УДК 519.71
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-558-564

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОКРЕСТНОСТНЫХ СИСТЕМ ВБЛИЗИ НОМИНАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ

© **Н. М. Мишачев, А. М. Шмырин**

Липецкий государственный технический университет
398600, Российская Федерация, г. Липецк, ул. Московская, 30
E-mail: nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

В статье обсуждается задача параметрической идентификации структурно идентифицированной статической полиномиальной системы вблизи номинального режима в случае, когда заданы только допустимые пределы для состояний, управлений и коэффициентов модели.
Ключевые слова: окрестностная система; идентификация; номинальный режим

В данной статье мы показываем, что для структурно идентифицированной и линейной по параметрам статической системы управления при наличии довольно скудной информации о ее поведении вблизи номинального режима, а именно, только лишь информации о допустимых пределах для переменных и неизвестных параметров, можно, тем не менее, ставить и решать достаточно содержательные задачи об идентификации параметров и оптимизации номинального режима.

1. Окрестностные структуры и системы.

Окрестностная система, или система на графе – это система управления в пространстве состояний с заданной схемой вхождения переменных состояния и управления в уравнения системы. Эта схема задается ориентированным графом, который мы называем *окрестностной структурой* (см.[1],[2]). В контексте окрестностных систем этот граф считается первичным, а сама система рассматривается как одна из возможных надстроек над ним. Вершины $X_1,\dots,X_n,U_1,\dots,U_m$ окрестностной структуры соответствуют переменным состояния и управления. Вершинам-состояниям X_i соответствуют уравнения системы, а входящие в эти вершины ориентированные ребра графа указывают на вхождения соответствующих переменных в эти уравнения. Вершины-управления U_j имеют только исходящие ребра, из U_j в некоторые из X_i. Заметим, что данная версия понятия окрестностной структуры несколько отличается от описанной в [1], а именно, здесь мы вынесли управления в отдельный набор вершин. Статические окрестностные системы мы будем записывать, подчеркивая наличие окрестностной структуры, в виде

$$X_i = F(X(*,i),U(*,i)),\ \ i=1,\dots n,$$

а (дискретные) динамические – в виде

$$X_i^{t+1} = F(X^t(*,i),U^t(*,i)),\ \ i=1,\dots n.$$

Здесь $X(*,i)$ и $U(*,i)$ – это наборы состояний и управлений, соответствующие входящим в вершину X_i ребрам окрестностной структуры. Статические системы, как обычно, можно считать стационарными состояниями динамических, когда $X^{t+1}=X^t$. Линейная по переменным (т. е. по состояниям и управлениям) окрестностная система, в которой коэффициенты являются неизвестными параметрами, автоматически структурно идентифицирована. Для полиномиальных по переменным систем

$$X_i = F(X(*,i), U(*,i); P_i), \ \ i = 1, \dots n,$$

или

$$X_i^{t+1} = F(X^t(*,i), U^t(*,i); P_i), \ \ i = 1, \dots n,$$

в которых неизвестными параметрами P_i являются коэффициенты одночленов, можно далее уточнять структурную идентификацию, разрешая или запрещая какие-либо одночлены степени больше единицы от входящих в данное уравнение переменных. Например, в билинейном случае часто считают, что в уравнение для вершины X_i могут входить, кроме линейных слагаемых, некоторые из произведений состояний $X(*,i)$ на управления $U(*,i)$.

2. Постановка задачи.

Далее термин *окрестностная система* мы будем использовать в следующем узком смысле: это структурно идентифицированная статическая полиномиальная система $X = F(X, U; P)$ в которой коэффициенты $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ одночленов являются неизвестными параметрами. Здесь P_i – коэффициенты из i-го уравнения. Мы считаем, что компоненты полиномиальной вектор-функция $F(X, U)$ не содержат слагаемых нулевой степени, т.е. неизвестных констант. Кроме того, некоторые из коэффициентов могут быть уже известны. Предполагаются заданными ограничения Ω_X, Ω_U и Ω_P на состояния, управления и параметры (коэффициенты) системы. Множества Ω_X, Ω_U и Ω_P мы будем, для определенности, считать параллелепипедами в соответствующих пространствах, хотя в большинстве случаев было бы достаточно считать их выпуклыми (и даже произвольными) множествами. Центры X^* и U^* параллелепипедов Ω_X и Ω_U определяют номинальный режим системы, отклонения от которого могут быть либо нежелательны (заданный номинальный режим), либо допустимы в пределах заданных ограничений (свободный номинальный режим). В соответствии с этим можно рассмотреть две задачи:

a) идентификация коэффициентов системы (заданный номинальный режим) и

b) идентификация коэффициентов системы и, возможно, нового номинального режима (свободный номинальный режим).

