УДК 517.911, 517.968
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-585-590

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

© **О. В. Филиппова**[1),2)] **, А. А. Григоренко**[1)]

[1)] Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: philippova.olga@rambler.ru, g.anya@mail.ru
[2)] Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: philippova.olga@rambler.ru

Исследована краевая задача для функционально-дифференциального включения, порожденного многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений в пространстве суммируемых функций, с многозначными импульсными воздействиями. Введено понятие обобщенного решения такой задачи. Найдены условия существования обобщенного решения краевой задачи. Получены эффективные оценки обобщенных решений.
Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; краевая задача; многозначные импульсные воздействия; выпуклость по переключению

Обозначим $\mathrm{comp}[\mathbf{X}]$ – совокупность непустых компактных подмножеств метрического пространства $\mathbf{X}=(\mathbf{X},\rho_{\mathbf{X}})$; $\rho_{\mathbf{X}}[x;U]=\inf\limits_{u\in U}\rho_{\mathbf{X}}(x,u)$ – расстояние от точки $x\in\mathbf{X}$ до множества $U\subset\mathbf{X}$ в метрическом пространстве $\mathbf{X}$; $h^{+}_{\mathbf{X}}[U_1;U]\equiv\sup\limits_{x\in U_1}\rho_{\mathbf{X}}[x,U]$ – полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1\subset\mathbf{X}$ от множества U в пространстве X; $h_X[U_1;U]=\max\{h^{+}_X[U_1;U];\ h^{+}_X[U;U_1]\}$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$; $\mathbb{R}^n$ – пространство вещественных n-мерных вектор-столбцов с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\mathbf{L}^n[a,b]$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n[a,b]}=\int_a^b|x(s)|ds$; $Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ – множество всех непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$.

Пусть задан конечный набор точек $t_k\in[a,b]$, $k=\overline{1,m}$, $a<t_1<\ldots<t_m<b$. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]$ множества всех непрерывных и, соответственно, абсолютно-непрерывных на каждом из промежутков $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k=1,2,\ldots,m$, с нормой

$$\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}=\sup\{|x(t)|:\ t\in[a,b]\}$$

$$\|x\|_{\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]}=|x(a)|+\|\dot{x}\|_{\mathbf{L}^n[a,b]}+\sum_{k=1}^{m}|x(t_k+0)-x(t_k)|.$$

При каждом $k=\overline{1,m}$ определим линейный непрерывный вектор-функционал

$$\Delta_k:\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]\to\mathbb{R}^n,\quad \Delta_k x=x(t_k+0)-x(t_k).$$

Пусть заданы: линейные непрерывное отображения $\mathcal{L}:\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]\to\mathbf{L}^n[a,b]$, $l:\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]\to\mathbb{R}^n$ и элементы $y\in\mathbf{L}^n[a,b]$, $\alpha\in\mathbb{R}^n$, $\beta_k\in\mathbb{R}^n$, $k=\overline{1,m}$. Рассмотрим вначале линейную краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения следующего вида:

$$\mathcal{L}x=y,\quad \Delta_k x=\beta_k,\quad k=\overline{1,m}; \tag{1}$$

$$lx=\alpha. \tag{2}$$

Пусть задача $(1),(2)$ однозначно разрешима. Тогда ее решение представимо в виде

$$x = X\alpha + Gy + \sum_{k=1}^{m} G_k\beta_k, \tag{3}$$

где X – фундаментальная матрица решений однородного уравнения

$$\mathcal{L}x = 0,\quad \Delta_k x = 0,\quad k = \overline{1,m}$$

удовлетворяющая условию $lX=E$, E – единичная $n\times n$ матрица; $G:\mathbf{L}^n[a,b]\to\mathbf{D}^n[a,b]$ – оператор Грина, представимый в виде интегрального оператора $(Gy)(t)=\int_a^b G(t,s)y(s)ds$ с ядром $G(t,s)$, называемым матрицей Грина; $G_k(t)=\chi_{(t_k,b]}(t)\int_a^b G(t_k,s)ds$, $k=\overline{1,m}$, $\chi_{\mathcal{U}}(\cdot)$ – характеристическая функция множества $\mathcal{U}$.

Применим представление (3) решения задачи $(1),(2)$ к исследованию следующей краевой задачи для функционально-дифференциального включения с многозначными импульсными воздействиями

$$\mathcal{L}x\in\Phi(x),\quad \Delta_k x\in I_k(x(t_k)),\quad k=\overline{1,m}; \tag{4}$$

$$lx\in\varphi(x), \tag{5}$$

где отображения $\Phi:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$; $\varphi:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $I_k:\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}\,[\mathbb{R}^n]$, $k=\overline{1,m}$, непрерывны по Хаусдорфу.

