величины $S = \sum_i s_i$ при стремлении диаметра разбиения к нулю. В настоящей работе на примере сферы указаны один конкретный способ разбиения поверхности Φ на части Φ_i , а именно, разбиение сферической поверхности большими окружностями на сферические треугольники, и оптимальный способ выбора точек M_i для такого разбиения.

Основная часть

Рассмотрим в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3 = \{u = (x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ с евклидовой нормой $\|u\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ единичную сферу $S_1(O) = \{u \in \mathbb{R}^3 | \|u\| = 1\}$. В силу симметричности поверхности $S_1(O)$ относительно координатных плоскостей достаточно рассмотреть её часть $S_1^+(O)$, расположенную в первом октанте $\Pi^+ = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x, y, z \geq 0\}$.

Заметим, что поверхность $S_1^+(O)$ представляет собой правильный сферический треугольник $\widehat{\Delta} T_1 T_2 T_3$ с вершинами $T_1 = (1; 0; 0)$, $T_2 = (0; 1; 0)$, $T_3 = (0; 0; 1)$ и сторонами в виде дуг $L_1 = T_1 T_2$, $L_2 = T_2 T_3$, $L_3 = T_1 T_3$ (рис. 1). Длина каждой стороны этого треугольника равна $\pi/2$; величина его каждого угла равна $\pi/2$. Разобьём поверхность $S_1^+(O)$ большими окружностями (т. е. сечениями сферы диаметрными плоскостями) на конечное число сферических треугольников следующим способом:

- а) разобьём дугу L_1 точками $P_0 = T_1, P_1, P_2, \dots, P_{m-1}, P_m = T_2$ на m дуг одинаковой длины и рассмотрим разбиение поверхности $S_1^+(O)$ дугами $P_i T_3$ ($i = \overline{1, m-1}$) больших окружностей на m одинаковых сферических треугольников $\widehat{\Delta} P_{i-1} P_i T_3$ ($i = \overline{1, m}$);
- б) разобьём дуги L_2 и L_3 соответственно точками $Q_0 = T_2, Q_1, Q_2, \dots, Q_{m-1}, Q_m = T_3$ и $R_0 = T_1, R_1, R_2, \dots, R_{m-1}, R_m = T_3$ на m дуг одинаковой длины и рассмотрим разбиение поверхности $S_1^+(O)$ дугами $Q_i R_i$ ($i = \overline{1, m-1}$) больших окружностей (в результате операций, указанных в пунктах а), б), получим разбиение поверхности $S_1^+(O)$ на m сферических треугольников с общей вершиной в точке T_3 и $m(m-1)$ сферических четырёхугольников);

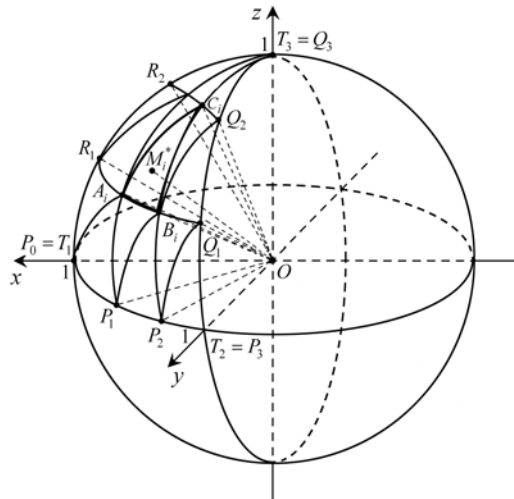


Рис. 1

в) разобьём каждый такой сферический четырёхугольник дугой большой окружности, проходящей через его две противоположные вершины на два сферических треугольника.

Выполнив все действия, перечисленные в пунктах а)–в), получаем разбиение поверхности $S_1^+(O)$ на $n = m(2m - 1)$ сферических треугольников $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$ с вершинами $A_i(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})$, $B_i(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2})$, $C_i(x_{i3}, y_{i3}, z_{i3})$ и сторонами в виде дуг $A_i B_i, B_i C_i, A_i C_i$.

