УДК 519.715
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-2-439-448

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОГИКИ

© В.И. Левин
Пензенский государственный технологический университет
440039, Российская Федерация, г. Пенза, пр-д Байдукова/ул. Гагарина, 1а/11
E-mail: levin@pgta.ru

Сформулирован класс комбинаторных задач, эквивалентных задаче определения взаиморасположения n последовательностей интервалов. Приведены примеры данного класса задач, относящиеся к области синтеза надежных устройств с помощью резервирования, организации рационального обслуживания клиентов в торговых системах, составления правильного расписания работы диссертационного совета. Дана точная математическая постановка задачи, состоящей из анализа, т. е. собственно определения взаиморасположения последовательностей интервалов, и синтеза, т. е. нахождения условий на расположение последовательностей интервалов, при которых их взаиморасположение имеет требуемый для задачи вид. Введена математическая модель конечного динамического автомата без памяти как логического $(n,1)$-полюсника. Основной задачей для такого автомата является отыскание выходного динамического процесса по известным входным процессам и реализуемой логической (булевой) функции. Дано подробное описание непрерывной логики – математического аппарата, позволяющего находить выходной динамический процесс в автомате. Приведены примеры такого нахождения. Показано, что динамический конечный автомат без памяти является адекватной математической моделью для решения поставленной комбинаторной задачи. При этом исходная комбинаторная задача сводится к задаче нахождения выходного процесса в автомате-модели, исходя из заданных входных процессов и реализуемой логической функции. Приведен 6-шаговый алгоритм решения задачи, а также два примера комбинаторных задач, которые решены с помощью этого алгоритма. Оба примера решены в аналитической форме. Дана оценка сложности вычислений, из которой вытекает, что вычислительная сложность предложенного подхода растет как степенная функция от размерности задачи. Так что подход применим к решению задач высокой размерности. Преимущество подхода и в возможности формально искать алгоритмы решения задач и анализировать решения, находя необходимые и достаточные условия их существования.

Ключевые слова: комбинаторная задача; последовательность интервалов; взаиморасположение интервалов; динамический автомат; динамический процесс; непрерывная логика

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи обработки данных, планирования работ, проектирования систем управления объектами и т. д. сводятся математически к решению комбинаторной задачи – определению взаиморасположения n последовательностей интервалов (временных или пространственных) и нахождению условий, при которых это взаиморасположение имеет тот или иной качественный характер. Приведем несколько примеров таких задач.

1. Пусть имеется последовательность A временных интервалов, в которых некоторое основное техническое устройство работоспособно, и последовательность B временных интервалов, в которых работоспособно резервное устройство. Система «основное и резервное устройства» является работоспособной, если хотя бы одно из двух ее устройств, основное или резервное, работоспособно. Таким образом, для того чтобы установить последовательность интервалов работоспособности всей системы, надо определить взаиморасположение последовательностей интервалов работоспособности основного устройства (последовательность A) и резервного устройства (последовательность B) и определить те промежутки времени, на которых действуют интервалы хотя бы одной из последовательностей – A или B; они и будут интервалами работоспособности системы. А для того чтобы, например, установить, когда система работоспособна на произвольном заданном отрезке времени T, надо найти условия, при которых взаиморасположение последовательностей интервалов A и B таково, что на отрезке T интервалы последовательности B полностью накрывают промежутки между интервалами последовательности A.

2. Рассмотрим последовательность A временных интервалов, в которых некая организация (магазин, банк, ремонтная мастерская и т. д.) выполняет обслуживание клиентов, и последовательность B временных интервалов, в которых некоторый клиент может посетить обслуживающую организацию. Для того чтобы установить последовательность промежутков времени возможного обслуживания клиента, надо определить взаиморасположение последовательностей интервалов A, B и выявить те промежутки времени, на которых действуют интервалы той и другой последовательностей – A и B; они и будут промежутками времени возможного обслуживания клиента. А для того чтобы установить, к примеру, когда организация может

обслужить клиента при его обращении в любой доступный для него момент времени, надо найти условия, когда расположение последовательностей интервалов A и B таково, что интервалы последовательности A накрывают все интервалы последовательности B.

3. Пусть заданы последовательность A временных интервалов, в которых председатель совета может провести его заседание, и последовательности $B_1,\ldots,B_{10}$ временных интервалов, в которых члены совета $1,\ldots,10$ могут участвовать в этом заседании. Заседание совета возможно только при участии в нем председателя и не менее 5 любых членов совета. Для того чтобы установить последовательность промежутков времени, в которых возможно проведение заседания совета, необходимо определить взаиморасположение последовательностей интервалов $A,B_1,\ldots,B_{10}$ и найти те промежутки времени, на которых действуют одновременно интервалы последовательности A и интервалы каких-нибудь 5 или более из 10 последовательностей $B_1,\ldots,B_{10}$; они и будут промежутками времени возможного проведения заседания этого совета. А для того чтобы установить, например, когда проведение заседания совета оказывается возможным на произвольном заданном отрезке времени T, надо найти условия, при которых взаиморасположение последовательностей интервалов $A,B_1,\ldots,B_{10}$ таково, что отрезок T накрывается каким-нибудь интервалом последовательности A и какими-нибудь 5 или более интервалами, взятыми из 5 или более соответствующих последовательностей $B_1,\ldots,B_{10}$.

Задача определения взаиморасположения n последовательностей интервалов, примеры которой приведены выше, является комбинаторной задачей. При решении комбинаторных задач данного типа можно использовать различные переборные методы. Однако большие недостатки этих методов (быстрый рост сложности вычислений при увеличении размеров задачи; неаналитический (поисковый) характер алгоритма решения; невозможность обозримого представления алгоритма в случае высокоразмерной задачи) заставляют искать другие пути решения данной задачи. Возможный подход заключается в том, чтобы найти для этой задачи готовую адекватную математическую модель, которая глубоко и детально разработана на базе какого-нибудь удобного аналитического аппарата. В настоящей статье показано, что такой моделью может служить динамический конечный автомат [1–4], а таким аппаратом – непрерывная (бесконечнозначная) логика [1–2; 5–6].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая постановка решаемой задачи может быть описана следующим образом. Задано n конечных последовательностей непересекающихся интервалов.

$$\begin{array}{l} A_1 = (a_{11},b_{11}),\ (a_{12},b_{12}),\ldots,(a_{1m_1},b_{1m_1}); \\ A_2 = (a_{21},b_{21}),(a_{22},b_{22}),\ldots,(a_{2m_2},b_{2m_2}); \\ ----------------- \\ A_n = (a_{n1},b_{n1}),(a_{n2},b_{n2}),\ldots,(a_{nm_n},b_{nm_n}). \end{array} \qquad (1)$$

