УДК 517.911, 517.968
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-517-522

ПРИЛОЖЕНИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЯМ

© **А. А. Григоренко**[1)] , **О. В. Филиппова**[1),2)]

[1)] Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: g.anya@mail.ru, philippova.olga@rambler.ru
[2)] Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: philippova.olga@rambler.ru

В статье получено утверждение об оценке близости решения возмущенного включения к наперед заданной непрерывной функции. Рассмотрено приложение этого утверждения к дифференциальным включениям.
Ключевые слова: возмущенное включение; оценка решений; дифференциальное включение

Пусть X – банахово пространство с нормой $||\cdot||_X$. Обозначим $\mathrm{comp}[X]$ – множество всех непустых компактов пространства пространства X ; $\rho_X[\cdot,\cdot]$ – расстояние от точки до множества; $h_X[\cdot,\cdot]$ – расстояние по Хаусдорфу в между множествами. Пусть $\mathbb{R}^n$ – арифметическое пространство с нормой $|\cdot|$, если $A\subset\mathbb{R}^n$, то $||A||=\sup\{|a|:a\in A\}$. Пусть $\mathcal{U}\subset[a,b]$ – измеримое по Лебегу множество. $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ с нормой

$$||x||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}=\int\limits_{\mathcal{U}}|x(s)|\,ds;$$

$\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ – множество всех непустых, замкнутых, ограниченных, выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$; $\mathbf{C}^n[a,b]$ – пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to\to\mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_{\mathbf{C}^n[a,b]}=\max\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$; $\mathbf{C}^1_+[a,b]$ – конус неотрицательных функций пространства $\mathbf{C}^1[a,b]$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ включение

$$x\in\Psi(x)+V\Phi(x),\tag{1}$$

где $\Psi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ – многозначные операторы, линейный непрерывный интегральный оператор $V:\mathbf{L}^n[a,b]\to\mathbf{C}^n[a,b]$ определен равенством

$$(Vz)\,(t)=\int\limits_a^b V(t,s)z(s)ds,\qquad t\in[a,b].\tag{2}$$

Включение (1) назовем **возмущенным включением.**

Под **решением включения** (1) будем понимать элемент $x\in\mathbf{C}^n[a,b]$, удовлетворяющий (1). Таким образом, непрерывная функция $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ является решением включения (1) тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $v \in \Psi(x)$ и $z \in \Phi(x)$, что справедливо равенство $x = v + Vz$.

Пусть $q_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$ и $w_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$. Представим функцию q_0 в виде

$$q_0 = r_0 + Vw_0 + e, \tag{3}$$

где $e = q_0 - r_0 - Vw_0$. Предположим, что функция $k \in \mathbf{L}^1[a,b]$ для каждого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_0; \Phi(q_0)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} k(s)ds, \tag{4}$$

а непрерывная функция $\nu : [a,b] \to [0,\infty)$ определена соотношением

$$\nu(t) = \int\limits_a^b |V(t,s)| k(s)ds + |e(t)|, \tag{5}$$

где $|V(t,s)|$ – согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n \times n$ матрицы $V(t,s)$ в представлении (2), $e \in \mathbf{C}^n[a,b]$ – функция в правой части равенства (3).

Будем говорить, что отображения $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ **обладают свойством A**, если найдутся непрерывные изотонные операторы $\Gamma : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{L}^1_+[a,b]$ и $P : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие условиям: для любых $x, y \in \mathbf{C}^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняются неравенства

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leqslant \|\Gamma Z(x-y)\|_{\mathbf{L}^1(U)}, \tag{6}$$

$$h_{\mathbf{C}^n[a,b]}[\Psi(x), \Psi(y)] \leqslant P\left(Z(x-y)\right); \tag{7}$$

для функции $\nu \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$, определенной соотношением (5), сходится в пространстве $\mathbf{C}^1[a,b]$ ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \nu,\ \mathcal{A}^0 \nu = \nu,\ \mathcal{A}^i \nu = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{i-1}\nu\right),\ i = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где непрерывный оператор $\mathcal{A} : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$ определен равенством

$$\left(\mathcal{A}z\right)(t) = \int\limits_a^b |V(t,s)| (\Gamma z)(s) ds + P(z), \tag{9}$$

а отображение $Z : \mathbf{C}^n[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$ определено соотношением

$$(Zx)(t) = |x(t)|. \tag{10}$$

Пусть $\xi(\nu)$ – сумма ряда (8), т. е.

