УДК 517.988.6, 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-523-532

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© **Т. В. Жуковская**[1)], **Е. С. Жуковский**[2)3)], **Х. М. Т. Тахир**[2)]

[1)] Тамбовский государственный технический университет
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
[2)] Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина,
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: zukovskys@mail.ru, khalidtahir89@yahoo.com
[3)] Российский университет дружбы народов,
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: zukovskys@mail.ru

Рассматривается задача Коши для нелинейного функционально-дифференциального уравнения общего вида с вольтерровыми отображениями. Получены условия существования единственного глобального решения, условия существования единственного предельно продолженного решения. Используются редукция к операторному уравнению с вольтерровым оператором в пространстве непрерывных функций.
Ключевые слова: вольтерров оператор; нелинейное функционально-дифференциальное уравнение; задача Коши; существование решения

Теория линейных функционально-дифференциальных уравнений и ряд фундаментальных результатов о нелинейных функционально-дифференциальных уравнениях получены научным коллективом Н.В. Азбелева (см. монографии [1], [2] и содержащиеся в них библиографические списки). Наиболее востребованными и содержательными являются результаты о функционально-дифференциальных уравнениях с вольтерровыми отображениями. Такими уравнениями описывается динамика различных процессов, и именно такие уравнения наследуют многие свойства обыкновенных дифференциальных уравнений. В статье исследуются вопросы разрешимости задачи Коши нелинейного функционально-дифференциального уравнения с вольтерровыми отображениями.

1. Определение решения уравнения с вольтерровым оператором

Пусть заданы банаховы пространства $E_i = E_i([0,T],\mathbb{R}^n),$ $i = 1, 2,$ функций, определенных на $[0,T]$ и имеющих значения в $\mathbb{R}^n$. Оператор $F : E_1 \to E_2$ называют *вольтерровым* (по А.Н. Тихонову), если для любого $\tau \in (0,T]$ и любых $x, u \in E_1$ из равенства $x(t) = u(t)$ на $[0,\tau]$ следует, что $(Fx)(t) = (Fu)(t)$ на $[0,\tau]$.

Пусть задана функция $y \in E_2$. Рассмотрим уравнение

$$(Fx)(t) = y(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

Вольтерровость оператора $F : E_1 \to E_2$ позволяет определить решение этого уравнения не только на всем $[0,T],$ но и на отрезке $[0,\tau],$ $\tau \in (0,T]$. Приведем соответствующие определения из [3], [4].

Определим пространства $E_i([0,\tau],\mathbb{R})$, $i=1,2$, функций $x_\tau:[0,\tau]\to\mathbb{R}$, являющихся сужениями на $[0,\tau]$ функций из $E_i([0,T],\mathbb{R})$. Положим

$$\|x_\tau\|_{E_i([0,\tau],\mathbb{R})}=\inf\big\{\|x\|_{E([0,T],\mathbb{R})}:\ x(t)=x_\tau(t),\ t\in[0,\tau]\big\}.$$

С такой нормой пространство $E_i([0,\tau],\mathbb{R})$ становится банаховым (см. [5; с. 129]).

Определим оператор $P^{\tau}_{E_i}$ сужения функций из $E_i([0,T],\mathbb{R})$ не отрезок $[0,\tau]$, т. е.

$$P^{\tau}_{E_i}:E_i([0,T],\mathbb{R})\to E_i([0,\tau],\mathbb{R}),\quad (P^{\tau}_{E_i}x)(t)=x(t)\quad \forall t\in[0,\tau].$$

Далее определим оператор $\Pi^{\tau}_{E_i}:E_i([0,\tau],\mathbb{R})\to E_i([0,T],\mathbb{R})$, продолжающий произвольно функцию $x_\tau\in E_i([0,\tau],\mathbb{R})$ до определенной из всем $[0,T]$ функции $x\in E_i([0,T],\mathbb{R})$.

Функцию $x_\tau\in E_1([0,\tau],\mathbb{R})$ называют *определенным на* $[0,\tau]$ *решением* уравнения (1), если ее продолжение $x\in E_1([0,T],\mathbb{R})$ удовлетворяет этому уравнению при $t\in[0,\tau]$, или, другими словами, если выполнено

$$P^{\tau}_{E_2}F\ \Pi^{\tau}_{E_1}x_\tau=P^{\tau}_{E_2}\ y.$$

Определенное на $[0,\tau]$ решение при $\tau<T$ называют *локальным*; определенное на всем $[0,T]$ решение — *глобальным.* Ели для функции $x_\eta:[0,\eta)\to\mathbb{R}$, $\eta\in(0,T]$, ее сужение x_τ на $[0,\tau]$ при любом $\tau\in(0,\eta)$ является локальным решением уравнения (1) и $\|x_\tau\|_{E_1([0,\tau],\mathbb{R})}\to\infty$ при $\tau\to\eta-0$, то x_η называют *предельно продолженным решением* уравнения (1). Локальное решение x_τ называют *частью локального, глобального или предельно продолженного решения* x_ς, а решение x_ς — *продолжением решения* x_τ, если $\varsigma>\tau$ и $x_\tau(t)=x_\varsigma(t)$ при $t\in[0,\tau]$.