В первом случае мы минимизируем функционал

$$||X^* - F(X^*, U^*; P)||^2 \tag{1}$$

(квадрат нормы невязки) по параметрам P, во втором случае мы минимизируем функционал

$$||X - F(X, U; P)||^2 \tag{2}$$

по переменным X, U и параметрам P. В промежуточной ситуации, когда отклонения допустимы, но нежелательны, во второй функционал можно добавить слагаемое $\varepsilon||X - X^*||^2$, пропорциональное квадрату нормы отклонения нового номинального режима от первоначально заданного. Это же слагаемое с $\varepsilon \to 0$ можно добавлять и в первый и во второй функционалы в случае вырожденности их минимумов для получения единственного решения с помощью регуляризации по Тихонову. Далее, пунктах 6 и 7, мы обсудим, на качественном уровне, какими могут быть результаты параметрической идентификации и коррекции номинального режима в поставленных задачах a) и b).

Заметим, что наиболее реалистичное приложение идентифицированной статической системы – это регулирование вблизи номинального режима по следующему рецепту: наблюдаемое отклонение ΔX от номинального режима компенсируется управлением $U^* + \Delta U$, где добавку ΔU можно найти из линеаризации уравнения

$$X^* - \Delta X = F(X^* - \Delta X, U^* + \Delta U), \tag{3}$$

т. е. по формуле

$$\Delta U = -(F'_U(X^*, U^*))^+(E - F'_X(X^*, U^*))\Delta X, \tag{4}$$

где $(F'_U(X^*, U^*))^+$ - псевдообратная матрица для $F'_U(X^*, U^*)$.

3. Регрессионная идентификация и остаточная стохастичность.

В поставленной выше задаче мы предполагаем, что экспериментальных данных нет и применить регрессионную параметрическую идентификацию невозможно. При наличии достаточного количества экспериментальных данных с помощью найденных значимых зависимостей мы можем либо, в лучшем случае, полностью идентифицировать систему, либо получить систему с меньшим количеством состояний, экспериментальные данные для которой стохастичны и позволяют только определить множества Ω_X и Ω_U. Таким образом, рассматриваемая нами задача достаточно типична: она может возникать не только при отсутствии экспериментальных данных, но и в ситуации регрессионной идентификации по экспериментальным данным, как проявление остаточной стохастичности.

4. Системы с нулевым и номинальным режимами.

Указанное в п. 2 условие отсутствия одночленов нулевой степени, т. е. неизвестных констант в структурно идентифицированных уравнениях системы требует пояснения. Обычная практика регрессионной идентификации вблизи номинального режима состоит в том, что данные нормализуются, и потому синтезируемая система автоматически не содержит констант. При этом в новых переменных номинальный режим, как правило, становится нулевым, поскольку номинальные значения состояний и управлений обычно являются математическими ожиданиями соответствующих случайных величин. Тейлоровская локализация $\widetilde{X} = \widetilde{F}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ нашей структурно идентифицированной системы в переменных $\widetilde{X} = X - X^*$ и $\widetilde{U} = U - U^*$ вблизи номинального режима без какой либо дополнительной информации не имеет смысла, поскольку в этом случае номинальный режим совпадает с нулевым а оба функционала, аналогичные (1) и (2), вырождаются и обращаются в ноль при нулевых коэффициентах. Задача, которая была поставлена в п. 2, обходит эту проблему вырождения за счет включения в модель, кроме номинального, еще и нулевого режима. Действительно, эту задачу можно сформулировать следующим образом: полиномиальная система структурно идентифицирована в локальных переменных относительно некоторого известного нулевого режима и имеет, кроме того, известный номинальный режим. Требуется найти значения коэффициентов (во втором случае – еще и новый номинальный режим), оптимизирующие систему при заданных ограничениях. Отсутствие одночленов нулевой степени в уравнениях гарантирует, что параметрически идентифицированная система будет описывать и нулевой режим, поскольку нулевое решение уравнений сохранится при любых коэффициентах. Заметим, что вместо отсутствия одночленов нулевой степени достаточно потребовать, чтобы они были уже заданными константами, т. е. чтобы их не нужно было идентифицировать. В противном случае при идентификации мы получим для них значения, равные номинальным, и нулевые значения для всех остальных коэффициентов, т. е. тривиальное решение.