$$\xi(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \nu. \tag{11}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $q_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$, $w_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$ *и пусть функция* q_0 *представима равенством* (3). *Далее, пусть отображения* $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to$ $\to \mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством A. Тогда найдется такое решение* x ($x = v + Vz$, $v \in \Psi(x)$, $z \in \Phi(x)$) *включения* (1), *для которого выполняются следующие оценки: при любом* $t \in [a,b]$

$$|x(t) - q_0(t)| \leqslant \xi(\nu)(t); \tag{12}$$

$$\|v - r_0\|_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leqslant P(\xi(\nu)); \tag{13}$$

при почти всех $t \in [a,b]$

$$|z(t) - w_0(t)| \leqslant k(t) + (\Gamma\xi(\nu))(t), \tag{14}$$

где $\nu, \xi(\nu), P, \Gamma, k$ *удовлетворяют соотношениям* (5), (11), (7), (6), (4), *соответственно.*

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что теорема 1 дополняет результат работы [1], в которой получены оценки близости решений к наперед заданной непрерывной функции в случае выпуклозначности отображения $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \operatorname{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$. При этом в [1] доказательство этих оценок основывалось на теореме Майкла. Здесь не предполагается, что отображение $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \operatorname{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$ имеет выпуклые образы. Поэтому применить теорему Майкла для доказательства теоремы невозможно.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что теорема 1 дает несколько больше, чем просто условия существования решения включения (1). Она дает способ нахождения приближенного решения путем подбора функции $q_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$. При этом функция $\xi(\nu)$, зависящая от функций $q_0, r_0 \in \mathbf{C}^n[a,b]$ и $w_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$, дает оценку погрешности приближенного решения (функции q_0) включения (1).

В качестве приложения теоремы 1 рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \ t \in [a,b], \quad x(a) = x_0, \tag{15}$$

где отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ обладает следующими свойствами: для всех $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо [2]; существует такая функция $\beta \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbb{R}^n}[F(t,x), F(t,y)] \leqslant \beta(t)|x - y|; \tag{16}$$

существует такая функция $\gamma \in L^1_+[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ имеет место оценка

$$||F(t,0)|| \leqslant \gamma(t).$$

Под **решением задачи** (15) понимаем абсолютно непрерывную функцию $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, при почти всех $t \in [a,b]$ удовлетворяющую включению (15) и равенству $x(a) = x_0$.

Напомним, что **многозначный оператор Немыцкого** $N : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$, порожденный отображением $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$, определяется равенством

$$N(x) = \{y \in \mathbf{L}^n[a,b] : y(t) \in F(t, x(t)) \text{ при п. в.} \, t \in [a,b]\}.$$

Очевидно, что задача (15) эквивалентна интегральному включению

$$x \in x_0 + \Lambda N(x), \tag{17}$$

где оператор $\Lambda : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ – оператор интегрирования, определенный равенством

$$(\Lambda z)(t) = \int\limits_0^t z(s)\, ds,$$

которое является частным случаем (1). При этом отображение $\widetilde{\Psi} : \mathbf{C}^n[a,b] \to \operatorname{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$ в данном случае определяется равенством

$$\widetilde{\Psi}(x) = x_0.$$

Пусть функция $q_0:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна. В этом случае равенство (3) принимает вид

$$q_0 = x_0 + \Lambda\dot{q}_0 + e,$$

где $e=q_0(a)-x_0$, $\dot{q}_0\in\mathbf{L}^n[a,b]$ – производная функции q_0. Далее, пусть функция $\widetilde{k}\in L^1_+[a,b]$ при почти всех $t\in[a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{\mathbb{R}^n}[\dot{q}_0(t), F(t,q_0(t))] \leqslant \widetilde{k}(t).$$

