УДК 515.124
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-565-570

О СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

© **Е. А. Панасенко**

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: panlena_t@mail.ru

Рассмотрено пространство $\mathrm{clos}(X)$ замкнутых подмножеств произвольного неограниченного (не обязательно сепарабельного) метрического пространства (X,ϱ_X) с метрикой ρ_X^{cl}, предложенной в работе [*Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A.* // Fixed Point Theory and Applications. 2013:10]. Показано, что если любой замкнутый шар в пространстве (X,ϱ_X) вполне ограничен, то сходимость в пространстве $\big(\mathrm{clos}(X),\rho_X^{\mathrm{cl}}\big)$ последовательности $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ к F равносильна ее сходимости по Вайсману, а именно, сходимости при любом $x\in X$ последовательности расстояний $\varrho_X(x,F_i)$ к $\varrho_X(x,F)$.
Ключевые слова: пространство замкнутых подмножеств метрического пространства; сходимость по Вайсману; метризуемость

Введение

Пусть (X,ϱ_X) некоторое метрическое пространство и $\mathrm{clos}(X)$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств этого пространства. Для изучения свойств многозначных отображений, действующих в X, множество $\mathrm{clos}(X)$ стараются наделить топологической структурой, по возможности сделать его метрическим, введя удобную в использовании и "информативную" метрику. На сегодняшний момент известно достаточно много способов топологизации, а также метризации $\mathrm{clos}(X)$. Одной из топологий в $\mathrm{clos}(X)$ является так называемая топология Вайсмана (см., например, [1]), которая позволяет достаточно эффективно исследовать ряд вопросов теории многозначных отображений [2]. В основе построения этой топологии лежит введенное Р.А. Вайсманом определение сходимости последовательности множеств через сходимость последовательности соответствующих функций расстояния до этих множеств [3], а именно: последовательность $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathrm{clos}(X)$ называется *сходящейся по Вайсману к множеству* $F\in\mathrm{clos}(X)$, если для любого $x\in X$ выполнено $\varrho_X(x,F_i)\to\varrho_X(x,F)$, где $\varrho_X(x,F)\doteq\doteq\inf\limits_{f\in F}\varrho_X(x,f)$ — расстояние от точки x до множества F в пространстве X. Такая сходимость, вообще говоря, более слабая, чем сходимость множеств в расширенной метрике Хаусдорфа dist, и совпадает с ней только в следующем случае:

Т е о р е м а 1. [4] *Сходимость последовательности замкнутых множеств* $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ *к множеству* F *по Хаусдорфу равносильна сходимости* $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ *к* F *по Вайсману тогда и только тогда, когда пространство* X *вполне ограничено.*

В связи с этим утверждением возникает вопрос: можно ли, и как именно, определить метрику в $\mathrm{clos}(X)$ так, чтобы сходимость в этой метрике была равносильна сходимости по Вайсману? В работе [1] показано, что метризовать $\mathrm{clos}(X)$ с топологией Вайсмана можно тогда и только тогда, когда пространство X сепарабельно, и метрику в этом случае можно определить равенством

$$\rho^*(F,G) \doteq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-1} \cdot \frac{|\varrho_X(x_i,F) - \varrho_X(x_i,G)|}{1 + |\varrho_X(x_i,F) - \varrho_X(x_i,G)|} \quad \forall F,G \in \operatorname{clos}(X), \tag{1}$$

где $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное плотное подмножество X.

Очевидно, что $\rho^*(F,G)<\infty$ для любых замкнутых множеств $F,G\subset X$, однако вычисление $\rho^*(F,G)$ для конкретных $F,G\in\operatorname{clos}(X)$ по формуле (1) крайне затруднительно. В настоящей работе мы рассмотрим пространство $\operatorname{clos}(X)$ с метрикой ρ_X^{cl}, определенной в [5]. Эта метрика также принимает конечные значения для любых замкнутых множеств, а для ее определения не требуется сепарабельности пространства X. Мы покажем, что сходимость в этой метрике равносильна сходимости по Вайсману в случае, когда каждый шар в пространстве X вполне ограничен.