Требуется: 1) определить взаиморасположение имеющейся системы последовательностей интервалов (1); 2) найти условия, при которых это взаиморасположение имеет тот или иной качественный характер. Сформулированные две задачи различаются тем, что первая из них нацелена на то, чтобы по заданному положению всех интервалов всех последовательностей (1) определить взаиморасположение любых комбинаций (по две, по три и т. д.) любых подпоследовательностей последовательностей (1), в то время как вторая имеет целью найти условия, накладываемые на расположение всех интервалов всех подпоследовательностей (1), при которых это взаиморасположение имеет тот или иной требуемый вид. Таким образом, задача 1 является задачей анализа системы последовательностей интервалов (1), а задача 2 – задачей синтеза этой системы. Задачи анализа и синтеза системы последовательностей интервалов вида (1) мы будем решать, используя адекватную системе (1) математическую модель конечного динамического автомата без памяти и математический аппарат непрерывной логики, необходимый для адекватного описания указанного автомата. Решение предлагается получать в аналитической форме суперпозиции непрерывно-логических операций, которая одновременно дает логический алгоритм получения численного решения.

Заметим, что аппарат непрерывной логики перекликается с аппаратом нечеткой логики, введенным в свое время для описания операций над нечеткими множествами [7], когда каждой теоретико-множественной операции ставится во взаимно-однозначное соответствие некоторая логическая операция (объединению – дизъюнкция, пересечению – конъюнкция, дополнению – отрицание) над мерами принадлежности элемента множествам-операндам. Поскольку мера принадлежности элемента множеству всегда заключена на отрезке $[0,1]$, все операции нечеткой логики определяются также на этом отрезке. Для непрерывной логики такое ограничение не требуется, поэтому непрерывно-логические операции определяются на произвольном отрезке $[A,B]$, где A, B – любые вещественные числа, удовлетворяющие $A<B$. Это свободное определение носителя алгебры непрерывной логики имеет решающее прикладное значение, в частности, для теории динамических автоматов, где динамические процессы рассматриваются на отрезке времени $[0,\infty)$. Именно такая форма непрерывной логики позволила построить на ее основании аналитическую теорию динамических автоматов [1–4], которая оказалась адекватной математической моделью для решения поставленной выше задачи.

Еще один кажущийся пригодным подход к решению поставленной задачи – это использование временных логик [8–9]. Всякая временная логика базируется на основных отношениях между событиями во времени (пересекаться, примыкать, быть позже и т. д.), дополненных в случае метрических шкал информацией о длительности событий и их положении на шкале. Задача временной логики – анализ текстов на естественном языке для установления временных отношений между отдельными событиями, описанными в тексте. При этом часть из отношений устанавливаются путем непосредственного смыслового анализа текста, а другая часть – путем логического вывода из уже установленных первичных отношений с помощью эвристически формулируемых правил такого вывода. Результатом анализа являются сугубо качественные и вдобавок неточные (из-за использования эвристики) временные отношения между событиями, типа «событие A произошло значительно раньше события B» либо временная идентификация событий, типа «событие A произошло очень давно». Однако сформулированная выше задача анализа системы последовательностей интервалов (1) является количественной задачей, предполагающей точное математическое (аналитическое) решение. Поэтому применять для ее решения временные логики невозможно. Что же касается второй сформулированной выше задачи – синтеза системы последовательностей интервалов (1) с нужными временными свойствами, то такая задача, хотя бы и в качественной и неточной постановке, в рамках временных логик вообще не рассматривается.

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ И НЕПРЕРЫВНАЯ ЛОГИКА

Известно, что динамический конечный автомат без памяти [1–2; 4] представляет собой модель в виде $(n,1)$-полюсника, реализующего на выходе y некоторую булеву логическую функцию входов $x_1,\ldots,x_n$.

$$y = f(x_1,\ldots,x_n), \quad x_1,\ldots,x_n, \quad y \in \{0,1\}\,. \tag{2}$$

На n входов динамического автомата (ДА) (см. рис. 1) подаются входные двоичные динамические процессы

$$\begin{aligned} &x_1(t) = 1(a_{11},b_{11})0(–,–)1(a_{12},b_{12})\ldots 1(a_{1m_1},b_{1m_1});\\ &-----------------------------\\ &x_n(t) = 1(a_{n1},b_{n1})0(–,–)1(a_{n2},b_{n2})\ldots 1(a_{nm_n},b_{nm_n}), \end{aligned} \tag{3}$$

где $1(a,b)$ означают интервалы времени единичных значений процесса (импульсы), а $0(–,–)$ – промежуточные интервалы нулевых значений процесса (т. е. паузы). С выхода динамического автомата (рис. 1) снимается выходной двоичный динамический процесс

$$y(t) = 1(c_1,d_1)0(–,–)1(c_2,d_2)\ldots 1(c_m,d_m)\,, \tag{4}$$

который соответствует поданным входным процессам (3) ДА и реализуемой булевой логической функции (2). Основной задачей для ДА без памяти является задача отыскания выходного динамического процесса $y(t)$ по известным входным динамическим процессам $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ и реализуемой булевой логической функции f . В 1971–1972 гг. автором было установлено, что эта задача может быть решена в аналитической форме для любого ДА без памяти, имеющего любое число входов, входные процессы и реализуемую функцию, с помощью математического аппарата непрерывной (бесконечнозначной) логики [1–2; 4–5]. Определяется непрерывная логика (НЛ) следующим образом. Пусть несущее множество $C = [A, B]$ – произвольный отрезок на оси вещественных чисел. Тогда для любых

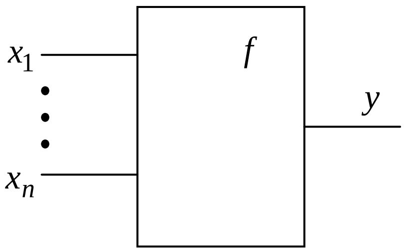

Рис. 1. Математическая модель конечного ДА без памяти

чисел $a,b,e \in C$ можно ввести следующие логические операции:

$$a \vee b = \max(a,b) \ \text{– дизъюнкция,} \tag{5}$$

$$a \wedge b = \min(a,b) \ \text{– конъюнкция,} \tag{6}$$

$$\bar{e} = A + B - e \ \text{– отрицание.} \tag{7}$$

Операции непрерывной логики (5)–(7) подобны соответствующим операциям двузначной (булевой) логики с несущим множеством $C = \{0,1\}$ и обобщают эти операции на случай непрерывного несущего множества. В НЛ сохраняют силу некоторые законы двузначной логики

$$a \vee a = a, \ a \wedge a = a \ \text{– тавтологии;} \tag{8}$$

$$a \vee b = b \vee a, \ a \wedge b = b \wedge a \ \text{– переместительный;} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),\\ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)\end{aligned}\right. \ \text{– сочетательный;} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),\\ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)\end{aligned}\right. \ \text{– распределительный;} \tag{11}$$

