УДК 517.95
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-2-434-438

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ

© Е.В. Астахова
Воронежский государственный университет
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru

Начально-краевая задача гидродинамики в плоскости с преградой, рассмотренная в статье, продолжает ряд исследований, направленных на изучение асимптотических свойств решений неклассических задач математической физики, таких как [1]–[6]. Актуальность работы заключается в исследовании гладкости решений при наличии разрывов в граничных условиях. Основной целью является изучение поведения решения задачи, а также его первых производных в окрестности границы. Исследование основано на методе перехода к обобщенной задаче и теории функций Макдональда–Бесселя. При некоторых условиях выделены сингулярные члены компонент решения и их производных.

Ключевые слова: динамика вязкой жидкости; асимптотика; преграда; обобщенное решение; сингулярность; функции Макдональда–Бесселя

В работе рассматривается начально-краевая задача, моделирующая малые плоские колебания несжимаемой жидкости в плоскости $\mathbb{R}^2$ с преградой по отрезку $l = \{x | x_1 \in (-1;1), x_2 = 0\}$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \mu\Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial u_2}{\partial t} - \mu\Delta u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^2 \backslash l, t > 0$;

$$[u_1] = 0, [u_2] = 0, \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right] = 0, \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right] = q_1^1(x_1, t),$$
$$\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right] = 0, [p] = 0, \qquad (2)$$

$$u_1(x_1, x_2, 0) = 0, u_2(x_1, x_2, 0) = 0. \qquad (3)$$

Считаем, что функция $q_1^1(x_1, t)$ в граничных условиях (2) удовлетворяет следующим условиям $q_1^1(x_1, t) \in C^{2,1}_{x_1,t}\big((-1;1),[0,\infty)\big)$, $\mu = \text{const}$, $q_1^1(x_1, 0) = 0$ и через $[f]$ обозначен скачок функции $f(x_1, x_2, t)$ при $x_2 = 0$

$$[f] = \lim_{s\to 0}\big(f(x_1, s, t) - f(x_1, -s, t)\big),$$
$$x_1 \in (-1;1), t > 0.$$

Основной целью исследований является изучение поведения решения задачи, а также его первых производных в окрестности границы. Отметим, что условия, наложенные на функцию $q_1^1(x_1, t)$ из условий (2), не гарантируют существование классического решения задачи, что приводит к необходимости формулировки и изучения соответствующей обобщенной задачи [7].

В ходе работы было найдено интегральное представление решения соответствующей обобщенной задачи и получены асимптотики по пространственным переменным компонент такого решения и их первых производных.

Определение 1. ([8]). Назовем специализированной функцией обобщенную функцию $\delta_{[-1;1]} \in D'(\mathbb{R}^3)$, которая при любой плотности $q(x_1, t) \in C^{2,1}_{x_1,t}\big((-1;1),[0,\infty)\big)$ действует на произвольную основную функцию $\varphi(x,t) \in D(\mathbb{R}^3)$ по правилу

$$\big(q(x_1,t)\delta_{[-1;1]}, \varphi(x_1,x_2,t)\big) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{1} q(x_1,t)\big(\delta(x_2), \varphi(x_1,x_2,t)\big)dx_1 dt.$$

Пусть $u_1(x,t), u_2(x,t), p(x,t)$ – решение задачи (1)–(3). Без изменения обозначений продлим эти функции нулем при $t < 0$. Полученные функции будут удовлетворять в смысле пространства $S'(\mathbb{R}^3)$ следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \mu\Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu q_1^1(x_1,t)\delta_{[-1;1]}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \mu\Delta u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0. \qquad (6)$$

Применив к системе (4)–(6) преобразования Фурье и Лапласа, получим:

$$\begin{pmatrix} \gamma + \mu|s|^2 & 0 & -is_1 \\ 0 & \gamma + \mu|s|^2 & -is_2 \\ -is_1 & -is_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot F_{x\to s} L_{t\to\gamma} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu \int_{-1}^{1} \widehat{q_1^1}(x_1, \gamma) e^{ix_1 s_1} dx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Из этого равенства с помощью обратных преобразований Фурье и Лапласа и теоремы о свертке получаем интегральное представление компонент решения обобщенной задачи (4)–(6)

$$u_1(x,t) = \\ = \mu F_{s\to x}^{-1}\left[\int_0^t \frac{s_2^2}{|s|^2} e^{-\mu|s|^2(t-\tau)} \int_{-1}^{1} q_1^1(y_1,\tau) e^{iy_1 s_1} dy_1\, d\tau\right];$$

$$u_2(x,t) = \\ = -\mu F_{s\to x}^{-1}\left[\int_0^t \frac{s_1 s_2}{|s|^2} e^{-\mu|s|^2(t-\tau)} \int_{-1}^{1} q_1^1(y_1,\tau) e^{iy_1 s_1} dy_1\, d\tau\right]; \tag{7}$$

$$p(x,t) = \mu F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{s_1}{|s|^2}\int_{-1}^{1} q_1^1(y_1,\tau) e^{iy_1 s_1} dy_1\right].$$