Согласно представлению (3), задача $(4),(5)$ эквивалентна включению

$$x \in X\varphi(x) + G\Phi(x) + \sum_{k=1}^{m} G_k\, I_k(x(t_k)).$$

Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть Ψ – непустое подмножество пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$. Выпуклой по переключению оболочкой $sw\,\Psi$ множества Ψ называется совокупность всех элементов вида

$$x(t) = \sum_{i=1}^{l}\chi_{\mathcal{U}_i}(t)x_i(t),\quad t\in[a,b],$$

где l – любое натуральное число, $x_i\in\Psi$, а произвольные измеримые множества $\mathcal{U}_i$, $i=\overline{1,l}$, осуществляют разбиение отрезка $[a,b]$, т. е. $\mathcal{U}_i\bigcap\mathcal{U}_j=\varnothing$ при $i\neq j$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{l}\mathcal{U}_i=[a,b]$. Будем обозначать через $\overline{sw}\,\Psi$ замыкание множества $sw\,\Psi$ в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$.

Под ***обобщенным решением задачи*** $(4),(5)$ понимается функция $x\in\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]$, удовлетворяющая соотношениям

$$\mathcal{L}x\in\overline{sw}\,\Phi(x),\quad \Delta_k x\in I_k(x(t_k)),\quad k=\overline{1,m},$$

$$lx\in\varphi(x).$$

Отметим, что если x является обобщенным решением задачи (4), (5), то существуют такие $z \in \varphi(x)$, $v \in \overline{sw}\,\Phi(x)$ и $u_k \in I_k(x(t_k))$, что $x = Xz + Gv + \sum\limits_{k=1}^{m} G_k u_k$. Будем называть данную функцию $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ фазовой траекторией задачи (4), (5).

Пусть $q_0 \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $z_0 \in \varphi(q_0)$, $v_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$, $u_{0k} \in I_k(q_0(t_k))$. Положим

$$e = q_0 - Xz_0 - Gv_0 - \sum_{k=1}^{m} G_k u_{0k} \tag{6}$$

и таким образом представим функцию q_0 в виде

$$q_0 = Xz_0 + Gv_0 + \sum_{k=1}^{m} G_k u_{0k} + e.$$

Пусть для каждого $k = \overline{1,m}$ существует такая непрерывная неубывающая функция $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$, что

$$\widetilde{I}_k(0) = 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad h[I_k(x), I_k(y)] \leq \widetilde{I}_k(|x-y|). \tag{7}$$

Пусть далее для функции $v_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$ существует функция $\kappa \in \mathbf{L}^1[a,b]$ такая, что для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a,b]$ выполняется

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}\big[v_0, \overline{sw}\,\Phi(q_0)\big] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} \kappa(s)ds. \tag{8}$$

Будем считать, что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ и любых $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует такая функция $\kappa_\Phi \in \mathbf{L}^1[a,b]$ и такое $\kappa_\varphi \geqslant 0$, что

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leqslant \|x-y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} \int\limits_{\mathcal{U}} \kappa_\Phi(s)ds; \tag{9}$$

$$h_{\mathbb{R}^n}[\varphi(x), \varphi(y)] \leqslant \kappa_\varphi \|x-y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}; \tag{10}$$

$$\max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |G(t,s)|\kappa_\Phi(s)ds + \kappa_\varphi \max_{t\in[a,b]} |X(t)| < 1. \tag{11}$$

Определим непрерывный оператор $\mathcal{A} : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$ равенством

$$(\mathcal{A}\omega)(t) = \Big(\int\limits_a^b |G(t,s)|\kappa_\Phi(s)ds + \kappa_\varphi\Big)\|\omega\|_{\mathbf{C}^1[a,b]} \quad \forall \omega \in \mathbf{C}^1[a,b].$$

Положим $\mathcal{A}^0\omega = \omega$, $\mathcal{A}^i\omega = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{i-1}\omega\right)$, $i = 1, 2, \ldots$. Определим функцию $\widetilde{\omega} \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$ равенством

$$\widetilde{\omega}(t) = \int\limits_a^b |G(t,s)|\kappa(s)ds + |e(t)| + \sum_{k=1}^{m} |G_k(t)|u_{0k}, \tag{12}$$

где $|G(t,s)|$ – норма матрицы $G(t,s)$, согласованная с заданной в пространстве $\mathbb{R}^n$ нормой. Пусть для определенной соотношением (12) функции $\widetilde{\omega} \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$ равномерно сходится ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \widetilde{\omega}, \tag{13}$$

Обозначим через $\xi(\widetilde{\omega})$ сумму ряда (13), т. е.

$$\xi(\widetilde{\omega}) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \widetilde{\omega}. \tag{14}$$