5. Масштабирование.

В реальных физических системах нулевой режим правильнее называть как нибудь иначе, например, *начальным*, поскольку соответствующие ему реальные значения переменных могут не быть нулевыми. Линейным преобразованием единиц измерения каждой переменной мы всегда можем сделать начальный режим нулевым, а номинальный единичным: $(1, \ldots, 1)$. Здесь, впрочем, есть еще один нетривиальный момент: если множество переменных состоит из групп физически одноименных переменных, то при указанном выше индивидуальном масштабировании мы теряем информацию об относительных значениях переменных внутри групп. Допустимое масштабирование в этой ситуации – это одно линейное преобразование единиц измерения для всех одноименных переменных. Например, можно нормализовать переменные внутри групп по значениям в одном из двух режимов или по всем значениям в двух режимах; можно привести одну (и только одну) из переменных в каждой группе к значениям 0 (нулевое) и 1 (номинальное). При этом может оказаться, что начальное состояние системы не описывается нулевым набором переменных, и потому в полиномиальной модели, структурно идентифицированной относительно начального режима, появятся постоянные слагаемые. На самом деле и в этом случае, т. е. при наличии одноименных переменных, можно масштабировать каждую переменную индивидуально, если отсутствуют ограничения на допустимые значений параметров. Если ограничения есть, то при индивидуальном масштабировании могут возникнуть проблемы с пересчетом множества параметров Ω_P, и будет проще сохранить в модели константы.

6. Параметрическая идентификация при заданном номинальном режиме.

Запишем минимизируемый функционал подробнее :

$$||X_1^* - F_1(X^*, U^*; P_1)||^2 + ||X_2^* - F_2(X^*, U^*; P_2)||^2 + \cdots + ||X_n^* - F_n(X^*, U^*; P_n)||^2 . \qquad (5)$$

Здесь $P_i \in \mathbb{R}^{k_i}$, где k_i – количество неизвестных коэффициентов полинома F_i. Задача минимизации этого функционала по $P = \{P_1 \dots P_n\}$, очевидно, сепарабельна, т. е. каждое слагаемое можно минимизировать отдельно. Рассмотрим два случая:

6.1 *Ограничения на коэффициенты* P *отсутствуют.*

В силу линейности функции

$$X_i^* - F_i(X^*, U^*; P_i) = X_i^* - A(X^*, U^*)P_i$$

по параметрам P_i, функционал $||X_i^* - F_i(X^*, U^*; P_i)||^2$ имеет вырожденный (нулевой) минимум и соответствующие наборы параметров P_i образуют аффинную (при $X_i^* = 0$ – линейную) гиперплоскость L_i в пространстве параметров. Здесь мы считаем, что $A(X^*, U^*)$ – строка и P_i – столбец. При отсутствии каких-либо дополнительных условий в качестве искомого набора P_i^* можно взять ближайшую к началу координат точку этой гиперплоскости,

$$P_i^* = A^+ X_i^* = \frac{A^T x_i^*}{||A||^2} .$$

Эта точка – нормальное решение уравнения $X_i^* - A(X^*, U^*)P_i = 0$ или, на другом языке, точка минимума регуляризованного по Тихонову функционала при стремлении к нулю параметра регуляризации. Хотя такой результат параметрической идентификации малосодержателен, он лучший в данной ситуации. Заметим еще, что суммарный функционал $||X^* - F(X^*, U^*; P)||^2$ имеет вырожденный нулевой минимум на произведении аффинных гиперплоскостей

$$L_1 \times \ldots \times L_n \subset \mathbb{R}^{k_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{k_n}.$$

6.2 *Коэффициенты* P *принадлежат множеству (параллелепипеду)* Ω_P.