2. Существование и оценки решений задачи Коши для нелинейного функционально-дифференциального уравнения общего вида

Будем обозначать: $L=L([0,T],\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство суммируемых функций $y:[0,T]\to\mathbb{R}^n$, $\|y\|_L=\int\limits_0^t|y(t)|dt$; $AC=AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}^n$, производная которых $\dot x\in L$, с нормой $\|x\|_{AC}=|x(0)|+$ $+\ \|\dot x\|_L$; $C=C([0,T],\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}^n$, $\|x\|_C=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|$.

Пусть заданы: линейный вольтерров оператор $\mathcal{L}:AC([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R})$, произвольный (вообще говоря, нелинейный) вольтерров оператор $F:AC([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R})$ и $\alpha\in\mathbb{R}$. Для функционально-дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}x=Fx \tag{2}$$

рассмотрим задачу Коши с начальным условием

$$x(0)=\alpha. \tag{3}$$

Для редукции этой задачи к операторному уравнению выберем произвольную функцию $f\in L([0,T],\mathbb{R})$ и введем задачу Коши для соответствующего линейного уравнения

$$\mathcal{L}x=f,\quad x(0)=\alpha. \tag{4}$$

При естественных предположениях (а именно, в случае вольтерровой обратимости главной части оператора $\mathcal{L}$, подробнее см. [1; с. 35]) задача (4) имеет единственное решение, и это решение представимо в виде

$$x(t)=\alpha X(t)+\int\limits_0^t C(t,s)\,f(s)\,ds, \tag{5}$$

где $X(\cdot)\in AC([0,T],\mathbb{R})$ — фундаментальное решение однородного уравнения $\mathcal{L}x=0$, $C(t,s)$ — функция Коши, а выражение $\int\limits_0^t C(t,s)\,f(s)\,ds$ называют оператором Коши. Такая запись линейного ограниченного оператора Коши $f\in L([0,T],\mathbb{R})\mapsto \int\limits_0^{(\cdot)} C(\cdot,s)\,f(s)\,ds\in AC([0,T],\mathbb{R})$ является следствием интегрального представления любого линейного ограниченного оператора $L([0,T],\mathbb{R})\to AC([0,T],\mathbb{R})$ (см. [6; с. 302–305]). Согласно этому представлению функция Коши $C(t,s)$ измерима (по плоской мере) и существенно ограничена. Вследствие вольтерровости интегрального оператора Коши выполнено $C(t,s)=0$ при $s>t$ (см., например, [7; теорема 3]), что позволяет этот оператор записывать как интеграл на множестве $[0,t]$, а не на всем отрезке $[0,T]$. Свойства функции Коши конкретных линейных функционально-дифференциальных уравнений изучены в [8].

Используя соотношение (5), перепишем задачу (2), (3) в виде эквивалентного уравнения

$$x(t)=\alpha X(t)+\int\limits_0^t C(t,s)\,(Fx)(s)\,ds. \tag{6}$$

Для исследования уравнения (6) мы воспользуемся предложенными в [3], [4], [9], [10] подходами и полученными в этих работах результатами об операторных уравнениях Вольтерры.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $q\geq 0$. Вольтерров оператор $\widetilde{F}:C([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R})$ назовем *вольтеррово q-липшицевым,* если для любых $\varsigma\in[0,T)$, $x^0_\varsigma\in C([0,\varsigma],\mathbb{R})$ и $r>0$ существует такое $\tau=\tau(\varsigma,x^0_\varsigma,r)\in(0,T-\varsigma]$, что для произвольных $u,\tilde{u}\in C([0,T],\mathbb{R})$, удовлетворяющих соотношениям

$$u(t)=\tilde{u}(t)=x^0_\varsigma(t)\ \ \forall t\in[0,\varsigma],\quad \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]}|u(t)-u(\varsigma)|\leq r,\quad \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]}|\tilde{u}(t)-\tilde{u}(\varsigma)|\leq r,$$

выполнено неравенство

$$\int\limits_\varsigma^{\varsigma+\tau}\big|(\widetilde{F}u)(t)-(\widetilde{F}\tilde{u})(t)\big|\,dt\leq q\max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]}|u(t)-\tilde{u}(t)|. \tag{7}$$