Теорема 1. *Пусть заданы* $q_0 \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $z_0 \in \varphi(q_0)$, $v_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$, $u_{0k} \in I_k(q_0(t_k))$, *и пусть функции* $e \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $\widetilde{\omega} \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$ *заданы соотношениями* (6), (12), соответственно. *Далее, пусть отображения* $\Phi : \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b] \to Q(\boldsymbol{L}^n[a,b])$, $\varphi : \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, *удовлетворяют соотношениям* (7)–(11), *и ряд (13) равномерно сходится к функции* $\xi(\widetilde{\omega}) \in \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$. *Тогда найдется обобщенное решение* x *задачи (4), (5), удовлетворяющее следующим неравенствам:*

$$|x(t) - q_0(t)| \leqslant \xi(\widetilde{\omega})(t) \text{ при любом } t \in [a,b]; \tag{15}$$

$$\rho_{\mathbb{R}^n}[z_0; \varphi(x)] \leqslant \kappa_\varphi \max_{t \in [a,b]} |X(t)| \, \|\xi(\widetilde{\omega})\|_{\mathbf{C}^1[a,b]}; \tag{16}$$

$$|(\mathcal{L}x)(t) - v_0(t)| \leqslant \kappa(t) + \|\kappa_\Phi(t)\|_{\mathbf{L}^1[a,b]} \, \|\xi(\widetilde{\omega})\|_{\mathbf{L}^1[a,b]} \text{ при почти всех } t \in [a,b]. \tag{17}$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы [1] о существовании и оценках обобщенных решений краевой задачи для функционально-дифференциального включения с "однозначными" импульсными воздействиями.

Теорема 1 позволяет найти приближенное обобщенное решение краевой задачи (4), (5) подбором функции $q_0 \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. При этом функция $\xi(\widetilde{\omega})$, определяемая через $q_0 \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $z_0 \in \varphi(q_0)$, $v_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$ и $u_{0k} \in I_k(q_0(t_k))$ дает оценку погрешности приближенного обобщенного решения.

В заключение отметим, что подходы к исследованию функционально-дифференциальных включений с правой частью, не обладающей свойством выпуклости по переключению значений, и с импульсными воздействиями, зависящими от состояния фазовой траектории, разработаны в [2], [3]. В частности, в этих работах получены оценки обобщенных решений задачи Коши, и неравенства (15)–(17) представляют собой аналоги этих оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппова О.В.* Краевая задача для одного вида импульсных функционально-дифференциальных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 435–443.

2. *Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В.* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части 1-6 // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1275–1313.

3. *Булгаков А.И., Полянский А.И.* Обобщенные решения квазилинейных краевых задач для функционально-диффренциальных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2007. Т. 12. Вып. 1. С. 52–54.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00553, № 17-41-680975), Минобрнауки России (Соглашение № 02.a03.21.0008) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ, № НШ-8215.2016.1.

Поступила в редакцию 17 апреля 2017 г

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа; Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Григоренко Анна Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: g.anya@mail.ru

UDC 517.911, 517.968
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-585-590

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH THE MULTIVALUED IMPULSES

© **O. V. Filippova**[1),2)] **, A. A. Grigorenko**[1)]

[1)] Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsionalnaya st., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: philippova.olga@rambler.ru, g.anya@mail.ru
[2)] RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: philippova.olga@rambler.ru

The boundary value problems for a functional-differential inclusion generated by a multi-valued map not necessarily convex-valued with respect to switching in the space of summable functions and with multi-valued impulses are considered. Concept of a generalized solution of such a problem is introduced. Existence conditions for a generalized solution of the boundary value problem are found. The effective estimates of generalized solutions are derived.
Key words: functional-differential inclusion; boundary value problems; multi-valued impulses; convexity with respect to switching

REFERENCES

1 . *Filippova O.V.* Kraevaya zadacha dlya odnogo vida impul'snyh funkcional'no-differencial'nyh vklyuchenij // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2016. T. 21. Vyp. 2. S. 435–443.

2 . *Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V.* Funkcional'no-differencial'nye vklyucheniya s impul'snymi vozdejstviyami. Chasti 1-6 // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2009. T. 14. Vyp. 6. S. 1275–1313.

3 . *Bulgakov A.I., Polyanskij A.I.* Obobshchennye resheniya kvazilinejnyh kraevyh zadach dlya funkcional'no-diffrencial'nyh vklyuchenij // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2007. T. 12. Vyp. 1. S. 52–54.

ACKNOWLEDGEMENTS: The present research is supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 17-01-00553, № 17-41-680975), by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement number 02.a03.21.0008) and by the grant of the Russian Federation President for the state support of leading scientific schools, No. NSh-8215.2016.1.

Received 17 April 2017

Filippova Olga Viktorovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department; RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Grigorenko Anna Alexandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: g.anya@mail.ru

Информация для цитирования:

Филиппова О.В., Григоренко А.А. Краевая задача для функционально-дифференциального включения с многозначными импульсными воздействиями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 585–590. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-585-590

Filippova O.V., Grigorenko A.A. Kraevaya zadacha dlya funkcional'no-differencial'nogo vklyucheniya s mnogoznachnymi impul'snymi vozdejstviyami [Boundary value problems for functional-differential inclusions with the multivalued impulses]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 585–590. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-585-590 (In Russian)