Здесь $\Omega_P = \Omega_{P_1} \times \ldots \times \Omega_{P_n} \subset \mathbb{R}^{k_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{k_n}$. Для каждого i возможны два варианта. Если $L_i \cap \Omega_{P_i} \neq \varnothing$, то (вырожденный) минимум функционала $||X_i^* - F_i(X^*, U^*; P_i)||^2$ равен нулю и в качестве P_i^* можно взять любую точку пересечения $L_i \cap \Omega_{P_i}$, например, ближайшую к началу координат. Такая точка может лежать как на границе, так и внутри области Ω_{P_i}. Если же это пересечение пусто, то, в невырожденном случае, минимум будет достигаться на ближайшей к гиперплоскости L_i точке множества Ω_{P_i}. Отсюда следует, что для суммарного функционала $||X^* - F(X^*, U^*; P)||^2$ верны следующие утверждения:

a) *нулевой* минимум функционала, если он достигается в точке P^*, такой что хотя бы для одного i точка P_i^* лежит внутри области Ω_{P_i}, является вырожденным;

b) если P^* - точка *ненулевого* минимума функционала, то хотя бы одна из точек P_i^* лежит на границе области Ω_{P_i};

c) если P^* - точка *невырожденного ненулевого* минимума функционала, то каждая из точек P_i^* лежит на границе области Ω_{P_i} ;

d) во всех случаях точку минимума P^* функционала можно выбрать так, чтобы каждая из точек P_i^* лежала на границе области Ω_{P_i} .

Свойство d) можно усилить:

d^+) во всех случаях точку минимума P^* функционала можно выбрать так, чтобы каждая из точек P_i^* лежала на одномерном остове границы области Ω_{P_i} (т. е. на каком-либо из ребер параллелепипеда).

7. Параметрическая идентификация при свободном номинальном режиме.

Теперь функционал имеет вид

$$||X_1 - F_1(X,U;P_1)||^2 + ||X_2 - F_2(X,U;P_2)||^2 + \cdots + ||X_n - F_n(X,U;P_n)||^2 \tag{6}$$

и уже не является сепарабельным из за присутствия во всех слагаемых векторов X и U , участвующих в минимизации. Чтобы сделать какие-либо общие качественные выводы о возможных результатах идентификации, полезно понять, что происходит, когда мы варьируем P при фиксированных X и U и когда мы варьируем X и U при фиксированном P . Первый случай ничем не отличается от обсуждавшегося в п. 6, поэтому мы рассмотрим только второй.

7.1 *Линейная модель.*

Если отображение F линейно по X и U , то при фиксированном $P = P^*$ функционал (5) является положительно полуопределенной квадратичной формой. Линейное подпространство $L \subset \mathbb{R}^{n+m}$ нулей этой формы в общем случае имеет размерность m , равную размерности вектора управления U . На множестве (параллелепипеде) $\Omega_{XU} = \Omega_X \times \Omega_U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ эта форма имеет вырожденный нулевой минимум в точках пересечения $L \cap \Omega_{XU}$, если это пересечение не пусто. В качестве нового номинального режима можно взять ближайшую к исходному номинальному режиму (центру параллелепипеда) точку из $L \cap \Omega_{XU}$. Если пересечение пусто, то минимум формы - ненулевой, и он достигается в некоторой точке $(X^\#, U^\#)$ границы параллелепипеда Ω_{XU} . Гиперповерхности уровня формы являются эллиптическими цилиндрами с осью L и потому в ситуации общего положения (по соображениям размерности и выпуклости) точка $(X^\#, U^\#)$ будет лежать на $(n-1)$ -мерной грани параллелепипеда Ω_{XU} .

7.2 *Полиномиальная нелинейная модель.*

В этом случае при фиксированном P^* функционал (5) является положительно полуопределенной полиномиальной функцией

$$||X_1 - F_1(X,U;P_1^*)||^2 + ||X_2 - F_2(X,U;P_2^*)||^2 + \cdots + ||X_n - F_n(X,U;P_n^*)||^2 \,. \tag{7}$$

Дальнейший анализ относится к ситуации общего положения. Обозначим через S_i гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+m}$, определяемую уравнением $X_i = F_1(X,U;P_i^*)$. Функция (6) имеет вырожденный нулевой минимум на подмногообразии $S = S_1 \cap \ldots \cap S_n \subset \mathbb{R}^{n+m}$ размерности m . С заменой линейного подпространства L на подмногообразие S можно повторить сказанное выше в линейном случае: на множестве (параллелепипеде) Ω_{XU} эта функция имеет вырожденный нулевой минимум в точках пересечения $S \cap \Omega_{XU}$, если это пересечение не пусто, и в качестве нового номинального режима можно взять ближайшую к исходному номинальному режиму (центру параллелепипеда) точку из $S \cap \Omega_{XU}$. Если пересечение пусто, то минимум формы - ненулевой, и он достигается в некоторой точке $(X^\#, U^\#)$ границы параллелепипеда Ω_{XU} . В отличие от линейного случая, эта точка может лежать на грани любой размерности и, более того, в ситуации общего положения это будет точка $(n+m-1)$ -мерной грани, т. е. грани максимальной размерности.