Если $\widetilde{F}$ удовлетворяет определению 1, то при любом положительном $\tilde{\tau}<\tau(\varsigma,x_\varsigma,r)$, для произвольных $u,\tilde{u}\in C([0,T],\mathbb{R})$ из соотношений

$$u(t)=\tilde{u}(t)=x^0_\varsigma(t)\ \ \forall t\in[0,\varsigma],\quad \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tilde{\tau}]}|u(t)-u(\varsigma)|\leq r,\quad \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tilde{\tau}]}|\tilde{u}(t)-\tilde{u}(\varsigma)|\leq r$$

следует неравенство

$$\int\limits_\varsigma^{\varsigma+\tilde{\tau}}\big|(\widetilde{F}u)(t)-(\widetilde{F}\tilde{u})(t)\big|\,dt\leq q\max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tilde{\tau}]}|u(t)-\tilde{u}(t)|.$$

Действительно, функции $\mathfrak{u},\tilde{\mathfrak{u}}\in C([0,T],\mathbb{R})$,

$$\mathfrak{u}(t)=\begin{cases} u(t), & \text{при } t\in[0,\tilde{\tau}],\\ u(\tilde{\tau}), & \text{при } t\in(\tilde{\tau},T];\end{cases}\qquad \tilde{\mathfrak{u}}(t)=\begin{cases} \tilde{u}(t), & \text{при } t\in[0,\tilde{\tau}],\\ \tilde{u}(\tilde{\tau}), & \text{при } t\in(\tilde{\tau},T],\end{cases}$$

удовлетворяют оценкам $\max\limits_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]}|\mathfrak{u}(t)-\mathfrak{u}(\varsigma)|\leq r$, $\max\limits_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]}|\tilde{\mathfrak{u}}(t)-\tilde{\mathfrak{u}}(\varsigma)|\leq r$, что позволяет воспользоваться неравенством (7) и получить требуемое неравенство.

Заметим, что при $\varsigma=0$ для вольтеррово q-липшицева оператора имеет место соотношение

$$\forall x_0\in\mathbb{R}\ \ \forall r>0\ \ \exists\tau=\tau(0,x_0,r)\ \ \forall u,\tilde u\in C([0,T],\mathbb{R})$$
$$u(0)=\tilde u(0)=x_0,\quad \max_{t\in[0,\tau]}|u(t)-x_0|\le r,\quad \max_{t\in[0,\tau]}|\tilde u(t)-x_0|\le r\ \Rightarrow$$
$$\int\limits_0^\tau |(\widetilde{F}u)(t)-(\widetilde{F}\tilde u)(t)|\,dt\le q\max_{t\in[0,\tau]}|u(t)-\tilde u(t)|.$$

О п р е д е л е н и е 2. Оператор $\widetilde{F}:C([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R})$ назовем *равномерно вольтеррово q-липшицевым,* если этот оператор вольтеррово q-липшицев и константа τ не зависит от значений R, r, ς.

Важно, что даже равномерно вольтеррово q-липшицев оператор $\widetilde{F}$ не обязательно является ограниченным и непрерывным. Приведем соответствующий

П р и м е р 1. Пусть $\varphi:C([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ — линейный неограниченный функционал, $P_C^1:C([0,3],\mathbb{R})\to C([0,1],\mathbb{R})$ — оператор сужения функций из $C([0,3],\mathbb{R})$ не отрезок $[0,1]$. Определим линейный оператор $\widetilde{F}:C([0,3],\mathbb{R})\to L([0,3],\mathbb{R})$ соотношением

$$(\widetilde{F}x)(t)=\begin{cases}0, & \text{при } t\in[0,2),\\ \varphi P_L^1x, & \text{при } t\in[2,3],\end{cases}$$

Этот оператор, очевидно, не является ограниченным и, соответственно, непрерывным. В то же время $\widetilde{F}$ равномерно вольтеррово q-липшицев с константой $q=0$. Действительно, при $\tau=1$ для любых $x,u\in C([0,3],\mathbb{R})$ выполнено $(\widetilde{F}x)(t)=(\widetilde{F}u)(t)=0,\ \ t\in[0,2]$, и для произвольного $\varsigma\in[0,2)$, если $x(t)=u(t)$ на $[0,\varsigma]$, то $(\widetilde{F}x)(t)=(\widetilde{F}u)(t),\ \ t\in[0,\varsigma+1]$.