Отметим, что функция $\widetilde{k}$ удовлетворяет неравенству (4), в котором Φ – оператор Немыцкого $N:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$, порожденный отображением $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. Для рассматриваемого случая непрерывная функция $\nu:[a,b]\to[0,\infty)$ имеет вид

$$\nu(t) = \int\limits_a^t \widetilde{k}(s)\,ds + |q_0(a)-x_0|. \tag{18}$$

Покажем, что отображения $\Lambda:\mathbf{L}^n[a,b]\to\mathbf{C}^n[a,b]$, $\widetilde{\Psi}:\mathbf{C}^n[a,b]\to\mathrm{comp}[\mathbf{C}^n[a,b]]$, $N:\mathbf{C}^n[a,b]\to$ $\to\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ *обладают свойством* A. Действительно, для этих отображений непрерывные изотонные операторы $\Gamma:\mathbf{C}^1_+[a,b]\to\mathbf{L}^1_+[a,b]$ и $P:\mathbf{C}^1_+[a,b]\to\mathbb{R}^1$ определяются равенствами

$$(\Gamma z)(t) = \beta(t)z(t), \quad Pz = 0,$$

где функция $\beta\in\mathbf{L}^1_+[a,b]$ удовлетворяет неравенству (16). Кроме того, для функции ν, определенной равенством (18), сходится ряд (8), в котором оператор $\mathcal{A}:\mathbf{C}^1_+[a,b]\to\mathbf{C}^1_+[a,b]$ задан соотношением

$$(\mathcal{A}z)(t) = \int\limits_a^t \beta(s)z(s)\,ds. \tag{19}$$

Отметим, что сумма ряда (8) в данном случае представляет собой решение уравнения

$$\xi(\nu)(t) = \int\limits_a^t \beta(s)\xi(\nu)(s)\,ds + \nu(t), \tag{20}$$

где функция $\nu\in\mathbf{C}^1_+[a,b]$ удовлетворяет равенству (18). Решение уравнения (20) имеет вид

$$\xi(\nu)(t) = |x_0-q_0(a)|e^{\varphi(t)} + \int\limits_a^t e^{\varphi(t)-\varphi(s)}\widetilde{k}(s)\,ds,$$

где непрерывная функция $\varphi\in\mathbf{C}^1[a,b]$ задается равенством

$$\varphi(t) = \int\limits_a^t \beta(s)\,ds.$$

Таким образом, из теоремы 1 вытекает оценка А.Ф. Филиппова [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Математический сборник. 1998. Т. 189. № 6. С. 3–32.

2. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.

3. *Филиппов А.Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестник МГУ. Серия: Математика и механика. 1967. № 3. С. 16–26.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00553, № 17-41-680975), Минобрнауки России (Соглашение № 02.a03.21.0008) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ, № НШ-8215.2016.1.

Поступила в редакцию 21 апреля 2017 г

Григоренко Анна Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: g.anya@mail.ru

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа; Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

UDC 517.911,517.968
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-517-522

APPLICATION OF THE ESTIMATION OF SOLUTIONS OF PERTURBED INCLUSION TO DIFFERENTIAL INCLUSIONS

© **A. A. Grigorenko**[1] , **O. V. Filippova**[1),2)]

[1)] Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsionalnaya st., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: g.anya@mail.ru, philippova.olga@rambler.ru
[2)] RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: philippova.olga@rambler.ru

In the article, the statement about the estimation of closeness of solutions for perturbed inclusion to a given continuous function is obtained. The application of this statement to differential inclusions is considered.
Key words: perturbed inclusions; estimation of solutions

REFERENCES

1. *Bulgakov A.I., Tkach L.I.* Perturbation of a convex-valued operator map of Hammerstein type with non-convex values, and boundary-value problems for functional-differential inclusions // Sbornik: Mathematics. 1998. V. 189. № 6. P. 3–32.

2. *Ioffe A.D., Tikhomirov V.M.* The theory of extreme problems. M.: Nauka, 1974. 480 p.

3. *Filippov A.F.* Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side // Vestnik MGU. Seriya: Matematika i mekhanika. 1967. № 3. S. 16–26.

ACKNOWLEDGEMENTS: The present research is supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 17-01-00553, № 17-41-680975), by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement number 02.a03.21.0008) and by the grant of the Russian Federation President for the state support of leading scientific schools, No. NSh-8215.2016.1.

Received 21 April 2017

Grigorenko Anna Alexandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: g.anya@mail.ru

Filippova Olga Viktorovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department; RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Информация для цитирования:

Григоренко А.А., Филиппова О.В. Приложение оценки решения возмущенного включения к дифференциальным включениям // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 517–522. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-517-522

Grigorenko A.A., Filippova O.V. Prilozhenie otsenki resheniya vozmushchennogo vklyucheniya k differentsial'nym vklyucheniyam [Application of the estimation of solutions of perturbed inclusion to differential inclusions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 517–522. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-517-522 (In Russian)