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}, \ \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b} \ \text{– де Моргана;} \tag{12}$$

$$a \vee (a \wedge b) = a, \ a \wedge (a \vee b) = a \ \text{– поглощения.} \tag{13}$$

Кроме них в НЛ действуют некоторые важные специфические законы, например, законы оценки и упрощения логического выражения:

$$a \vee b \ge a, b; \quad a \wedge b \le a, b\,, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_i \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_m =\\ &= a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_m \ \text{ при } a_i \le a_k \ (k \ne i), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_i \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_m =\\ &= a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_m \ \text{ при } a_i \ge a_k \ (k \ne i). \end{aligned} \tag{16}$$

Идея отыскания выходного процесса ДА без памяти по его заданным входным процессам и реализуемой логической функции проста и будет рассмотрена ниже. Обозначим: 1 – двоичный динамический процесс, принимающий постоянное значение 1; 0 – двоичный динамический процесс, принимающий постоянное значение 0; символ $1'$ – изменение значения двоичного динамического процесса $0 \to 1$; $0'$ – изменение значения двоичного динамического процесса $1 \to 0$; $1'_a$ – изменение $1'$ в момент времени a ; $0'_b$ – изменение $0'$ в момент времени b; $1'_a 0'_b$ – импульс $1(a,b)$ в интервале времени (a,b); $0'_a 1'_b$ – пауза $0(a,b)$ в интервале времени (a,b). Любой двоичный динамический процесс можно записать в виде последовательности импульсов и пауз (3) либо последовательности изменений значения процесса. Например, процесс, изображенный на рис. 2, можно записать в виде

$$x(t) = 1(-\infty, a)0(-,-)1(b,e)0(-,\infty)$$
$$\text{или} \quad x(t) = 0'_a 1'_b 0'_e.$$

Число изменений значения двоичного процесса называется его глубиной. Например, глубина процесса на рис. 2 равна 3. Для системы (вектора) двоичных процессов соответствующим понятием является векторная глубина. Например, векторная глубина системы двух процессов $x_1(t) = 1(a,b),\ x_2(t) = 1(c,d)$ равна $(2,2)$.

Покажем на примерах, как с помощью непрерывной логики определить выходной процесс ДА без памяти по его входным процессам и реализуемой логической функции. Ограничимся простейшими автоматами – двухвходовыми дизъюнкторами и конъюнкторами, реализующими булевы логические функции дизъюнкция $\vee$ и конъюнкция $\wedge$:

$$y = x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 0 \text{ при } x_1 = x_2 = 0; \\ 1, \text{ в иных случаях}; \end{cases}$$
$$y = x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1 \text{ при } x_1 = x_2 = 1; \\ 0, \text{ в иных случаях}, \end{cases} \tag{17}$$

и простыми входными процессами с глубиной не свыше 1. Пусть, например, надо найти выходной процесс конъюнктора на входные процессы $x_1(t) = 1'_a,\ x_2(t) = 0'_b$. Этот процесс равен одиночному импульсу $1(a,b)$ или тождественному нулю, в зависимости от того, что больше: b или a. Поэтому, интерпретируя тождественный нуль как одиночный импульс с совмещенными началом и концом, запишем искомый процесс как

$$y(t) = x_1(t) \wedge x_2(t) = 1'_a \wedge 0'_b =$$
$$= \begin{cases} 1(a,b) & \text{при } b > a; \\ 0 = 1(a,a) & \text{при } b \le a. \end{cases} \tag{18}$$

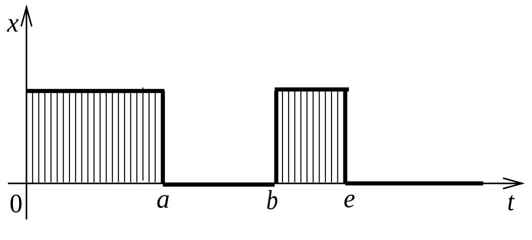

Рис. 2. Выходной процесс ДА без памяти

Отсюда при помощи операции дизъюнкции непрерывной логики $\vee$ находим окончательно

$$1'_a \wedge 0'_b = 1(a,\ a \vee b). \tag{19}$$

Выходные процессы в дизъюнкторе и конъюнкторе при всех остальных входных процессах с глубиной не свыше 1 даются аналогично:

$$\begin{aligned} &0 \wedge 0'_a = 0 \wedge 1'_b = 0;\ 1 \wedge x'_a = x'_a; \\ &0'_a \wedge 0'_b = 0'_{a \wedge b};\ 1'_a \wedge 1'_b = 1'_{a \vee b}; \\ &1'_a \wedge 0'_b = 1(a,\ a \vee b); 1 \vee 0'_a = 1 \vee 1'_b = 1; \\ &0 \vee x'_a = x'_a;\ 0'_a \vee 0'_b = 0'_{a \vee b}; \\ &1'_a \vee 1'_b = 1'_{a \wedge b};\ 1'_a \vee 0'_b = 0(b,\ a \vee b). \end{aligned} \tag{20}$$

Формулы (20) наглядно демонстрируют удобство и адекватность аппарата НЛ как средства отыскания выходных процессов ДА без памяти по их входным процессам и реализуемой логической функции.

Если входные процессы дизъюнктора или конъюнктора имеют кратность свыше 1, то отыскание их выходных процессов требует применения формальных методов. Основные из них – прямой метод, метод декомпозиции и метод инверсии. Прямой метод основан на полном переборе всех случаев взаимного расположения входных процессов элемента. Для каждого случая выходной процесс элемента записывается в явном виде отдельно. Общее выражение этого процесса получают из частных с использованием НЛ. Метод декомпозиции состоит в том, что один из двух входных процессов элемента $x_1(t)$ и $x_2(t)$, например, $x_1(t)$ разбивается на два последовательных подпроцесса $x_{11}(t)$ и $x_{12}(t)$. Затем ищут составляющие выходные процессы $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – реакции нашего элемента на составляющие входные процессы $\{x_{11}(t), x_2(t)\}$ и $\{x_{12}(t), x_2(t)\}$. В случае, если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ не пересекаются во времени участками, содержащими все изменения значения процесса, то искомый выходной процесс $y(t)$ определяют как последовательность процессов $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Метод инверсии основан на формулах

$$\overline{x_1(t) \vee x_2(t)} = \overline{x_1(t)} \wedge \overline{x_2(t)},$$
$$\overline{x_1(t) \wedge x_2(t)} = \overline{x_1(t)} \vee \overline{x_2(t)}, \tag{21}$$