Т е о р е м а 1. *Пусть для некоторого $c_0\ge0$ выполнено $|C(t,s)|\le c_0,\ \ t\in[0,T],\ \ s\in[0,t]$; а вольтерров оператор $F:AC([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R})$ допускает продолжение до вольтеррова ограниченного оператора $\widetilde{F}:C([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R})$. Тогда, если оператор $\widetilde{F}$ вольтеррово q-липшицев и $q<1/c_0$, то задача Коши (2), (3) разрешима, имеет единственное глобальное или предельно продолженное решение, а всякое локальное решение является его частью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим эквивалентное задаче (2), (3) уравнение (6), которое в свою очередь, равносильно уравнению

$$x(t)=\alpha X(t)+\int\limits_0^t C(t,s)\,(\widetilde{F}x)(s)\,ds \tag{8}$$

в пространстве $C([0,T],\mathbb{R})$. Уравнение (8) — это уравнение вида $x=\Phi x$, в котором оператор

$$\Phi:C([0,T],\mathbb{R})\to C([0,T],\mathbb{R}),\quad (\Phi x)(t)=\alpha X(t)+\int\limits_0^t C(t,s)\,(\widetilde{F}x)(s)\,ds$$

вольтерров. Покажем, что уравнение (8) имеет локальное решение.

Для произвольного $\tau\in(0,T)$ определим отображения:

$$\Pi^\tau\doteq\Pi^\tau_{C([0,T],\mathbb{R})}:C([0,\tau],\mathbb{R})\to C([0,T],\mathbb{R}),$$
$$(\Pi^\tau x_\tau)(t)=\begin{cases}x_\tau(t), & \text{если}\quad t\in[0,\tau],\\ x_\tau(\tau), & \text{если}\quad t\in(\tau,T],\end{cases}\qquad \forall x_\tau\in C([0,\tau],\mathbb{R});$$

$$P^\tau\doteq P^\tau_{C([0,T],\mathbb{R})}:C([0,T],\mathbb{R})\to C([0,\tau],\mathbb{R}),\quad (P^\tau x)(t)=x(t),\quad t\in[0,\tau],\quad x\in C([0,T],\mathbb{R}).$$

Определим постоянную функцию $a(t) \doteq \alpha, \quad t \in [0,T]$. Если $a - \Phi a = 0$, то уравнение (8) разрешимо, функция a — его глобальное решение. Пусть $a - \Phi a \neq 0$, вычислим

$$r_0 = \frac{\|a - \Phi a\|_{C([0,T],\mathbb{R})}}{1 - c_0 q}$$

и найдем значение $\tau = \tau(0,\alpha,r_0)$, удовлетворяющее определению 1.

Действующий в пространстве $C([0,\tau],\mathbb{R})$ оператор $\Phi^\tau = P^\tau \Phi\, \Pi^\tau$ отображает в себя шар $B^0 \doteq B_{C([0,\tau],\mathbb{R})}(P^\tau a,\, r_0) \subset C([0,\tau],\mathbb{R})$ с центром в $P^\tau \Phi a$ и радиуса r_0. Действительно, для любого $x_\tau \in B^0$ выполнены неравенства

$$\|\Phi^\tau x_\tau - P^\tau a\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} \le \|\Phi^\tau x_\tau - P^\tau \Phi a\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} + \|P^\tau \Phi a - P^\tau a\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} =$$

$$= \max_{t\in[0,\tau]} \Big| \int_0^t C(t,s)\,(\widetilde{F}\Pi^\tau x_\tau)(s)\,ds - \int_0^t C(t,s)\,(\widetilde{F}a)(s)ds \Big| + \|P^\tau \Phi a - P^\tau a\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} \le$$

$$\le \max_{t\in[0,\tau]} \int_0^\tau |C(t,s)|\,\big|(\widetilde{F}\Pi^\tau x_\tau)(s) - (\widetilde{F}a)(s)\big|\,ds + \|a - \Phi a\|_{C([0,T],\mathbb{R})} \le$$

$$\le c_0 q \|x_\tau - P^\tau a\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} + \|a - \Phi a\|_{C([0,T],\mathbb{R})} \le c_0 q r_0 + (1 - c_0 q) r_0 = r_0.$$

Кроме того, на шаре B^0 оператор Φ^τ является сжимающим с коэффициентом $c_0 q < 1$. Согласно теореме Банаха в шаре B^0 существует единственный элемент x_τ, удовлетворяющий уравнению $x_\tau = \Phi^\tau x_\tau$, и таким образом, уравнение (8) локально разрешимо.