Основной результат

Введем еще некоторые обозначения: $\overline{M} \doteq X \setminus M$ — *дополнение* к множеству $M \subset X$; $B_X^o(x_0,r)\doteq\{x\in X:\varrho_X(x,x_0)<r\}$, $B_X(x_0,r)\doteq\{x\in X:\varrho_X(x,x_0)\leqslant r\}$ — открытый и, соответственно, замкнутый шары в пространстве X радиуса $r>0$ с центром в точке x_0; $B_X^o(x_0,0)=\varnothing$; $d_X(M_1,M_2)\doteq\sup\limits_{x\in M_1}\varrho_X(x,M_2)$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества M_1 от M_2; $\operatorname{dist}_X(M_1,M_2)\doteq\max\left\{d_X(M_1,M_2);d_X(M_2,M_1)\right\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами M_1, M_2. Через $\operatorname{clbd}(X)$ будем обозначать множество всех ограниченных замкнутых подмножеств X. Везде далее считаем, что метрическое пространство (X,ϱ_X) неограниченное. то есть для некоторого (а, следовательно, и для любого) $\xi\in X$ выполнено $\sup\limits_{x\in X}\varrho_X(\xi,x)=\infty$.

Наделим $\operatorname{clos}(X)$ следующей метрикой. Зафиксируем произвольную точку $\theta\in X$, обозначим $B_X^o(r)\doteq B_X^o(\theta,r)$, $B_X(r)\doteq B_X(\theta,r)$. Для каждого $r\geqslant 0$ определим оператор $\mathfrak{S}_r:\operatorname{clos}(X)\to\operatorname{clos}(X)$ равенством

$$\mathfrak{S}_r H \doteq H \cup \overline{B_X^o(r)} \quad \forall H\in\operatorname{clos}(X).$$

Далее, для любых $F,G\in\operatorname{clos}(X)$ положим

$$\rho_X^o(F,G) \doteq \left|\varrho_X(\theta,F) - \varrho_X(\theta,G)\right|,$$

$$\rho_X^{\mathfrak{S}}(F,G) \doteq \sup_{r>0}\min\left\{\operatorname{dist}_X\left(\mathfrak{S}_r F,\mathfrak{S}_r G\right),\ \frac{1}{r}\right\}, \tag{2}$$

$$\rho_X^{\mathrm{cl}}(F,G) \doteq \rho_X^o(F,G) + \rho_X^{\mathfrak{S}}(F,G). \tag{3}$$

Свойства функции ρ_X^{cl} подробно изучены в [5], в частности, доказано, что: ρ_X^{cl} принимает только конечные значения; ρ_X^{cl} определяет метрику в пространстве $\operatorname{clos}(X)$; если пространство (X,ϱ_X) полное, то и пространство $\operatorname{clos}(X)$ с метрикой ρ_X^{cl} является полным. Также имеет место следующий критерий сходимости последовательности замкнутых множеств в пространстве $\left(\operatorname{clos}(X),\rho_X^{\mathrm{cl}}\right)$.

Л е м м а 1. [5] *Пусть* $F,F_i\in\operatorname{clos}(X)$, $i=1,2,\ldots$. *Тогда из сходимости* $\rho_X^{\mathrm{cl}}(F_i,F)\to 0$ *следует*

$$\varrho_X(\theta,F_i)\to\varrho_X(\theta,F) \ \text{и} \ \operatorname{dist}_X\left(\mathfrak{S}_r F_i,\mathfrak{S}_r F\right)\to 0 \ \forall r>0.$$

Обратно: если $\varrho_X(\theta, F_i) \to \varrho_X(\theta, F)$ *и существует такое* $r_0 > 0$, *что при всех* $r \geqslant r_0$ *имеет место сходимость* $\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_r F_i, \mathfrak{S}_r F\big) \to 0$, *то* $\rho_X^{\mathrm{cl}}(F_i, F) \to 0$.

Метрика ρ_X^{cl} не изменится, если вместо оператора $\mathfrak{S}_r$, который имеет неограниченные образы, использовать оператор, значения которого будут ограниченными множествами (см. [6]), а именно: пусть для произвольного $r > 0$ существует такое число $R(r) > 0$, что оператор $\mathfrak{C}_{R(r)} : \operatorname{clos}(X) \to \operatorname{clbd}(X)$, определенный равенством

$$\mathfrak{C}_{R(r)} H \doteq \mathfrak{S}_r H \cap B_X(R(r)) = \big(H \cup \overline{B_X^o(r)}\big) \cap B_X(R(r)),$$

удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G\big) = \operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{C}_{R(r)} G\big) \quad \forall\ F, G \in \operatorname{clos}(X),\ \forall\ r > 0,$$

тогда $\rho_X^{\mathfrak{S}}$ можно вычислять по формуле

$$\rho_X^{\mathfrak{S}}(F, G) = \sup_{r>0} \min\left\{ \operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{C}_{R(r)} G\big),\ \frac{1}{r} \right\}. \tag{4}$$

Очевидно, что вследствие неограниченности метрического пространства X для каждого $r > 0$ найдется такой элемент $\widetilde{x}_r \in X$, что $R_0(r) \doteq \varrho_X(\theta, \widetilde{x}_r) \geqslant r$. Легко проверить, что в качестве $R(r)$ можно взять

$$R(r) \doteq R_0(r) + 2r. \tag{5}$$

Таким образом, мы можем находить $\rho_X^{\mathfrak{S}}$ и по формуле (2), и по формуле (4). Стоит отметить, что первую формулу удобнее использовать для вычисления расстояний между конкретными множествами, а вторая позволяет применять утверждения, справедливые для пространства $(\operatorname{clbd}(X), \operatorname{dist}_X)$ при изучении свойств пространства $\big(\operatorname{clos}(X), \rho_X^{\mathrm{cl}}\big)$, в чем мы убедимся ниже.

Т е о р е м а 2. *Пусть* (X, ϱ_X) *неограниченное метрическое пространство, в котором каждый шар вполне ограничен. Последовательность* $\{F_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \operatorname{clos}(X)$ *сходится к множеству* $F \in \operatorname{clos}(X)$ *относительно метрики* ρ_X^{cl} *тогда и только тогда, когда* $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ *сходится к* F *по Вайсману.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть имеет место сходимость $\rho_X^{\mathrm{cl}}(F_i, F) \to 0$. Тогда, согласно лемме 1, для любого $r > 0$ выполнено

$$\operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_r F_i, \mathfrak{S}_r F\big) \to 0.$$

Зафиксируем произвольную точку $x^* \in X$. Определим $\varrho^* \doteq \varrho_X(x^*, F)$, $r^* \doteq \varrho^* + \varrho_X(\theta, x^*) + 1$. Тогда

$$\varrho_X\big(x^*, \overline{B_X^o(r^*)}\big) \geqslant \varrho_X\big(\theta, B_X^o(r^*)\big) - \varrho_X(x^*, \theta) \geqslant r^* - \varrho_X(x^*, \theta) = \varrho^* + 1.$$

Следовательно, $\varrho_X(x^*, F) > \varrho_X\big(x^*, \overline{B_X^o(r^*)}\big)$ и $\varrho_X(x^*, F_i) > \varrho_X\big(x^*, \overline{B_X^o(r^*)}\big)$ при всех достаточно больших номерах i. Из этих неравенств следует, что $\varrho_X(x^*, F) = \varrho_X\big(x^*, \mathfrak{S}_{r^*} F\big)$ и $\varrho_X(x^*, F_i) = \varrho_X\big(x^*, \mathfrak{S}_{r^*} F_i\big)$. Окончательно получаем:

$$|\varrho_X(x^*, F_i) - \varrho_X(x^*, F)| = |\varrho_X(x^*, \mathfrak{S}_{r^*} F_i) - \varrho_X(x^*, \mathfrak{S}_{r^*} F)| \leqslant \operatorname{dist}_X\big(\mathfrak{S}_{r^*} F_i, \mathfrak{S}_{r^*} F\big) \to 0,$$

то есть $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к F по Вайсману.

Докажем обратное утверждение. Пусть для любого $x \in X$ выполнено соотношение

$$|\varrho_X(x, F_i) - \varrho_X(x, F)| \to 0. \tag{6}$$

Обозначим $r_0 \doteq \varrho_X(\theta, F)$, $r_i \doteq \varrho_X(\theta, F_i)$ Прежде всего, очевидно, имеет место сходимость $|r_i - r_0| \to 0$. Выберем произвольное r, удовлетворяющее неравенству $r \geqslant r_0 + 1$. Тогда $B_X(r) \cap F \neq \varnothing$ и $B_X(r) \cap F_i \neq \varnothing$ при достаточно больших i. Далее, определим $R(r)$ по формуле (5); отметим, что $R(r) \geqslant 3r$. Так как в шаре $B_X(r)$ есть точки множества F, то для любого $x \in B_X(r)$ выполнено

$$\varrho_X\Big(x, F \cap B_X\big(R(r)\big)\Big) \leqslant 2r.$$

В то же время

$$\varrho_X\Big(x, F \cap \overline{B^o_X\big(R(r)\big)}\Big) \geqslant \varrho_X\Big(\theta, \overline{B^o_X\big(R(r)\big)}\Big) - \varrho_X(\theta, x) \geqslant R(r) - r \geqslant 2r.$$