вытекающих из закона де Моргана булевой логики и позволяющих по уже известной реакции дизъюнктора (конъюнктора) на входные процессы $x_1(t), x_2(t)$ легко определить реакцию конъюнктора (дизъюнктора) на входные процессы $\overline{x_1(t)}, \overline{x_2(t)}$. Используя эти методы, нетрудно получить формулы для выходных процессов дизъюнктора и конъюнктора при различных входных процессах с глубиной $(1,2)$:

$$
\begin{aligned}
&0'_a \vee 1(b,c) = 0(a,\ a\vee b)1(-,\ a\vee c);\\
&1'_a \vee 1(b,c) = 1(a\wedge b,\ c)0(-,a\vee c);\\
&0'_a \vee 0(b,c) = 0(a\vee b,\ a\vee c);\\
&1'_a \vee 0(b,c) = 0(a\wedge b,\ a\wedge c);\\
&0'_a \wedge 1(b,c) = 1(a\wedge b,\ a\wedge c);\\
&1'_a \wedge 1(b,c) = 1(a\vee b,\ a\vee c);\\
&0'_a \wedge 0(b,c) = 0(a\wedge b,c)1(-,a\vee c);\\
&1'_a \wedge 0(b,c) = 1(a,\ a\vee b)0(-,\ a\vee c);
\end{aligned} \quad (22)
$$

входных процессах с глубиной $(2,2)$:

$$
\begin{aligned}
&1(a,b)\vee 1(c,d) = 1[a\wedge c,\ (a\wedge d)\vee(b\wedge c)]0(-,-)1(a\vee c,\ b\vee d);\\
&1(a,b)\wedge 1(c,d) = 1[a\vee c,\ a\vee c\vee(b\wedge d)];\\
&0(a,b)\vee 0(c,d) = 0[(a\wedge d)\vee(b\wedge c),\ b\wedge d];\\
&0(a,b)\wedge 0(c,d) = 0[a\wedge c,(a\wedge d)\vee(b\wedge c)]1(-,a\vee c)0(-,\ b\vee d);\\
&0(a,b)\vee 1(c,d) = 0(a\wedge c,\ b\wedge c)1(-,a\vee d)0(-,b\vee d);\\
&0(a,b)\wedge 1(c,d) = 1(a\wedge c,\ a\wedge d)0(-,b\vee c)1(-,b\vee d)
\end{aligned} \quad (23)
$$

и т. д. Аналогично находятся непрерывно-логические выражения выходных процессов многовходовых дизъюнкторов и конъюнкторов, реализующих многоместные булевы дизъюнкцию и конъюнкцию, аналогичные их двуместным прототипам (17), например

$$
\begin{aligned}
&0'_a \wedge 0'_b \wedge \ldots \wedge 0'_d = 0'_{a\wedge b\wedge\ldots\wedge d};\\
&1'_a \wedge 1'_b \wedge \ldots \wedge 1'_d = 1'_{a\vee b\vee\ldots\vee d};\\
&1'_a \wedge 1'_b \wedge \ldots \wedge 1'_d \wedge 0'_e \wedge 0'_g \wedge \ldots \wedge 0'_f =\\
&= 1[a\vee b\vee\ldots\vee d;\ a\vee b\vee\ldots\vee d\vee(e\wedge g\wedge\ldots\wedge f)];\\
&0'_a \vee 0'_b \vee \ldots \vee 0'_d = 0'_{a\vee b\vee\ldots\vee d};\\
&1'_a \vee 1'_b \vee \ldots \vee 1'_d = 1'_{a\wedge b\wedge\ldots\wedge d};\\
&1'_a \vee 1'_b \vee \ldots \vee 1'_d \vee 0'_e \vee 0'_g \vee \ldots \vee 0'_f =\\
&= 0[e\vee g\vee\ldots\vee f;\ e\vee g\vee\ldots\vee f\vee(a\wedge b\wedge\ldots\wedge d)].
\end{aligned} \quad (24)
$$

3. ИДЕЯ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Пусть интервалы в системе последовательностей интервалов (1) интерпретируются как временные интервалы. Тогда системе (1) можно установить во взаимно однозначное соответствие некоторую совокупность динамических процессов $x_i(t)$ (3). Именно, i-й процесс этой совокупности соответствует i-й последовательности системы $(i=\overline{1,n})$, причем k-й импульс процесса соответствует k-му интервалу последовательности $(k=\overline{1,m_i})$. Другими словами, двоичная переменная $x_i\,(i=\overline{1,n})$ есть индикатор присутствия какого-то интервала i-й последовательности интервалов (1): $x_i=1$ означает присутствие, $x_i=0$ – отсутствие интервала. Теперь подадим определенную описанным выше образом совокупность двоичных динамических процессов $x_i(t)$ (3) на входы $x_1,\ldots,x_n$ ДА без памяти рис. 1, который реализует некоторую выбранную нами булеву логическую функцию входов $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ вида (2). Тогда ДА выдаст на выходе y некоторый двоичный динамический процесс $y(t)$ (4). Что же характеризует этот процесс? Как известно, любая булева логическая функция определяется заданным множеством единичных наборов значений аргументов, на которых эта функция принимает значение 1. Выбранная нами определенная булева логическая функция f, предназначенная для реализации в ДА без памяти рис. 1, заставляет этот ДА вырабатывать на выходе определенный двоичный динамический процесс $y(t)$ вида (4), импульсы которого соответствуют интервалам времени, где входные процессы $x_i(t)$ (3) ДА принимают набор значений, совпадающий с одним из единичных наборов функции f. Последнее означает, что при подаче на входы автомата без памяти совокупности процессов $x_i(t)$ (3), взаимно-однозначно соответствующих системе последовательностей интервалов (1), выбор для реализации в этом ДА некоторой булевой логической функции $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ означает выбор соответствующего частного показателя взаиморасположения системы последовательностей интервалов (1), а реализуемый на выходе ДА процесс $y(t)$ (4) – числовое значение этого показателя. Например, если в качестве функции f выбрана многоместная булева конъюнкция, это означает выбор показателя взаиморасположения системы последовательностей интервалов (1) в виде выделения случаев, когда интервалы всех n последовательностей (1) пересекаются (у конъюнкции есть только один единичный набор $(1,1,\ldots,1)$). При этом числовое значение данного показателя имеет вид двоичного процесса $y(t)$ (4), импульсы которого соответствуют тем отрезкам времени, на которых пересекаются интервалы всех n последовательностей (1).