Покажем, что уравнение (8) не может иметь два различных решения, определенных на одном и том же отрезке. Предположим противное, пусть такими решениями являются $u_\zeta, \tilde{u}_\zeta \in \in C([0,\zeta],\mathbb{R})$. Положим

$$\sigma = \inf\{t \in [0,\varsigma] \ : \ u_\zeta(t) \neq \tilde{u}_\zeta(t)\}$$

(следовательно, $u_\zeta(t) = \tilde{u}_\zeta(t)$ на $[0,\sigma]$). Определим функцию $x^0_\sigma \in C([0,\sigma],\mathbb{R})$ соотношением $x^0_\sigma(t) = u_\zeta(t) \quad \forall t \in [0,\sigma]$ и положим

$$r_\sigma \doteq \frac{\|\Pi^\sigma x^0_\sigma - \Phi \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,T],\mathbb{R})}}{1 - c_0 q} + 1, \quad \tau \doteq \tau(\sigma, x^0_\sigma, r_\sigma).$$

Вследствие непрерывности функций $u_\zeta, \tilde{u}_\zeta$ можем так определить $\tilde{\tau} \in (0,\tau]$, $\tilde{\tau} \le \zeta - \sigma$, чтобы выполнялись неравенства $\max\limits_{t\in[\sigma,\sigma+\tilde{\tau}]} |u_\zeta(t) - u_\zeta(\sigma)| \le r_\sigma$, $\max\limits_{t\in[\sigma,\sigma+\tilde{\tau}]} |\tilde{u}_\zeta(t) - \tilde{u}_\zeta(\sigma)| \le r_\sigma$. Положим $\varsigma \doteq \sigma + \tilde{\tau}$ и определим множество

$$B^\sigma \doteq \big\{x_\varsigma \in C([0,\varsigma],\mathbb{R}) \ : \ x_\varsigma(t) = x^0_\sigma(t) \ \forall t \in [0,\sigma], \ \ \|x_\varsigma - P^\varsigma \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,\varsigma],\mathbb{R})} \le r_\sigma\big\}.$$

Заметим, что сужения на $[0,\varsigma]$ решений $u_\zeta, \tilde{u}_\zeta$ являются элементами множества B^σ.

Оператор $\Phi^\varsigma = P^\varsigma \Phi\, \Pi^\varsigma$ отображает в себя замкнутое множество $B^\sigma \subset C([0,\varsigma],\mathbb{R})$. Действительно, при любом $x_\varsigma \in B^\sigma$, во-первых, выполнено $(\Phi \Pi^\varsigma x_\varsigma)(t) = x^0_\sigma(t)$ на $[0,\sigma]$; и во-вторых, справедливы неравенства

$$\|\Phi^\varsigma x_\varsigma - P^\varsigma \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,\varsigma],\mathbb{R})} \le \|\Phi^\varsigma x_\varsigma - P^\varsigma \Phi \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,\varsigma],\mathbb{R})} + \|P^\varsigma \Phi \Pi^\sigma x^0_\sigma - P^\varsigma \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,\varsigma],\mathbb{R})} =$$

$$\max_{t\in[\sigma,\varsigma]} \Big| \int_\sigma^t C(t,s)\,(\widetilde{F}\Pi^\varsigma x_\varsigma)(s)\,ds - \int_\sigma^t C(t,s)\,(\widetilde{F}\Pi^\sigma x^0_\sigma)(s)ds \Big| + \|P^\varsigma \Phi \Pi^\sigma x^0_\sigma - P^\varsigma \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,\varsigma],\mathbb{R})} \le$$

$$\leq \max_{t\in[\sigma,\varsigma]} \int\limits_{\sigma}^{\varsigma} |C(t,s)| \left|(\widetilde{F}\Pi^{\varsigma}x_{\varsigma})(s) - (\widetilde{F}\Pi^{\sigma}x^0_{\sigma})(s)ds)\right| ds + \|\Phi\Pi^{\sigma}x^0_{\sigma} - \Pi^{\sigma}x^0_{\sigma}\|_{C([0,T],\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq c_0 q\|x_{\varsigma} - P^{\varsigma}\Pi^{\sigma}x^0_{\sigma}\|_{C([0,\varsigma],\mathbb{R})} + \|\Phi\Pi^{\sigma}x^0_{\sigma} - \Pi^{\sigma}x^0_{\sigma}\|_{C([0,T],\mathbb{R})} \leq c_0 q r_{\sigma} + (1-c_0q)(r_{\sigma}-1) \leq r_{\sigma}.$$

Таким образом, согласно теореме Банаха во множестве B^{σ} существует единственное определенное на $[0,\varsigma]$ решение x_{ς}, уравнения (8). Это противоречит существованию в B^{σ} двух различных локальных решений — сужений на $[0,\varsigma]$ решений $u_{\zeta}, \tilde{u}_{\zeta}$.