З а м е ч а н и е 1. Если каждый сферический четырёхугольник, получаемый в пункте б), разбить указанным в пункте в) способом на четыре сферических треугольника, то получим разбиение поверхности $S_1^+(O)$ на $m(4m - 3)$ сферических треугольников.

Для каждого $i = \overline{1, n}$ длины сторон $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$ выражаются формулами

$$|A_i B_i| = \frac{\pi \alpha_i}{180}, \quad |B_i C_i| = \frac{\pi \beta_i}{180}, \quad |A_i C_i| = \frac{\pi \gamma_i}{180},$$

где

$$\alpha_i = \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OB_i}; \quad \beta_i = \overrightarrow{OB_i} \wedge \overrightarrow{OC_i}; \quad \gamma_i = \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OC_i}.$$

Величина каждого угла $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$ определяется как величина угла между касательными к сторонам этого угла в его вершине [2, с. 111]. Площадь $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$ выражается поверхностным интегралом первого рода от единичной функции по $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$, который сводится к двойному интегралу по проекции $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$ на какую-либо координатную плоскость [3, с. 205].

Пусть точки $M, N \in \widehat{\Delta} A_i B_i C_i$; дуга MN – часть большой окружности, проходящей через точки M, N , расположенная на $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$ между точками M и N . Как обычно, диаметр i -той части разбиения определяется формулой

$$d_i = \max_{M, N \in \widehat{\Delta} A_i B_i C_i} |MN|;$$

диаметр разбиения – формулой

$$d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i.$$

З а м е ч а н и е 2. Разбиение поверхности $S_1^+(O)$ большими окружностями на сферические треугольники можно всегда провести таким образом, чтобы его диаметр оказался меньше наперёд заданного сколь угодно малого положительного числа ε .

Пусть для каждого $i = \overline{1, n}$ $M_i^\circ (\zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \zeta_{i3})$ – некоторая внутренняя точка сферического треугольника $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$, т.е. $M_i^\circ \in A_i B_i, B_i C_i, A_i C_i$; $K(M_i^\circ)$ – касательная плоскость к поверхности $S_1^+(O)$ в точке M_i° . Используя известное уравнение касательной плоскости к гладкой поверхности в данной точке [3, с. 28], получаем:

$$K(M_i^\circ) : \zeta_{i1} x + \zeta_{i2} y + \zeta_{i3} z - 1 = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим величину отклонения сферического треугольника $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$ от плоскости $K(M_i^\circ)$:

$$h(M_i^\circ) = \max_{M \in \widehat{\Delta} A_i B_i C_i} \rho(M, K(M_i^\circ)),$$

где $\rho(M, K(M_i^\circ))$ – расстояние от точки M до плоскости $K(M_i^\circ)$.

Заметим, что в силу выпуклости поверхности $S_1^+(O)$

$$h(M_i^\circ) = \max \{ \rho(A_i, K(M_i^\circ)), \rho(B_i, K(M_i^\circ)), \rho(C_i, K(M_i^\circ)) \}. \quad (2)$$

Учитывая равенство (2), приходим к следующему выводу: чтобы минимизировать величину $h(M_i^\circ)$, надо взять такую точку $M_i^\circ (\zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \zeta_{i3}) \in \widehat{\Delta} A_i B_i C_i$, где $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$ – множество внутренних точек сферического треугольника $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$, чтобы касательная плоскость $K(M_i^\circ)$ к поверхности $S_1^+(O)$ в точке M_i° была равноудалена от вершин A_i, B_i, C_i :

$$\rho(A_i, K(M_i^\circ)) = \rho(B_i, K(M_i^\circ)) = \rho(C_i, K(M_i^\circ)).$$

Получаем следующую систему условий для определения координат $\zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \zeta_{i3}$ нужной нам точки M_i° :

$$\begin{cases} \rho(A_i, K(M_i^\circ)) = \rho(B_i, K(M_i^\circ)), \\ \rho(B_i, K(M_i^\circ)) = \rho(C_i, K(M_i^\circ)), \\ M_i^\circ \in \widehat{\Delta} M_1 M_2 M_3. \end{cases} \quad (3)$$