7.3 *Коррекция номинального режима.*

Среди сделанных выше наблюдений и выводов, возможно, наиболее полезным для практики является следующий. При фиксированном P^* и непустом пересечении $\Delta_{P^*} = S \cap \Omega_{XU}$ (или, в линейном случае, $\Delta_{P^*} = L \cap \Omega_{XU}$) в качестве нового номинального режима можно взять ближайшую к исходному номинальному режиму (X^*, U^*) точку из Δ_{P^*} . Поскольку в исходной задаче $P^* \in \Omega_P$, можно дополнительно оптимизировать наш выбор, меняя P^* , т. е. находя ближайшую к исходному номинальному режиму точку из объединения Δ_{Ω_P} всех множеств Δ_{P^*} . Может, конечно, оказаться, что $(X^*, U^*) \in \Delta_{\Omega_P}$ и ничего изменять не нужно. Но если (X^*, U^*) не принадлежит множеству Δ_{Ω_P} , то мы получим реальную коррекцию $(X^{\#}, U^{\#})$ исходного номинального режима (X^*, U^*) . Заметим, что для нахождения $(X^{\#}, U^{\#})$ нужно добавить в функционал (2) слагаемое $\varepsilon||X - X^*||^2$ с $\varepsilon \to 0$, т. е. применить регуляризацию Тихонова.

8. Заключение.

Сформулируем кратко наиболее значимые из полученных результатов.

- Для параметрической идентификации системы по номинальным значениям переменных нужно задать еще один, начальный режим. Значения переменных в этом начальном режиме должны входить в полиномиальную модель в качестве постоянных слагаемых.
- При отсутствии ограничений на параметры имеет смысл рассматривать решение, минимальное по норме, что соответствует регуляризации Тихонова.
- При наличии ограничений на переменные и параметры задача параметрической идентификации системы по номинальным значениям переменных становится достаточно содержательной. В частности, возможна ситуация, когда будет найден новый, более оптимальный, номинальный режим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шмырин А.М., Мишачёв Н.М.* Окрестностные системы и алгоритм Качмажа // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т.21. Вып.6. С. 2113–2120.

2. *Шмырин А.М., Мишачёв Н.М., Косарева А.С.* Кластеризация окрестностной структуры // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т.21. Вып.2. С. 457–462.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00854_а).

Поступила в редакцию 29 мая 2017 г

Мишачёв Николай Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Шмырин Анатолий Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, e-mail: amsh@lipetsk.ru

UDC 519.71
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-558-564

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF NEIGHBORHOOD SYSTEMS NEAR NOMINAL MODES

© **N. M. Mishachev, A. M. Shmyrin**

Lipetsk State Technical University
30 Moskovskaya St., Russian Federation, 398600
E-mail: nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

The paper discusses the problem of parametric identification of a structurally identified static polynomial system near the nominal mode in the case when only allowable limits are specified for states, controls and coefficients of the model.
Key words: neighborhood system; identification; nominal mode

REFERENCES

1. *Shmyrin A.M., Mishachev N.M.* Neighborhood systems and Kaczmarz algorithm Clustering of neighborhood structure // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2016. V. 21. Iss. 6. P. 457–462.

2. *Shmyrin A.M., Mishachev N.M., Kosareva A.S.* Clustering of neighborhood structure. Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2016. V. 21. Iss. 2. P. 2113–2120.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-07-00854_a).

Received 29 May 2017

Mishachev Nikolay Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail:nmish@lipetsk.ru

Shmyrin Anatoliy Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Professor, the Head of the Higher Mathematics Department, e-mail: amsh@lipetsk.ru

Информация для цитирования:

Мишачев Н.М., Шмырин А.М. Параметрическая идентификация окрестностных систем вблизи номинальных режимов // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 558–564. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-558-564

Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Parametricheskaya identifikatsiya okrestnostnyh sistem vblizi nominalnyh regimov [Parametric identification of neighborhood systems near nominal modes]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki - Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 558–564. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-558-564 (In Russian)