Покажем, что любое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения. Локальному решению x_{ξ}, так как оно единственное на $[0,\xi]$, взаимно однозначно соответствует его область определения и, соответственно, число ξ. Для множества Ξ таких чисел найдем точную верхнюю границу $\eta \doteq \sup \Xi$ и определим на $[0,\eta)$ функцию x_{η}, $x_{\eta}(t) = x_{\xi}(t)$, где значение ξ — любое, удовлетворяющее неравенству $\xi > t$ (это определение корректно в силу единственности на каждом отрезке локального решения). При увеличении ξ значение $\|x_{\xi}\|_{C([0,\xi],\mathbb{R})}$ не убывает. Положим $R \doteq \lim_{\xi\to\eta-0} \|x_{\xi}\|_{C([0,\xi],\mathbb{R})}$. Если $R = +\infty$, то функция x_{η}, $t \in [0,\eta)$, является предельно продолженным решением.

Пусть $R < +\infty$. Сначала покажем, что в этом случае функцию x_{η}, $t \in [0,\eta)$ можно доопределить в точке η до непрерывной на отрезке $[0,\eta]$ функции (т. е. существует $\lim_{t\to\eta} x_{\eta}(t)$), которую мы будем обозначать $\tilde{x}_{\eta}$.

Для любого $\xi\in\Xi$ продолжение $\Pi^{\xi}x_{\xi}\in C([0,T],\mathbb{R})$ на $[0,T]$ функции $x_{\xi}\in C([0,\xi],\mathbb{R})$ удовлетворяет оценке $\|\Pi^{\xi}x_{\xi}\|_{C([0,T],\mathbb{R})}\leq R$. Вследствие ограниченности отображения $\widetilde{F}: C([0,T],\mathbb{R}) \to$ $\to L([0,T],\mathbb{R})$ существует такое R', что $\|\widetilde{F}\Pi^{\xi}x_{\xi}\|_{L([0,T],\mathbb{R})} \leq R'$. Определим некоторую последовательность $\{\xi_i\}$, сходящуюся к η. Вследствие вольтерровости отображения $\widetilde{F}$ при п. в. $t \in [0,\eta]$ последовательность $\{(P^{\eta}\widetilde{F}\Pi^{\xi_i}x_{\xi_i})(t)\}$ сходится к измеримой функции f_{η}, равной $f_{\eta}(t) = (\widetilde{F}\Pi^{\xi_i}x_{\xi_i})(t)$, где $\xi_i > t$ может быть выбрано любым. Так как $\int\limits_0^{\eta} |(\widetilde{F}\Pi^{\xi_i}x_{\xi_i})(t)|\, dt \leq R'$, то в силу теоремы Фату (см. [11; с. 133]) имеем $\int\limits_0^{\eta} |f_{\eta}(t)|\, dt \leq R'$, таким образом, $f_{\eta} \in L([0,\eta],\mathbb{R})$. Функция $t\in[0,\eta]\mapsto \alpha X(t) + \int\limits_0^t C(t,s) f_{\eta}(s) ds$ непрерывна на отрезке $[0,\eta]$, а на полуинтервале $[0,\eta)$ выполнено равенство $x_{\eta}(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^t C(t,s) f_{\eta}(s)\, ds$. Итак, $\tilde{x}_{\eta}(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^t C(t,s) f_{\eta}(s)\, ds$, $t \in [0,\eta]$.

Теперь покажем, что найденное локальное решение $\tilde{x}_{\eta}$ может быть продолжено, и тогда будет получено противоречие с найденной выше верхней гранью η областей существования всех локальных решений.

Если $\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta} - \Phi\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta} = 0$, то $\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta}$ является глобальным решением, продолжающим локальное решение $\tilde{x}_{\eta}$. Пусть $\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta} - \Phi\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta} \neq 0$. Положим

$$r_{\eta} \doteq \frac{\|\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta} - \Phi\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta}\|_{C([0,T],\mathbb{R})}}{1 - c_0 q}, \quad \tau \doteq \tau(\eta, \tilde{x}_{\eta}, r_{\eta}).$$

Положим $\tilde{\xi} \doteq \eta + \tau$ и определим множество

$$B^{\eta} \doteq \left\{ x_{\tilde{\xi}} \in C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R}) \;:\; x_{\tilde{\xi}}(t) = \tilde{x}_{\eta}(t)\ \forall t \in [0,\eta],\ \ \|x_{\tilde{\xi}} - P^{\tilde{\xi}}\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta}\|_{C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})} \leq r_{\eta} \right\}.$$