Итак, в качестве адекватной математической модели для решения задачи анализа системы последовательностей интервалов (1) можно выбрать ДА без памяти рис. 1. Входными двоичными динамическими процессами этого динамического автомата является совокупность процессов (3), взаимно-однозначно соответствующая системе последовательностей интервалов (1), т. е. совокупность процессов, моделирующая эту систему. ДА реализует некоторую, выбранную нами булеву логическую функцию $y=f(x_1,\ldots,x_n)$, являющуюся некоторым частным показателем взаиморасположения системы последовательностей интервалов. Тогда на выходе ДА вырабатывается двоичный динамический процесс $y(t)$ (4), дающий числовое значение выбранного частного показателя взаиморасположения интервалов (более точно, выделяющий отрезки времени, где интервалы системы (1) находятся в данном взаиморасположении). То есть выходной процесс (4) ДА-модели рис. 1 моделирует числовое значение того или иного частного показателя взаиморасположения системы последовательностей интервалов (1), соответствующего выбранной логической функции f, реализуемой ДА.

Алгоритм решения задачи анализа имеющейся системы последовательностей интервалов (1), в соответствии с изложенной идеей, выглядит следующим образом.

Шаг 1. Выбирается некоторый частный показатель Π, характеризующий взаиморасположение интервалов системы (1) (если показатель Π уже задан условиями задачи, шаг 1 опускается).

Шаг 2. Строится булева логическая функция $y = f(x_1,\ldots,x_n)$, соответствующая показателю Π.

Шаг 3. Строится математическая модель задачи – схема ДА без памяти (рис. 1), реализующая функцию f и получающая на своих входах двоичные динамические процессы $x_i(t)$ вида (3), совокупность которых взаимно-однозначно соответствует заданной системе последовательностей интервалов (1). Выходной двоичный процесс ДА $y(t)$ (4) моделирует показатель взаиморасположения системы интервалов (1), а именно, выделяет те периоды времени, где интервалы системы находятся в данном взаиморасположении.

Шаг 4. Методами теории динамических автоматов [1–4] по входным процессам ДА-модели $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ и его реализуемой функции f определяется его выходной процесс $y(t)$ (4). Параметры (моменты изменения значений) этого процесса выражаются через аналогичные параметры входных процессов ДА в аналитической форме с помощью дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$ НЛ.

Шаг 5. Развернув найденные на шаге 4 аналитические выражения параметров выходного процесса автомата-модели $y(t)$, получаем алгоритмы вычисления этих параметров в терминах операций НЛ $\vee$, $\wedge$.

Шаг 6. Вычислив параметры выходного процесса ДА-модели $y(t)$ по алгоритмам, найденным на шаге 5, получаем числовое значение этого процесса, являющееся числовым значением выбранного частного показателя Π (или f) взаиморасположения системы последовательностей интервалов нашей системы.

Конец алгоритма.

Заметим, что в общем случае решение задачи анализа имеющейся системы последовательностей интервалов (1) может потребовать использования не одного, а нескольких частных показателей взаиморасположения интервалов системы (1). В этом случае получается общая задача анализа, распадающаяся на несколько частных задач, соответствующих данным частным показателям. Для решения общей задачи анализа следует решить с помощью описанного алгоритма все частные задачи и объединить полученные решения.

Алгоритм решения задачи синтеза системы последовательностей интервалов (1), соответствующей заданным требованиям к взаиморасположению интервалов, строится на базе описанного выше алгоритма решения задачи анализа системы (1) и состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Решение частичной задачи анализа (путем выполнения шагов 1–4 алгоритма анализа) для подлежащей синтезу системы последовательностей интервалов (1) в предположении, что задан показатель взаиморасположения интервалов, а все параметры системы (1) (координаты начала и конца всех интервалов) заданы в символьной форме. В результате получается двоичный процесс $y(t)$, моделирующий заданный показатель взаиморасположения интервалов (1) (точнее, содержащий те импульсы-периоды, где интервалы находятся в указанном взаиморасположении).

Шаг 2. Составление системы уравнений и неравенств, выражающих в математической форме заданные требования к взаиморасположению интервалов (1). Эта система получается путем выписывания требуемых соотношений $(>, =)$ между координатами начала и конца соответствующих импульсов процесса $y(t)$. Так как эти координаты выражаются через параметры интервалов (1) с помощью операций НЛ, данная система есть система уравнений и неравенств НЛ.

Шаг 3. Решение системы уравнений и неравенств НЛ, полученной на шаге 2, с помощью специальных методов [1–2; 5–6], основанных на принципе последовательного расчленения отдельного уравнения (неравенства) НЛ на несколько более простых уравнений (неравенств). В результате решения указанной системы уравнений (неравенств) НЛ получаются условия на параметры отдельных интервалов (1), при соблюдении которых взаиморасположение указанных интервалов отвечает заданным требованиям.

Конец алгоритма.

Подчеркнем, что предложенные решения задач анализа и синтеза системы последовательностей интервалов в итоге получаются в аналитической форме, в терминах суперпозиции операций НЛ $\vee$ (дизъюнкция) и $\wedge$ (конъюнкция).

4. ПРИМЕРЫ И ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Пример 1. Магазин открыт в течение дня с a_{11} до b_{11} и с a_{12} до b_{12} ч., где $b_{11} < a_{12}$. Двое работающих приятелей собираются вместе посетить этот магазин. Первый из них свободен и может это сделать в промежутке времени с a_{21} до b_{21} ч., второй – в промежутке с a_{31} до b_{31} ч. Требуется определить периоды времени, в каждом из которых приятели могут реализовать свой план посещения магазина, и установить, при каких условиях это посещение возможно, т. е. указанные периоды существуют (не вырождены).

Итак, приятели могут реализовать свой план посещения магазина в те и только те периоды времени, когда магазин открыт, а оба они свободны. Следовательно, для ответа на первый поставленный вопрос надо решить задачу анализа системы последовательностей интервалов

$$A_1 = (a_{11}, b_{11}), (a_{12}, b_{12});$$
$$A_2 = (a_{21}, b_{21}); \;\; A_3 = (a_{31}, b_{31}),$$

т. е. определить нужное взаиморасположение интервалов этой системы. Конкретно, нас интересуют периоды времени, в которых взаиморасположение таково, что присутствуют интервалы всех последовательностей: A_1, A_2, A_3. Для решения задачи применим алгоритм анализа п. 3.

Шаг 1. Показатель Π, характеризующий нужное взаиморасположение интервалов системы A_1, A_2, A_3, содержательно уже задан условиями исходной задачи.