Определение 2. Обобщенным решением задачи (1)–(3) назовем вектор-функцию $u_1(x,t), u_2(x,t), p(x,t)$ с непрерывными и ограниченными компонентами, удовлетворяющую задаче (4)–(6), для которой производные $\frac{\partial^k u_i}{\partial x_i}, \frac{\partial p}{\partial x_i}, \frac{\partial u_i}{\partial t}, i,j \in \{1,2\}, k \in \{0,1\}$ непрерывны в любой точке $x \in \mathbb{R}^2 \backslash l, t > 0$ функции $\sqrt{(1 \pm x_1)^2 + x_2^2}\, \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u_i(x_1,x_2,t)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_i(x_1,-x_2,t)}{\partial x_2}$, $(1 \pm x_1)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_1}, i = \{1,2\}$ ограничены в окрестности преграды l; граничные условия (2) выполняются в смысле главного значения, а начальные условия (3) выполнены по непрерывности.

Ограничения на указанные в определении функции возникают в связи с границей рассматриваемого множества $\mathbb{R}^2 \backslash l$, а именно, вследствие особой формы множества, которое было выбрано для приближения к границе (см. [9]).

Т е о р е м а. Если $q_1^1(x_1,t) \in C_{x_1,t}^{2,1}\big((-1;1),[0,\infty)\big)$ $q_1^1(x_1,0) = 0$ и существует константа $M > 0$ такая, что $\sum_{i,j=0}^{1}\left|\frac{\partial^{i+j} q_1^1}{\partial y_1^i \partial t^j}(y_1,t)\right| \le M$, то верны следующие представления:

$$u_1(x,t) = \frac{q_1^1(x_1,t)}{4\pi}\left.\begin{pmatrix} x_2 \operatorname{arctg}\frac{x_1-y_1}{x_2} - \\ -(x_1-y_1)\ln\frac{\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}}{2}\end{pmatrix}\right|_{y_1=-1}^{y_1=1} + \\ +R^1(x,t); \tag{8}$$

$$u_2(x,t) = R^2(x,t); \tag{9}$$

$$p(x,t) = \frac{\mu q_1^1(x_1,t)}{(2\pi)^{3/2}}\ln\frac{(x_1-1)^2+x_2^2}{(x_1+1)^2+x_2^2} + R^3(x,t); \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x,t) = \\ = \frac{q_1^1(x_1,t)}{4\pi}\left.\left(\frac{x_2(x_1-y_1)}{(x_1-y_1)^2+x_2^2} - 2\operatorname{arctg}\frac{x_1-y_1}{x_2}\right)\right|_{y_1=-1}^{y_1=1} + \\ +R^4(x,t); \tag{11}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x,t) = \frac{q_1^1(x_1,t)}{4\pi}\left(\frac{x_2^2}{(x_1-y_1)^2+x_2^2} + \frac{1}{2}\ln((x_1-y_1)^2 + \right.$$

+x22y1=−1y1=1+R5x,t,

(12)

где $R^i(x,t), i = \{1 \dots 5\}$ – непрерывные функции.

С л е д с т в и е. Если $q_1^1(x_1,t) \in C_{x_1,t}^{2,1}\big((-1;1),[0,\infty)\big), q_1^1(x_1,0) = 0$ и существует константа $M > 0$ такая, что $\sum_{i,j=0}^{1}\left|\frac{\partial^{i+j} q_1^1}{\partial y_1^i \partial t^j}(y_1,t)\right| \le M$, то вектор-функция (7) является обобщенным решением задачи (1)–(3).

Докажем, что при сформулированных ограничениях на граничную функцию $q_1^1(x_1,t)$ компоненты вектор-функции (7) задают обобщенное решение задачи (1)–(3).