Оператор $\Phi^{\tilde{\xi}} = P^{\tilde{\xi}}\Phi\,\Pi^{\tilde{\xi}}$ отображает в себя замкнутое множество $B^{\eta} \subset C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})$. Действительно, при любом $x_{\tilde{\xi}} \in B^{\eta}$ выполнено

$$(\Phi\Pi^{\tilde{\xi}}x_{\tilde{\xi}})(t) = \tilde{x}_{\eta}(t) \quad \forall t \in [0,\eta];$$

$$\|\Phi^{\tilde{\xi}} x_{\tilde{\xi}} - P^{\tilde{\xi}}\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta}\|_{C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})} \le \|\Phi^{\tilde{\xi}} x_{\tilde{\xi}} - P^{\tilde{\xi}}\Phi\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta}\|_{C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})} + \|P^{\tilde{\xi}}\Phi\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta} - P^{\tilde{\xi}}\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta}\|_{C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})} =$$

$$= \max_{t\in[\eta,\tilde{\xi}]} \Big| \int_{\eta}^{t} C(t,s)\,(\widetilde{F}\Pi^{\tilde{\xi}} x_{\tilde{\xi}})(s)\,ds - \int_{\eta}^{t} C(t,s)\,(\widetilde{F}\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta})(s)ds\Big| + \|P^{\tilde{\xi}}\Phi\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta} - P^{\tilde{\xi}}\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta}\|_{C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})} \le$$

$$\le \max_{t\in[\eta,\tilde{\xi}]} \int_{\eta}^{t} |C(t,s)|\,\big|(\widetilde{F}\Pi^{\tilde{\xi}} x_{\tilde{\xi}})(s) - (\widetilde{F}\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta})(s)\big|\,ds + \|\Phi\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta} - \Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta}\|_{C([0,T],\mathbb{R})} \le$$

$$\le c_0 q \|x_{\tilde{\xi}} - P^{\tilde{\xi}}\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta}\|_{C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})} + \|\Phi\Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta} - \Pi^{\eta}\tilde{x}_{\eta}\|_{C([0,T],\mathbb{R})} \le c_0 q r_{\eta} + (1-c_0 q) r_{\eta} = r_{\eta}.$$

Согласно теореме Банаха во множестве B^{η} существует единственное определенное на $[0,\tilde{\xi}]$ решение уравнения (8).

Таким образом, в ситуации $R<+\infty$ получено противоречие. □

В теореме 1 свойство ограниченности оператора $\widetilde{F}$ используется для доказательства продолжаемости локальных решений, позволяя установить, что если определенная на полуинтервале $[0,\eta)$ функция x_{η} ограничена и ее сужение на любой отрезок является локальным решением, то ее можно доопределить в точке η до непрерывной на отрезке $[0,\eta]$ функции. Это утверждение не потребуется, если предположить, что оператор $\widetilde{F}$ равномерно вольтеррово q-липшицев.

Т е о р е м а 2. *Пусть для некоторого* $c_0\ge 0$ *выполнено* $|C(t,s)|\le c_0,$ $t\in[0,T],$ $s\in[0,t];$ *а вольтерров оператор* $F:AC([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R})$ *допускает продолжение до вольтеррова оператора* $\widetilde{F}:C([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R}).$ *Тогда, если оператор* $\widetilde{F}$ *равномерно вольтеррово* q*-липшицев и* $q<1/c_0,$ *то задача Коши (2), (3) имеет единственное глобальное решение, а всякое локальное решение является его частью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя приведенные в доказательстве теоремы 1 рассуждения и построения, можно показать, что уравнение (8) имеет определенное на $[0,\tau]$ решение. Далее, аналогично определяется продолжение локального решения. Так как теперь оператор $\widetilde{F}$ равномерно вольтеррово q-липшицев, то продолжение решения будет определено на $[0,2\tau]$. Полученное решение можно снова продолжить, причем, в силу равномерной вольтрровой липшицевости на $[0,3\tau]$. Продолжая аналогичные построения за конечное число шагов будет получено единственное глобальное решение уравнения (8).

Для применения теорем 1,2 к конкретным уравнениям необходимы оценки функции Коши (т. е. требуется знать значение c_0) соответствующих линейных уравнений. С этой целью могут быть использованы, например, результаты работ [12], [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

3. *Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Математический сборник. 2006. Т. 197. № 10. С. 33–56.

4. *Бурлаков Е.О., Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра с локально сжимающими операторами // Известия вузов. Математика. 2010. № 8. С. 16–29.

5. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

6. *Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теор. литературы, 1950. 548 с.

7. *Жуковский Е.С.* К теории уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1599–1605.

8. *Максимов В.П.* О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 4. С. 601–606.

9. *Жуковский Е.С.* Вольтерровость и спектральные свойства оператора внутренней суперпозиции // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 2. С. 250–255.

10. *Жуковский Е.С.* Нелинейное уравнение Вольтерра в банаховом функциональном пространстве // Известия вузов. Математика. 2005. № 10. С. 17–28.

11. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

12. *Тахир Х.М.Т.* О решении линейных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 417–431.

13. *Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т.* О неотрицательности функции Коши дифференциального уравнения с постоянным запаздыванием // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016): сб. тр. 9 Междунар. конф. 2016. С. 154–158.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00553, № 17-41-680975), Минобрнауки России (Соглашение № 02.a03.21.0008) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ, № НШ-8215.2016.1.