Используя формулу для определения расстояния от точки до плоскости [4, с. 133], уравнение (1) плоскости $K(M_i^\circ)$ и тот факт, что точки A_i, B_i, C_i и O лежат по одну сторону от плоскости $K(M_i^\circ)$, получаем:

$$\rho(A_i, K(M_i^\circ)) = 1 - (\zeta_{i1} x_{i1} + \zeta_{i2} y_{i1} + \zeta_{i3} z_{i1}),$$

$$\rho(B_i, K(M_i^\circ)) = 1 - (\zeta_{i1} x_{i2} + \zeta_{i2} y_{i2} + \zeta_{i3} z_{i2}),$$

$$\rho(C_i, K(M_i^\circ)) = 1 - (\zeta_{i1} x_{i3} + \zeta_{i2} y_{i3} + \zeta_{i3} z_{i3}).$$

Тогда система условий (3) принимает вид

$$\begin{cases} (x_{i2} - x_{i1}) \zeta_{i1} + (y_{i2} - y_{i1}) \zeta_{i2} + (z_{i2} - z_{i1}) \zeta_{i3} = 0, \\ (x_{i3} - x_{i2}) \zeta_{i1} + (y_{i3} - y_{i2}) \zeta_{i2} + (z_{i3} - z_{i2}) \zeta_{i3} = 0, \\ \zeta_{i1}^2 + \zeta_{i2}^2 + \zeta_{i3}^2 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что векторы $A_i B_i$ и $B_i C_i$ не коллинеарны. Следовательно, векторное произведение

$$\overrightarrow{A_i B_i} \times \overrightarrow{B_i C_i} = \left\{ \begin{vmatrix} y_{i2} - y_{i1} z_{i2} - z_{i1} \\ y_{i3} - y_{i2} z_{i3} - z_{i2} \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} x_{i2} - x_{i1} z_{i2} - z_{i1} \\ x_{i3} - x_{i2} z_{i3} - z_{i2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_{i2} - x_{i1} y_{i2} - y_{i1} \\ x_{i3} - x_{i2} y_{i3} - y_{i2} \end{vmatrix} \right\}$$

не равно нулевому вектору, т. е. хотя бы один из записанных выше определителей второго порядка отличен от нуля. Пусть, для определённости,

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} x_{i2} - x_{i1} y_{i2} - y_{i1} \\ x_{i3} - x_{i2} y_{i3} - y_{i2} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5)$$

Запишем первые два уравнения системы (4) в виде

$$\begin{cases} (x_{i2} - x_{i1}) \zeta_{i1} + (y_{i2} - y_{i1}) \zeta_{i2} = -(z_{i2} - z_{i1}) \zeta_{i3}, \\ (x_{i3} - x_{i2}) \zeta_{i1} + (y_{i3} - y_{i2}) \zeta_{i2} = -(z_{i3} - z_{i2}) \zeta_{i3}. \end{cases} \quad (6)$$

Решая систему уравнений (6) относительно ζ_{i1} , ζ_{i2} по правилу Крамера, получаем:

$$\zeta_{i1} = -\frac{\Delta_{i1}}{\Delta_i} \zeta_{i3}, \quad \zeta_{i2} = -\frac{\Delta_{i2}}{\Delta_i} \zeta_{i3}, \quad (7)$$

где

$$\Delta_{i1} = \begin{vmatrix} z_{i2} - z_{i1} y_{i2} - y_{i1} \\ z_{i3} - z_{i2} y_{i3} - y_{i2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{i2} = \begin{vmatrix} x_{i2} - x_{i1} z_{i2} - z_{i1} \\ x_{i3} - x_{i2} z_{i3} - z_{i2} \end{vmatrix},$$