В качестве доказательства Теоремы приведем рассуждения относительно функции $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x,t)$. Верность остальных представлений доказывается аналогично.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x,t) = \\ = \frac{\mu}{(2\pi)^2}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-ixs}\frac{is_2^3}{|s|^2}\int_0^t e^{-\mu|s|^2(t-\tau)}\int_{-1}^{1} q_1^1(y_1,\tau)e^{iy_1 s_1}dy_1\, d\tau\, ds$$

Разобьем пространство $\mathbb{R}^2$ на круг: $B_N = \{s: |s| \le N\}$ и $\mathbb{R}^2 \backslash B_N$. Тогда:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x,t) = \\ = \frac{\mu}{(2\pi)^2}\iint_{B_N} e^{-ixs}\frac{is_2^3}{|s|^2}\int_0^t e^{-\mu|s|^2(t-\tau)}\int_{-1}^{1} q_1^1(y_1,\tau)e^{iy_1 s_1}dy_1\, d\tau\, ds + \\ + \frac{\mu}{(2\pi)^2}\iint_{\mathbb{R}^2\backslash B_N} e^{-ixs}\frac{is_2^3}{|s|^2}\int_0^t e^{-\mu|s|^2(t-\tau)}\int_{-1}^{1} q_1^1(y_1,\tau)e^{iy_1 s_1}dy_1\, d\tau\, ds = \\ = R_1(x,t) + I_1(x,t).$$

Заметим, что

$$|R_1(x,t)| = \\ = \frac{\mu}{(2\pi)^2}\left|\iint_{B_N} e^{-ixs}\frac{is_2^3}{|s|^2}\int_0^t e^{-\mu|s|^2(t-\tau)}\int_{-1}^{1} q_1^1(y_1,\tau)e^{iy_1 s_1}dy_1\, d\tau\, ds\right| \le \\ \le ct,$$

т. е. по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла функция $R_1(x,t)$ является непрерывной при условии ограниченности сверху функции $|q_1^1(x_1,t)|$.

Поскольку $q_1^1(y_1,\tau) = q_1^1(y_1,t) + \int_\tau^t \frac{dq_1^1}{d\alpha}(y_1,\alpha)d\alpha$, то функцию $I_1(x,t)$ можно представить в виде:

$$I_1(x,t) = \\ = \frac{\mu}{(2\pi)^2}\iint_{|s|>N} e^{-ixs}\frac{is_2^3}{|s|^2}\int_0^t e^{-\mu|s|^2(t-\tau)}d\tau\int_{-1}^{1} q_1^1(y_1,t)e^{iy_1 s_1}dy_1\, ds + \\ + \frac{\mu}{(2\pi)^2}\iint_{|s|>N} e^{-ixs}\frac{is_2^3}{|s|^2}\int_0^t e^{-\mu|s|^2(t-\tau)}\int_{-1}^{1}\int_\tau^t \frac{dq_1^1}{d\alpha}(y_1,\alpha)d\alpha\, e^{iy_1 s_1}dy_1\, d\tau\, ds,$$

т. е. $I_1(x,t) = I_2(x,t) + R_2(x,t)$, где функцию $R_2(x,t)$ можем оценить при условии ограниченности сверху функции $\left|\frac{dq_1^1}{dt}(y_1,t)\right|$.

$$|R_2(x,t)| = \\ = \frac{\mu}{(2\pi)^2}\left|\iint_{|s|>N} e^{-ixs}\frac{is_2^3}{|s|^2}\int_0^t e^{-\mu|s|^2(t-\tau)}\int_{-1}^{1}\int_\tau^t \frac{dq_1^1}{d\alpha}(y_1,\alpha)d\alpha\, e^{iy_1 s_1}dy_1\, d\tau\, ds\right|$$

$$|R_2(x,t)| \leq \frac{\mu}{(2\pi)^2} \iint\limits_{|s|>N} \left|\frac{is_2^3}{|s|^2}\right| \frac{M}{\mu^2 |s|^4} ds \leq \frac{M}{4\pi\mu N^2} = \text{const.}$$

Для представления функции $I_2(x,t)$ воспользуемся тем, что $\int_0^t e^{-\mu|s|^2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{\mu|s|^2}\left(1 + e^{-\mu|s|^2 t}\right)$. Тогда $I_2(x,t) = I_3(x,t) + R_3(x,t)$, где функцию $R_3(x,t)$ можем оценить при условии ограниченности функций $\left|\frac{dq_1^1}{dt}(y_1,t)\right|$ и $\left|\frac{d^2 q_1^1}{dt dy_1}(y_1,t)\right|$. Поскольку $q_1^1(x_1,0) = 0$, то верно равенство $q_1^1(x_1,t) = t\frac{dq_1^1}{dt}(x_1,\theta)$.