Шаг 2. Булева логическая функция $y = f(x_1, x_2, x_3)$, соответствующая показателю Π, есть трехместная конъюнкция $y = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$.

Шаг 3. Математическая модель задачи – ДА без памяти с 3 входами и 1 выходом, реализующий на выходе указанную функцию f своих входов (рис. 3). На входы ДА-модели поступают процессы

$$x_1(t) = 1(a_{11}, b_{11})0(-,-)1(a_{12}, b_{12}),$$
$$x_2(t) = 1(a_{21}, b_{21}),\ \ x_3(t) = 1(a_{31}, b_{31}),$$

которые взаимно-однозначно соответствуют заданной системе интервалов (A_1, A_2, A_3). С выхода ДА снимается процесс $y(t)$ (4), моделирующий показатель Π взаиморасположения системы интервалов (A_1, A_2, A_3).

Шаг 4. По входным процессам $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ ДА-модели и его реализуемой функции $f = \wedge$ находим его выходной процесс $y(t)$ [1–2; 4], используя готовую формулу $1(a,b) \wedge 1(c,d) = 1[a \vee c,\ a \vee c \vee (b \wedge d)]$:

$$\begin{aligned}
y(t) &= x_1(t) \wedge x_2(t) \wedge x_3(t) = x_1(t) \wedge [x_2(t) \wedge x_3(t)] = \\
&= [1(a_{11}, b_{11})0(-,-)1(a_{12}, b_{12})] \wedge [1(a_{21}, b_{21}) \wedge 1(a_{31}, b_{31})] = \\
&= [1(a_{11}, b_{11})0(-,-)1(a_{12}, b_{12})] \wedge \\
&\wedge 1[a_{21} \vee a_{31},\ a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31})] = \\
&= \{1(a_{11}, b_{11}) \wedge 1[\cdot]\}0(-,-)\{1(a_{12}, b_{12}) \wedge 1[\cdot]\} = \\
&= 1\{a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31},\ a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31} \vee \\
&\vee [b_{11} \wedge (a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31}))]\}0(-,-)1\{a_{12} \vee \\
&\vee a_{21} \vee a_{31},\ a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31} \vee \\
&\vee [b_{12} \wedge (a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31}))]\}.
\end{aligned}$$

Шаг 5. Найденные на шаге 4 аналитические выражения параметров A, B, C, D выходного процесса $y(t) = 1(A,B)0(-,-)1(C,D)$ динамического автомата-модели дают алгоритмы вычисления этого процесса в терминах операций непрерывной логики (НЛ) $\vee(\max)$ и $\wedge(\min)$. Так, например, $A = \max(a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $B = \max(A, \min(b_{11}, \max(a_{21}, a_{31}, \min(b_{21}, b_{31}))))$ и т. д.

Шаг 6. По алгоритмам, найденным на шаге 5, вычисляем параметры выходного процесса $y(t)$ ДА-модели, соответствующие конкретным значениям параметров a_{ij}, b_{ij} входных процессов $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$. Например, при $a_{11} = 9$, $a_{12} = 14,\ b_{11} = 13,\ b_{12} = 20,$ $a_{21} = 12,\ b_{21} = 16,\ a_{31} = 11,\ b_{31} = 15$ находим $A = 12,$ $B = 13,\ \ C = 14,\ \ \ D = 15$. Таким образом, есть два периода времени, когда приятели могут вместе посетить магазин: $(12, 13)$ и $(14, 15)$.

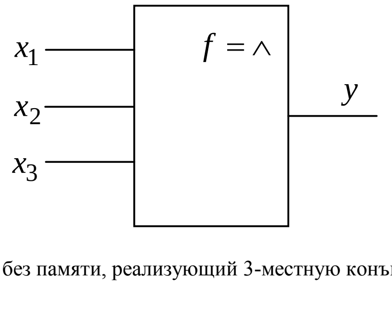

Рис. 3. ДА без памяти, реализующий 3-местную конъюнкцию

Для того чтобы установить, при каких общих условиях возможно совместное посещение магазина двумя приятелями, надо определить, когда существуют (не выраждены) найденные выше периоды времени, в которых приятели могут совместно посетить магазин. Таким образом, для ответа на второй поставленный вопрос надо решить задачу синтеза системы последовательностей интервалов (A_1, A_2, A_3), т. е. найти условия, при которых взаиморасположение интервалов этой системы имеет нужный качественный характер, благодаря чему и обеспечивается существование указанных периодов времени. Для решения данной задачи применим алгоритм синтеза п. 3.

Шаг 1. Уже выполнен и содержится в шагах 1–4 алгоритма анализа системы (A_1, A_2, A_3), выполненных выше.

Шаг 2. Систему уравнений и неравенств НЛ, выражающих требования к взаиморасположению интервалов системы (A_1, A_2, A_3), обеспечивающих существование нужных периодов времени, получаем, потребовав, чтобы найденный в процессе анализа системы (A_1, A_2, A_3) выходной процесс $y(t) = 1(A,B)0(-,-)1(C,D)$ автомата-модели, моделирующий заданный показатель взаиморасположения интервалов, имел невырожденные импульсы, моделирующие нужные нам периоды времени:

$$B > A \quad \text{или} \quad D > C\,.$$

Подставив сюда выражения для A, B, C, D из развернутого выражения процесса $y(t)$, приведенного выше, получим условие

$$\begin{aligned}
&a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31} \vee [b_{11} \wedge (a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31}))] > \\
&> a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31} \quad \text{или} \\
&a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31} \vee [b_{12} \wedge (a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31}))] > \\
&> a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31}.
\end{aligned}$$

Шаг 3. Решение полученной на шаге 2 системы неравенств НЛ будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned}
&b_{11} \wedge [a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31})] > a_{11} \vee a_{21} \vee a_{31} \quad \text{или} \\
&b_{12} \wedge [a_{21} \vee a_{31} \vee (b_{21} \wedge b_{31})] > a_{12} \vee a_{21} \vee a_{31}.
\end{aligned}$$

Итак, взаиморасположение интервалов системы (A_1, A_2, A_3), отвечающее хотя бы одному из двух выписанных неравенств, обеспечивает существование периодов времени, в которых приятели могут вместе посетить магазин. Еще раз обратим внимание, что обе части выписанных неравенств (условий) представляют собой аналитические выражения, полученные из параметров интервалов системы (A_1, A_2, A_3) с помощью операций НЛ – дизъюнкции $\vee$ и конъюнкции $\wedge$.