Δ_i выражается формулой (5). Подставляя в третье уравнение системы (4) вместо ζ_{i1} , ζ_{i2} их выражения из формул (7) и решая получаемое уравнение, находим

$$\zeta_{i3} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_{i1}}{\Delta_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{i2}}{\Delta_i}\right)^2}}. \quad (8)$$

Итак, касательной плоскостью, имеющей наименьшее отклонение от сферического треугольника $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$, является касательная плоскость $K(M_i^*)$, проведённая к поверхности $S_1^+(O)$ в точке $M_i^*(\zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \zeta_{i3})$, координаты которой определяются формулами (7), (8). Назовём такую плоскость оптимальной касательной плоскостью к сферическому треугольнику $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$ а точку M_i^* – оптимальной точкой касания $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$. Оптимальная касательная плоскость $K(M_i^*)$ задаётся уравнением вида (1), где коэффициенты ζ_{i1} , ζ_{i2} , ζ_{i3} определяются формулами (7), (8).

Для каждого $i = \overline{1, n}$ рассмотрим ортогональную проекцию σ_i сферического треугольника $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$ на его оптимальную касательную плоскость $K(M_i^*)$ (σ_i строится с помощью прямых, параллельных радиусу OM_i^* , ибо $OM_i^* \perp K(M_i^*)$).

При достаточно малом диаметре описанного выше разбиения поверхности $S_1^+(O)$ на сферические треугольники плоский криволинейный треугольник σ_i можно считать линейным приближением сферического треугольника $\widehat{\Delta} A_i B_i C_i$ ($i = \overline{1, n}$).

З а м е ч а н и е 3. Изучение фигур на сфере $S_R(x_0, y_0, z_0)$ сводится заменой переменных $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z - z_0$, $x'' = x'/R$, $y'' = y'/R$, $z'' = z'/R$ к изучению фигур на сфере единичного радиуса с центром в начале координат.

Заключение

Аналогично проводится линеаризация произвольной выпуклой гладкой поверхности, при этом в качестве частей разбиения берутся поверхностные треугольники, сторонами которых являются кратчайшие между их вершинами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2 ч. М.: Физматлит, 2002. Ч. II. 464 с.
2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.
3. Герасимович А.И., Кеда Н.П., Сугак М.Б. Математический анализ: в 2 ч. Мн., 1990. Ч. 2. 272 с.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2009. 224 с.

Поступила в редакцию 17 апреля 2017 г

Фомин Василий Ильич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: vasilyfomin@bk.ru

UDC 514.122

DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-591-595

ABOUT SPHERICAL SURFACE LINEARIZATION

© V. I. Fomin

Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St, Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: vasilyfomin@bk.ru

A linear approximation of a spherical surface are built.

Key words: unit sphere; big circle; diameter plane; spherical triangle; partition diameter; optimal tangent plane; optimum point of tangency.

REFERENCES

1. Il'in V.A., Poznyak E.G. Osnovy matematicheskogo analiza: v 2 ch. M.: Fizmatlit, 2002. Ch. II. 464 s.
2. Pogorelov A.V. Differentsial'naya geometriya. M.: Nauka, 1974. 176 s.
3. Gerasimovich A.I., Keda N.P., Sugak M.B. Matematicheskij analiz: v 2 ch. Mn., 1990. Ch. 2. 272 s.
4. Il'in V.A., Poznyak E.G. Analiticheskaya geometriya. M.: Fizmatlit, 2009. 224 s.

Received 17 April 2017

Fomin Vasily Ilyich, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor of High Mathematics Department, e-mail: vasilyfomin@bk.ru

Информация для цитирования:

Фомин В.И. О линеаризации сферической поверхности // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 591–595. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-591-595

Fomin V.I. O linearizatsii sfericheskoy poverhnosti [About spherical surface linearization]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki - Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 591–595. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-591-595 (In Russian)