$$|R_3(x,t)| =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \iint\limits_{|s|>N} e^{-ixs} \frac{is_2^3}{|s|^4} e^{-\mu|s|^2 t} t \int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial q_1^1}{\partial t}(y_1,\theta) e^{iy_1 s_1} dy_1\, ds \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{|s|>N} \frac{c}{|s|^2} \frac{1}{1+|s_1|} ds \leq \text{const.}$$

Рассмотрим функцию $I_3(x,t)$:

$$I_3(x,t) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{|s|>N} e^{-ixs} \frac{is_2^3}{|s|^4} \int_{-1}^{1} q_1^1(y_1,t) e^{iy_1 s_1} dy_1\, ds \mp$$
$$\mp \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{|s|>N} e^{-ixs} \frac{is_2^3}{(1+|s|^2)^2} \int\limits_{-1}^{1} q_1^1(y_1,t) e^{iy_1 s_1} dy_1\, ds =$$
$$= R_4(x,t) + I_4(x,t)$$

Оценим функцию $R_4(x,t)$ при условии ограниченности функций $|q_1^1(x_1,t)|$ и $\left|\frac{dq_1^1}{dy_1}(y_1,t)\right|$:

$$|R_4(x,t)| =$$
$$\left|\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{|s|>N} e^{-ixs} is_2^3 \left(\frac{1}{|s|^4} - \right.\right.$$
−11+s22− 11q11y1,teiy1s1dy1ds≤

$$\leq \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{|s|>N} \frac{2e^{-ixs} is_2^3}{|s|^4 (1+|s|^2)} \int\limits_{-1}^{1} q_1^1(y_1,t) e^{iy_1 s_1} dy_1\, ds \right| \leq$$
$$\leq \frac{2}{(2\pi)^2} \iint\limits_{|s|>N} \frac{ds}{(1+|s|^2)(1+|s_1|)} \leq \text{const.}$$

Пользуясь тем, что $\int_{|x|>a} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx - \int_{|x|<a} f(x)dx$, интеграл $I_4(x,t)$ можно представить как

$$I_4(x,t) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-ixs} \frac{is_2^3}{(1+|s|^2)^2} \int\limits_{-1}^{1} q_1^1(y_1,t) e^{iy_1 s_1} dy_1\, ds$$
$$-R_5(x,t) = I_5(x,t) - R_5(x,t)$$

где функцию

$$R_5(x,t) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{|s|<N} e^{-ixs} \frac{is_2^3}{(1+|s|^2)^2} \int\limits_{-1}^{1} q_1^1(y_1,t) e^{iy_1 s_1} dy_1\, ds$$

можно оценить сверху константой аналогично функции $R_1(x,t)$.

Интеграл $I_5(x,t)$ можно рассматривать как обратное преобразование Фурье. Тогда, применив теорему о свертке, имеем:

$$(2\pi)^2 I_5(x,t) = F_{s\to x}^{-1}\left[\frac{is_2^3}{(1+|s|^2)^2} F_{y_1\to s_1}[q_1^1(y_1,t)]\right] =$$
$$= F_{s\to y}^{-1}\left[\frac{is_2^3}{(1+|s|^2)^2}\right] \cdot q_1^1(y_1,t) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1} F^{-1}_{\substack{s_1\to(x_1-y_1)\\ s_2\to y_2}}\left[\frac{is_2^3}{(1+|s|^2)^2}\right] q_1^1(y_1,t) dy_1$$

Воспользовавшись теорией функций Макдональда–Бесселя [10], свойствами преобразования Фурье и финитностью $q_1^1(y_1,t)$, получим:

$$(2\pi)^2 I_5(x,t) = \pi \int_{-1}^{1} \frac{\partial^3 [K_1(|x|)\cdot|x|]}{\partial x_2^3} \cdot q_1^1(y_1,t) dy_1$$

Из формул, приведенных в [10], и правил дифференцирования функций следует, что $\frac{\partial^3[K_1(|x|)\cdot|x|]}{\partial x_2^3} = \frac{x_2(3x_1^2+x_2^2)}{|x|^4} + O(1)$. Следовательно,

$$(2\pi)^2 I_5(x,t) =$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{x_2(3(x_1-y_1)^2+x_2^2)}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} + O(1) \right) \cdot q_1^1(y_1,t) dy_1.$$