Пример 2. Усложним пример 1, приняв, что число приятелей, собравшихся вместе посетить магазин, равно $n-1$, первый из них может это сделать в промежутке времени с a_{21} до b_{21}, второй – в промежутке времени с a_{31} до b_{31}, ..., $(n-1)$-й – в промежутке с a_{n1} до b_{n1}. Следовательно, теперь для определения периодов времени, в каждом из которых приятели могут посетить магазин, надо решить задачу анализа системы последовательностей интервалов

$$\begin{aligned}
&A_1 = (a_{11}, b_{11}), (a_{12}, b_{12});\\
&A_2 = (a_{21}, b_{21});\\
&A_3 = (a_{31}, b_{31});\\
&\ldots;\\
&A_n = (a_{n1}, b_{n1}),
\end{aligned}$$

найдя те периоды, в которых присутствуют интервалы всех последовательностей $A_1, A_2, ..., A_n$. Опять применим алгоритм анализа п. 3.

Шаг 1. Показатель Π, определяющий нужное взаиморасположение интервалов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, задан условиями задачи.

Шаг 2. Соответствующая Π реализуемая булева функция f в нашем случае – n-местная конъюнкция

$$y = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i .$$

Шаг 3. Математическая модель задачи – динамический автомат без памяти с n входами и одним выходом, где реализуется функция f, а на входы ДА поступают процессы, соответствующие системе $A_1, \ldots, A_n$:

$$\begin{aligned}
&x_1(t) = 1(a_{11}, b_{11})0(-,-)1(a_{12}, b_{12});\\
&x_2(t) = 1(a_{21}, b_{21});\\
&x_3(t) = 1(a_{31}, b_{31});\\
&\ldots,\\
&x_n(t) = 1(a_{n1}, b_{n1}).
\end{aligned}$$

Выходной процесс $y(t)$ вида (4) моделирует показатель Π взаиморасположения интервалов $A_1, \ldots, A_n$.

Шаг 4. По входным процессам $x_1(t), ..., x_n(t)$ ДА-модели и его функции $f = \wedge$ находим выходной процесс $y(t)$ [1–2; 4], используя готовую формулу

$$\bigwedge_{i=1}^{N} 1(a_i, b_i) = \ = 1\left[\bigvee_{i=1}^{N} a_i, \bigvee_{i=1}^{N} a_i \vee \left(\bigwedge_{i=1}^{N} b_i\right)\right]:$$

$$y(t) = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i(t) = x_1(t) \wedge \left[\bigwedge_{i=2}^{n} x_i(t)\right] =$$

$$= [1(a_{11}, b_{11})0(-,-)1(a_{12}, b_{12})] \wedge \left[\bigwedge_{i=2}^{n} 1(a_{i1}, b_{i1})\right],$$

и после действий, аналогичных проделанным на шаге 4 примера 1, находим окончательно

$$y(t) = 1\left\{a_{11} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1},\ a_{11} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left[b_{11} \wedge \left(\bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left(\bigwedge_{i=2}^{n} b_{i1}\right)\right)\right]\right\} \times$$

$$\times 0(-,-)1\left\{a_{12} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1},\right.$$

$$\left. a_{12} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left[b_{12} \wedge \left(\bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left(\bigwedge_{i=2}^{n} b_{i1}\right)\right)\right]\right\}.$$

Шаг 5. Найденные на шаге 4 выражения параметров A, B, C, D выходного процесса $y(t) = = 1(A, B)0(-,-)1(C, D)$ автомата-модели дают, как и в примере 1, алгоритмы вычисления этого процесса в терминах операций НЛ $\vee(\max)$ и $\wedge(\min)$.

Шаг 6. По алгоритмам, найденным на шаге 5, вычисляем параметры выходного процесса $y(t)$ ДА-модели при конкретных значениях параметров входных процессов $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ и находим периоды времени (A, B) и (C, D), в которых $n-1$ приятелей могут посетить магазин.

Конец алгоритма.

Для нахождения общих условий, при которых возможно совместное посещение магазина $n-1$ приятелями, определим, когда существуют (не вырождены) найденные выше периоды времени, в которых приятели могут совместно посетить магазин. Для этого надо решить задачу синтеза системы последовательностей интервалов $(A_1, A_2, ..., A_n)$, определяя условия, при которых взаиморасположение интервалов этой системы имеет нужный характер, обеспечивающий существование искомых периодов времени. Как и ранее, применим алгоритм синтеза п. 3.

Шаг 1. Этот шаг выполнен – см. шаги 1–4 алгоритма анализа системы $(A_1, A_2, \ldots \ldots, A_n)$, выполненные выше.

Шаг 2. Выполняется аналогично шагу 2 алгоритма синтеза системы в примере 1. То есть требуем, чтобы найденный в процессе анализа нашей системы $(A_1, A_2, ..., A_n)$ выходной процесс $y(t) = = 1(A, B)0(-,-)1(C, D)$ автомата-модели, моделирующий частный показатель взаиморасположения интервалов системы, имел невырожденные импульсы, моделирующие нужные нам периоды времени: $B > A$ или $D > C$. Подставив сюда выражения A, B, C, D из выражения $y(t)$, полученного выше при анализе системы, найдем условие

$$a_{11} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left[b_{11} \wedge \left(\bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left(\bigwedge_{i=2}^{n} b_{i1} \right) \right) \right] > a_{11} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1}$$

или

$$a_{12} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left[b_{12} \wedge \left(\bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left(\bigwedge_{i=2}^{n} b_{i1} \right) \right) \right] > a_{12} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1}.$$

Шаг 3. Решение сформированной на шаге 2 системы неравенств непрерывной логики таково

$$b_{11} \wedge \left[\bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left(\bigwedge_{i=2}^{n} b_{i1} \right) \right] > a_{11} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \quad \text{или}$$

$$b_{12} \wedge \left[\bigvee_{i=2}^{n} a_{i1} \vee \left(\bigwedge_{i=2}^{n} b_{i1} \right) \right] > a_{12} \vee \bigvee_{i=2}^{n} a_{i1}.$$

Взаиморасположение интервалов системы $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, удовлетворяющее хотя бы одному из двух выписанных неравенств, обеспечивает существование периодов времени, в которых $n-1$ приятелей могут совместно посетить магазин – (A, B) и (C, D).

Как видно из примера 2, усложнение задачи в виде увеличения размерности рассматриваемой системы никак не повлияло на возможность ее решения в аналитической форме.