Поступила в редакцию 17 апреля 2017 г

Жуковская Татьяна Владимировна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики; Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: zukovskys@mail.ru

Тахир Халид Мизхир Тахир, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа,
e-mail: khalidtahir89@yahoo.com

UDC 517.988.6, 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-523-532

ABOUT THE SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR NONLINEAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

© T. V. Zhukovskaya[1], E. S. Zhukovskiy[2)3)], Kh. M. T. Tahir[2]

[1] Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St, Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
[2] Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsionalnaya st., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: zukovskys@mail.ru, khalidtahir89@yahoo.com
[3] RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: zukovskys@mail.ru

The Cauchy problem for a nonlinear functional-differential equation of general type with Volterra mappings is considered. Conditions of existence of a unique global solution and conditions of existence of a unique limitary prolonged solution are derived. The reduction to an operator equation with the Volterra operator in the space of continuous functions is used.
Key words: the Volterra operator; nonlinear functional-differential equation; the Cauchy problem; existence of solution

REFERENCES

1. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rahmatullina L.F.* Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nyh uravnenij. M.: Nauka, 1991. 280 s.
2. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rahmatullina L.F.* Elementy sovremennoj teorii funktsional'no-differentsial'nyh uravnenij. Metody i prilozheniya. M.: Institut komp'yuternyh issledovanij, 2002. 384 s.
3. *Zhukovskiy E.S.* Nepreryvnaya zavisimost' ot parametrov reshenij uravnenij Vol'terra // Matematicheskij sbornik. 2006. T. 197. № 10. S. 33–56.
4. *Burlakov E.O., Zhukovskiy E.S.* Nepreryvnaya zavisimost' ot parametrov reshenij uravnenij Vol'terra s lokal'no szhimayushchimi operatorami // Izvestiya vuzov. Matematika. 2010. № 8. S. 16–29.
5. *Kantorovich L.V., Akilov G.P.* Funktsional'nyj analiz. M.: Nauka, 1984. 752 s.
6. *Kantorovich L.V., Vulih B.Z., Pinsker A.G.* Funktsional'nyj analiz v poluuporyadochennyh prostranstvah. M.-L.: Gos. izd-vo tekhn.-teor. literatury, 1950. 548 s.
7. *Zhukovskiy E.S.* K teorii uravnenij Vol'terra // Differentsial'nye uravneniya. 1989. T. 25. № 9. S. 1599–1605.
8. *Maksimov V.P.* O formule Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya // Differentsial'nye uravneniya. 1977. T. 13. № 4. S. 601–606.
9. *Zhukovskiy E.S.* Vol'terrovost' i spektral'nye svojstva operatora vnutrennej superpozitsii // Differentsial'nye uravneniya. 1994. T. 30. № 2. S. 250–255.
10. *Zhukovskiy E.S.* Nelinejnoe uravnenie Vol'terra v banahovom funktsional'nom prostranstve // Izvestiya vuzov. Matematika. 2005. № 10. S. 17–28.
11. *Natanson I.P.* Teoriya funktsij veshchestvennoj peremennoj. M.: Nauka, 1974. 480 s.
12. *Tahir H.M.T.* O reshenii linejnyh funktsional'no-differentsial'nyh uravnenij // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences, 2016. V. 21. Iss. 2. P. 417–431.
13. *Zhukovskiy E.S., Tahir H.M.T.* O neotritsatel'nosti funktsii Koshi differentsial'nogo uravneniya s postoyannym zapazdyvaniem // Sovremennye metody prikladnoj matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternyh tekhnologij (PMTUKT-2016): sb. tr. 9 Mezhdunar. konf. 2016. S. 154–158.

ACKNOWLEDGEMENTS: The present research is supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 17-01-00553, № 17-41-680975), by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement number 02.a03.21.0008) and by the grant of the Russian Federation President for the state support of leading scientific schools, No. NSh-8215.2016.1.

Received 17 April 2017

Zhukovskaya Tatyana Vladimirovna, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor of High Mathematics Department, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics; RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: zukovskys@mail.ru

Tahir Khalid Mizhir Tahir, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student, Functional Analysis Department, e-mail: khalidtahir89@yahoo.com

Информация для цитирования:

Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т. О разрешимости задачи Коши для нелинейного функционально-дифференциального уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 523–532. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-523-532

Zhukovskaya T.V., Zhukovskiy E.S., Tahir Kh.M.T. O razreshimosti zadachi Koshi dlya nelinejnogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya [About the solvability of the Cauchy problem for nonlinear functional differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 523–532. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-523-532 (In Russian)