Заметим, что
$q_1^1(y_1,t) = q_1^1(x_1,t) + (y_1 - x_1)\frac{\partial q_1^1}{\partial x_1}(\theta,t)$. Тогда

$$4\pi I_5(x,t) = q_1^1(x_1,t) \int_{-1}^{1} \frac{x_2(3(x_1-y_1)^2+x_2^2)}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} dy_1 +$$
$$+ \int_{-1}^{1} \frac{x_2(y_1-x_1)(3(x_1-y_1)^2+x_2^2)}{((x_1-y_1)^2+x_2^2)^2} \frac{\partial q_1^1}{\partial x_1}(\theta,t) dy_1 +$$
$$+ \int_{-1}^{1} O(1) q_1^1(y_1,t) dy_1.$$

Последние два слагаемых (обозначим их $R_6(x,t)$ и $R_7(x,t)$) оцениваются сверху при условии ограниченности функций $q_1^1(y_1,t)$ и $\frac{\partial q_1^1}{\partial x_1}(x_1,t)$. Интеграл первого слагаемого можем посчитать:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x_2(3(x_1-y_1)^2+x_2^2)}{\left((x_1-y_1)^2+x_2^2\right)^2} dy_1 =$$
$$= \left(\frac{x_2(x_1-y_1)}{(x_1-y_1)^2+x_2^2} - 2\operatorname{arctg}\frac{x_1-y_1}{x_2} \right)\Bigg|_{y_1=-1}^{y_1=1}.$$

Таким образом, функция $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x,t)$ представима в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x,t) = \frac{q_1^1(x_1,t)}{4\pi}\left(\frac{x_2(x_1-y_1)}{(x_1-y_1)^2+x_2^2} - 2\operatorname{arctg}\frac{x_1-y_1}{x_2} \right)\Bigg|_{y_1=-1}^{y_1=1} +$$
$$+ R^4(x,t),$$

где $R^4(x,t) = \sum_{i=0}^{7} R_i(x,t)$.

Каждая из функций $R_i(x,t), i = \{1,2,\dots,7\}$ ограничена сверху по модулю, следовательно, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла является непрерывной по совокупности переменных.

Теорема доказана.

Доказательство Следствия вытекает из представлений (8)–(12) и дополнительных условий. Так, выполнение граничных условий следует из определения скачка функции и представлений (8)–(12), выполнение граничных условий – из представлений (8)–(12), условия $q_1^1(x_1, 0) = 0$ и вида функций $R_i(x, t), i = \{1,2, \dots, 7\}$, из которого следует, что $R_i(x, 0) = 0$. Непрерывность рассматриваемых функций на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1; 0)\}$ очевидно следует из представлений, полученных в Теореме.

Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глушко А.В.* Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи коллапса пятна интрузии в вязкой стратифицированной жидкости // Математические заметки. 1993. Т. 53. Вып. 1. С. 16-24.
2. *Глушко А.В., Яковлев В.А.* О регулярности решения задачи коллапса пятна интрузии в вязкой стратифицированной жидкости // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений. Новосибирск, 1990. С. 58-67.
3. *Глушко А.В.* Асимптотические колебания и интрузия в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости // Доклады РАН. 1999. Т. 365. № 1. С. 26-30.
4. *Логинова Е.А.* Задача о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 1 (39). С. 82-83.
5. *Черникова А.С.* Задача о распределении тепла в плоскости, состоящей из двух различных неоднородных материалов, с полуограниченной межфазной трещиной // Вестник СПбГУ. Серия 10. 2014. Вып. 3. С. 66-80.
6. *Логинова Е.А.* Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной // Вестник СПбГУ. Серия 1. 2012. Вып. 1. С. 40-47.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М: Наука, 1976. 527 с.
8. *Глушко А.В., Логинова Е.А.* Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2010. № 2. С. 47-50.
9. *Глушко А.В., Логинова Е.А.* Распределение тепла в трехмерном материале с разрезом по квадрату // Вестник СПбГУ. Серия 10. 2015. Вып. 3. С. 41-53.
10. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций / пер. с англ. В.С. Бермана. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. Ч. 1. 787 с.

Поступила в редакцию 5 марта 2017 г.