Следовательно, для $K(r) \doteq F \cap B_X\big(R(r)\big)$ имеем $\varrho_X(x, F) = \varrho_X\big(x, K(r)\big)$. Аналогично, для любого i, начиная с некоторого, имеет место равенство $\varrho_X(x, F_i) = \varrho_X\big(x, K_i(r)\big)$, где $K_i(r) \doteq F_i \cap B_X\big(R(r)\big)$. Теперь из (6) получаем соотношение

$$\big|\varrho_X\big(x, K_i(r)\big) - \varrho_X\big(x, K(r)\big)\big| \to 0. \tag{7}$$

Определим метрическое пространство $X_r \doteq B_X\big(R(r)\big)$, которое, согласно условию теоремы, вполне ограничено, и покажем, что в этом пространстве последовательность $\big\{\mathfrak{C}_{R(r)} F_i\big\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к множеству $\mathfrak{C}_{R(r)} F$ по Вайсману, а следовательно, в силу теоремы 1, и по Хаусдорфу.

Очевидно, что для любого $x \in \overline{B^o_X(r)} \cap B_X\big(R(r)\big)$

$$\big|\varrho_X\left(x, \mathfrak{C}_{R(r)} F_i\right) - \varrho_X\left(x, \mathfrak{C}_{R(r)} F\right)\big| \to 0, \tag{8}$$

так как в этом случае $\varrho_X\big(x, \mathfrak{C}_{R(r)} F_i\big) = \varrho_X\big(x, \mathfrak{C}_{R(r)} F_i\big) = 0$ при всех i. Предположим, что $x \in B^o_X(r)$. Тогда возможны следующие ситуации:

1) $\varrho_X\big(x, K(r)\big) > \varrho_X\big(x, \overline{B^o_X(r)}\big)$. Тогда существует такой номер I, что при всех $i > I$ справедливо неравенство $\varrho_X(x, K_i(r)) > \varrho_X\big(x, \overline{B^o_X(r)}\big)$. Значит при достаточно больших i выполнено $\varrho_X\big(x, \mathfrak{C}_{R(r)} F\big) = \varrho_X\big(x, \mathfrak{C}_{R(r)} F_i\big) = \varrho_X\big(x, \overline{B^o_X(r)}\big)$, то есть соотношение (8) имеет место.

2) $\varrho_X\big(x, K(r)\big) < \varrho_X\big(x, \overline{B^o_X(r)}\big)$. Тогда найдется такой номер I, что для любого $i > I$ выполнено $\varrho_X(x, K_i(r)) < \varrho_X\big(x, \overline{B^o_X(r)}\big)$. Следовательно, $\varrho_X\big(x, \mathfrak{C}_{R(r)} F\big) = \varrho_X\big(x, K(r)\big)$, $\varrho_X\big(x, \mathfrak{C}_{R(r)} F_i\big) = \varrho_X\big(x, K_i(r)\big)$, и учитывая (7) получаем соотношение (8).

3) $\varrho_X(x, K(r)) = \varrho_X\big(x, \overline{B^o_X(r)}\big)$. В этом случае можно считать, что $\{K_i(r)\}_{i=1}^{\infty} = \{K_{i_k}(r)\}_{k=1}^{\infty} \cup \{K_{j_k}(r)\}_{k=1}^{\infty}$, где $\{i_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{j_k\}_{k=1}^{\infty} = \{1, 2, 3, ...\}$, $\varrho_X\big(x, K_{i_k}(r)\big) \geqslant \varrho_X\big(x, \overline{B^o_X(r)}\big)$ и $\varrho_X\big(x, K_{j_k}(r)\big) < \varrho_X\big(x, \overline{B^o_X(r)}\big)$ для любого k. Тогда, очевидно,

$$\big|\varrho_X\big(x, \mathfrak{C}_{R(r)} F_{i_k}\big) - \varrho_X\big(x, \mathfrak{C}_{R(r)} F\big)\big| = 0, \quad \big|\varrho_X\big(x, \mathfrak{C}_{R(r)} F_{j_k}\big) - \varrho_X\big(x, \mathfrak{C}_{R(r)} F\big)\big| \to 0.$$

Таким образом, соотношение (8) имеет место и в этом случае.