Оценим теперь вычислительную сложность предложенного подхода. Базовая задача в этом подходе – анализ системы n последовательностей интервалов – эквивалентна задаче нахождения выходного процесса автомата-модели системы. Последняя задача согласно [5, с. 93] имеет общую сложность

$$N \le 2mn \left[\begin{aligned} &\log_2 (2m)(l^r - 1)\big/(l-1) + \\ &+ \log_2 l(rl^{r+1} - (r+1)l^r + 1)\big/(l-1)^2 \end{aligned} \right]$$

элементарных операций. Здесь m – число интервалов в каждой последовательности; l – число входов в каждом логическом элементе автомата-модели; r – число ступеней в автомате-модели. Реализуя (что всегда возможно) двухступенчатую модель $(r = 2)$, получим

$$N \le 2mn[(\log_2 m + 1)(l+1) + \log_2 l(2l^3 + 1)].$$

Таким образом, вычислительная сложность предложенного подхода растет как степенная функция от размерности задачи $m \times n \times l$, что позволяет применять этот подход к решению задач высокой размерности как в аналитической, так и численной форме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что изучение класса комбинаторных задач, эквивалентных комбинаторной задаче определения взаиморасположения n последовательностей интервалов, можно проводить с помощью математической модели динамического конечного автомата без памяти и математического аппарата непрерывной логики. Такой подход позволяет формально находить алгоритмы решения указанных задач, а также формально анализировать решения, например, находить необходимые и достаточные условия их существования. Также преимуществом предложенного подхода является его применимость к аналитическому решению задач произвольно высокой размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левин В.И.* Введение в динамическую теорию конечных автоматов. Рига: Зинатне, 1975.
2. *Bochmann D., Roginskij V.N., Levin V.I.* Dinamische Processe in Automaten. Berlin: Technik, 1977.
3. *Левин В.И.* Динамика логических устройств и систем. М.: Энергия, 1980.
4. *Левин В.И.* Теория динамических автоматов. Пенза: Изд-во Пензен. гос. ун-та, 1995.
5. *Левин В.И.* Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. М.: Радио и связь, 1982.
6. *Левин В.И.* Структурно-логические методы исследования сложных систем. М.: Наука, 1987.
7. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976.
8. *Кандрашина Е.Ю., Литвинцева Л.В., Поспелов Д.А.* Пространство и время в системах искусственного интеллекта. М.: Наука, 1988.
9. *Кандрашина Е.Ю., Литвинцева Л.В., Поспелов Д.А.* Представление знаний о пространстве и времени в системах искусственного интеллекта. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 17 мая 2016 г.

Левин Виталий Ильич, Пензенская государственная технологическая академия, г. Пенза, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, советник ректора по науке, заслуженный деятель науки РФ, e-mail: levin@pgta.ru

Информация для цитирования:

Левин В.И. Моделирование комбинаторных задач с помощью непрерывной логики // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 2. С. 439-448. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-2-439-448

Levin V.I. Modelirovanie kombinatornykh zadach s pomoshch'yu nepreryvnoy logiki [Modeling of combinatorial problems with the help of continuous logic]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 2, pp. 439-448. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-2-439-448 (In Russian).

UDC 519.715
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-2-439-448

MODELING OF COMBINATORIAL PROBLEMS WITH THE HELP OF CONTINUOUS LOGIC

© V.I. Levin
Penza State Technological University
1a/11 Gagarin St./Baidukov Dr., Penza, Russian Federation, 440039
E-mail: levin@pgta.ru

In this paper we formulated the class of combinatorial tasks, which equivalent to problem of determining the relative position of slot sequences. We propose examples of this class of problems related to the field of synthesis of reliable devices by redundancy, organization management of customer service in trading systems, drafting proper timetable of dissertation council. We give precise mathematical formulation of problem, consisting of the analysis part (determining the actual position of interval sequences) and synthesis (finding location conditions for interval sequences at which their relative positions form a desired order). The mathematical model of dynamic finite automaton without memory as a logical $(n,1)$-pole is introduced. The main task for this automaton is to find the output dynamic process by known input processes and implemented logical (Boolean) function. Detailed description of continuous logic as mathematical means that allow find the output dynamic process in automata is given. Examples of such a finding are presented. It is shown that the dynamic finite automaton without memory is adequate mathematical model to solve the combinatorial problem. At the same time the original combinatorial problem reduces to finding the output process in the automata model, based on the specified input processes and implemented logic function. An 6-step algorithm for solving the problem, as well as two examples of combinatorial problems that are solved by this algorithm are proposed. Both examples are solved in analytical form. We release the estimation of computational complexity which implies that the complexity of the proposed approach is growing as a power function of the dimension of the problem. So the approach is applicable to the solution of problems of high dimensionality. The advantage of the approach else in the ability to formally seek algorithms for solving problems and analyze probable solutions by finding the necessary and sufficient conditions for existence of such solutions.
Key words:combinatorial problem; sequence of intervals; intervals interposition; the dynamic automata; the dynamic process; the continuous logic

REFERENCES

1. Levin V.I. *Vvedenie v dinamicheskuyu teoriyu konechnykh avtomatov* [Introduction to Dynamic Theory of Finite State Automation]. Riga, Zinatne Publ., 1975. (In Russian).
2. Bochmann D., Roginskij V.N., Levin V.I. *Dinamische Processe in Automaten*. Berlin, Technik Publ., 1977. (In German).
3. Levin V.I. *Dinamika logicheskikh ustroystv i system* [Dynamics of Logical Devices and Systems]. Moscow, Energy Publ., 1980. (In Russian).
4. Levin V.I. *Teoriya dinamicheskikh avtomatov* [Theory of Dynamic Automation]. Penza, Penza State University Publ., 1995. (In Russian).
5. Levin V.I. *Beskonechnoznachnayalogika v zadachakh kibernetiki* [Infinite-Valued Logics in Cybernetics Tasks]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1982. (In Russian).
6. Levin V.I. *Strukturno-logicheskie metody issledovaniy aslozhnykh system* [Structural-Logical Methods of Complicated Systems Research]. Moscow, Nauka Publ., 1987. (In Russian).
7. Zade L. *Ponyatie lingvisticheskoy peremennoy i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennykh resheniy* [The Notion of Linguistic Variable and its Application to Taking Approximate Solutions]. Moscow, Mir Publ., 1976. (In Russian).
8. Kandrashina E.Yu., Litvintseva L.V., Pospelov D.A. *Prostranstvo i vremya v sistemakh iskusstvennogo intellekta* [The Space and Time in Artificial Intellect Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1988. (In Russian).
9. Kandrashina E.Yu., Litvintseva L.V., Pospelov D.A. *Predstavlenie znaniy o prostranstve i vremeni v sistemakh iskusstvennogo intellekta* [The Space and Time Notion Inartificial Intellect Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1989. (In Russian).

Received 17 May 2016

Levin Vitaliy Ilich, Penza State Technological Academy, Penza, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Science Advisor of Rector, Honored Worker of Science of Russian Federation, e-mail: levin@pgta.ru