Астахова Екатерина Владимировна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, магистрант по направлению подготовки «Математика», математический факультет, e-mail: kuchp2@math.vsu.ru

UDC 517.95
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-2-434-438

ABOUT ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF ONE TASK OF FLOW FLUID DYNAMICS DECISION

© E.V. Astakhova
Voronezh State University
1 Universitetskaya Sq., Voronezh, Russian Federation, 394018
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru

The initial boundary-value problem of hydrodynamics in a plane with a barrier, considered in the article, continues a series of studies aimed at studying the asymptotic properties of solutions of nonclassical problems of mathematical physics, such as in [1]–[6]. The urgency of the work lies in the study of the smoothness of solutions in the presence of discontinuities in the boundary conditions. The main goal is to study the behavior of the solution of the problem, as well as its first derivatives in the neighborhood of the boundary. The study is based on the method of transition to the generalized problem and the theory of MacDonald-Bessel functions. Under certain conditions, the singular terms of the solution components and their derivatives are singled out.
Key words: dynamics of viscous fluid; asymptotics; barrier; generalized solution; singularity; MacDonald-Bessel functions

REFERENCES

1. Glushko A.B. Asimptotika pri t→∞ resheniya zadachi kollapsa pyatna intruzii v vyazkoy stratifitsirovannoy zhidkosti [Asymptotic behavior at t→∞ task solution collapse of smudge of intrusion in viscous stratified fluid]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 1993, vol. 53, no. 1, pp. 16-24. (In Russian).
2. Glushko A.B., Yakovlev V.A. O regulyarnosti resheniya zadachi kollapsa pyatna intruzii v vyazkoy stratifitsirovannoy zhidkosti [About regularity of task solution of collapse of smudge of intrusion in viscous stratified fluid]. *Korrektnye kraevye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy* [Correct Boundary Values for Non-Classical Equations]. Novosibirsk, 1990, pp. 58-67. (In Russian).
3. Glushko A.B. Asimptoticheskie kolebaniya i intruziya v vyazkoy szhimaemoy stratifitsirovannoy zhidkosti [Asymptotic vibrations and intrusion in viscous squeezed stratified fluid]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 1999, vol. 365, no. 1, pp. 26-30. (In Russian).

4. Loginova E.A. Zadacha o raspredelenii tepla v neodnorodnom materiale s treshchinoy [The task about heat conduction in nonhomogenious material with cracks]. *Izvestiya Instituta matematiki i informatiki Udmurtskogo gosudarstvennogo universiteta – News of Mathematics and Informatics Institute of Udmurt State University*, 2012, no. 1 (39), pp. 82-83. (In Russian).
5. Chernikova A.S. Zadacha o raspredelenii tepla v ploskosti, sostoyashchey iz dvukh razlichnykh neodnorodnykh materialov, s poluogranichennoy mezhfaznoy treshchinoy [A task of heat conduction in plane, consisting of two different nonhomogenious materials, with semibounded interphase crack]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10 – Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10*, 2014, no. 3, pp. 66-80. (In Russian).
6. Loginova E.A. Postroenie resheniya zadachi o raspredelenii tepla v neodnorodnom materiale s treshchinoy [Heat distribution in an inhomogeneous material with a crack]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. Astronomiya – Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2012, no. 1, pp. 40-47. (In Russian).
7. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematic Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 527 p. (In Russian).
8. Glushko A.V., Loginova E.A. Asimptoticheskie svoystva resheniya zadachi o statsionarnom raspredelenii tepla v neodnorodnoy ploskosti s treshchinoy [Asymptotic features of task solution about stationary heat conduction in nonhomogenious plane with crack]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 47-50. (In Russian).
9. Glushko A.V., Loginova E.A. Raspredelenie tepla v trekhmernom materiale s razrezom po kvadratu [The problem of the distribution of heat in the material with a cut on the square]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10 – Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10*, 2015, no. 3, pp. 41-53. (In Russian).
10. Vatson G.N. *Teoriya besselevykh funktsiy* [Theory of Bessel's Functions]. Moscow, Foreign Literature Publ., 1949, pt. 1, 787 p. (In Russian).

Received 5 March 2017

Astakhova Ekaterina Vladimirovna, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, Master's Degree Student on Training Direction "Mathematics", Mathematic Faculty, e-mail: kuchp2@math.vsu.ru

Информация для цитирования:

Астахова Е.В. Об асимптотическом представлении решения одной задачи гидродинамики // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 2. С. 434-438. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-2-434-438

Astakhova E.V. Ob asimptoticheskom predstavlenii resheniya odnoy zadachi gidrodinamiki [About asymptotic representation of one task of flow fluid dynamics solution]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 2, pp. 434-438. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-2-434-438 (In Russian).