Сходимость последовательности $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ к множеству F в метрике ρ_X^{cl} теперь следует из леммы 1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lechicki A., Levi S.* Wijsman convergence in the hyperspace of a metric space // Bollettino U.M.I. 1987. V. 7. P. 439–451.

2. *Francaviglia S., Lechicki A., Levi S.* Quasi-uniformization of hyperspaces and convergence of nets of semicontinuous multifunctions // J. Math. Anal. Appl. 1985. V. 112. n. 2. P. 347–370.

3. *Wijsman R.A.* Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. II. Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 123. P. 32–45.

4. *Beer G.* Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets // Bull. Austral. Math. Soc. 1987. V. 35. P. 81–96.

5. *Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A.* On multi-valued maps with images in the space of closed subsets of a metric space // Fixed Point Theory and Applications. 2013. 2013:10 doi:10.1186/1687-1812-2013-10.

6. *Жуковский Е.С., Панасенко Е.А.* Определение метрики пространства $\mathrm{clos}_\varnothing(X)$ замкнутых подмножеств метрического пространства X и свойства отображений со значениями в $\mathrm{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$ // Математический сборник. 2014. Т. 205. № 9. С. 65–96.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00553, № 16-01-00386).

Поступила в редакцию 15 февраля 2017 г

Панасенко Елена Александровна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: panlena_t@mail.ru

UDC 515.124
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-565-570

ON CONVERGENCE IN THE SPACE OF CLOSED SUBSETS OF A METRIC SPACE

© **E. A. Panasenko**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: panlena_t@mail.ru

We consider the space $\mathrm{clos}(X)$ of closed subsets of unbounded (not necessarily separable) metric space (X, ϱ_X) endowed with the metric ρ_X^{cl} introduced in [*Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A.* // Fixed Point Theory and Applications. 2013:10]. It is shown that if any closed ball in the space (X, ϱ_X) is totaly bounded, then convergence in the space $\big(\mathrm{clos}(X), \rho_X^{\mathrm{cl}}\big)$ of a sequence $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ to F is equivalent to convergence in the sense of Wijsman, that is to convergence for each $x \in X$ of the distances $\varrho_X(x, F_i)$ to $\varrho_X(x, F)$.

Key words: space of closed subsets of a metric space; Wijsman convergence; metrizability

REFERENCES

1. *Lechicki A., Levi S.* Wijsman convergence in the hyperspace of a metric space // Bollettino U.M.I. 1987. V. 7. P. 439–451.

2. *Francaviglia S., Lechicki A., Levi S.* Quasi-uniformization of hyperspaces and convergence of nets of semicontinuous multifunctions // J. Math. Anal. Appl. 1985. V. 112. n. 2. P. 347–370.

3. *Wijsman R.A.* Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. II. Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 123. P. 32–45.

4. *Beer G.* Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets // Bull. Austral. Math. Soc. 1987. V. 35. P. 81–96.

5. *Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A.* On multi-valued maps with images in the space of closed subsets of a metric space // Fixed Point Theory and Applications. 2013. 2013:10 doi:10.1186/1687-1812-2013-10.

6. *Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A.* Definition of the metric on the space $\mathrm{clos}_{\varnothing}(X)$ of closed subsets of a metric space X and properties of mappings with values in $\mathrm{clos}_{\varnothing}(\mathbb{R}^n)$ // Sb. Math., 205: 9 (2014), 1279–1309.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 17-01-00553, № 16-01-00386).

Received 15 February 2017

Panasenko Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavina, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: panlena_t@mail.ru

Информация для цитирования:

Панасенко Е.А. О сходимости в пространстве замкнутых подмножеств метрического пространства // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 565–570. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-565-570

Panasenko E.A. O skhodimosti v prostranstve zamknutykh podmnozhestv metricheskogo prostranstva [On convergence in the space of closed subsets of a metric space]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki - Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 565–570. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-565-570 (In Russian)