УДК 62-50; 519.7; 519.8
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-23-32

РАЗДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ – МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ

© В.И. Левин
Пензенский государственный технологический университет
440039, Российская Федерация, г. Пенза, пр-д Байдукова/ул. Гагарина, 1а/11
E-mail: levin@pgta.ru

Предложен новый метод – раздетерминизация, предназначенный для решения проблемы вычисления детерминированных функций, имеющих т. н. особые точки, где у функции не существует определенного значения. Целью статьи является описание подхода, позволяющего осуществлять деление на нуль и тем самым исключать особые точки функций. Предложенный метод заключается в переходе от проблематичной, с точки зрения вычисления, детерминированной функции к соответствующей недетерминированной, а именно, интервальной функции, путем замены детерминированных параметров функции соответствующими интервальными параметрами. Благодаря замене значения функции в особых точках становятся интервальными и вполне определенными значениями. Последнее и позволяет решить проблему вычисления функции. Решение указанной проблемы достигается легализацией деления на нуль путем интервализации вычислений. При этом используется принцип вырезания окрестности нуля из интервала, являющегося делителем интервальной дроби, представляющей исследуемую функцию. Для упрощенной путем вырезания интервальной функции выведены рабочие формулы, основанные на основных положениях интервальной математики и позволяющие легко искать значения данной функции. Предложенный в статье подход к решению проблемы вычисления функций с особыми точками имеет важное значение для всех классов прикладных систем, в которых эта проблема реально существует. Речь идет здесь о тех системах, функции-характеристики которых имеют некоторое число особых точек. Подобные системы встречаются чаще всего в телеметрии, теории и практике надежности, гуманитарной сфере и ряде других областей. Особенности этих областей в том, что в них не всегда применимы классические методы детерминистской математики. Это побуждает искать новые подходы к решению возникающих здесь задач.

Ключевые слова: интервал; интервальная функция; интервальные вычисления; раздетерминизация; деление на нуль

ВВЕДЕНИЕ

Появление в XX веке разнообразных сложных систем (управление экономикой, ракетно-космические системы, атомная энергетика и др.) выдвинуло новые сложные задачи по их изучению. Современная наука и практика обработки информации уже вполне успешно справляются с задачами исследования различных сложных систем с полностью определенными (детерминированными) параметрами. Эти задачи обычно формулируются как задачи расчета, анализа и синтеза тех или иных функций с детерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками изучаемых систем. Но на практике часто имеют место другие системы – с неточно известными, т. е. неполностью определенными (недетерминированными) параметрами. Причины появления таких систем заключаются в естественной неопределенности, свойственной многим реальным процессам, происходящим в системах; в неточном задании параметров большинства систем из-за неизбежных погрешностей при их вычислении или измерении; в изменении во времени параметров систем; в необходимости или целесообразности совместного исследования целых семейств однотипных систем, которые имеют одинаковые функции-характеристики и различаются лишь значениями параметров этих функций. Учет неопределенности систем особенно важен при их проектировании, так как полная определенность в работе системы появляется на последних этапах ее создания.

Исследование введенных неопределенных систем формулируется в виде задач расчета, анализа и синтеза различных функций с недетерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками систем. Все эти задачи значительно сложнее их вышеупомянутых детерминированных аналогов, которые приходится решать при исследовании систем с точно известными параметрами. Это усложнение связано с тем, что алгебра недетерминированных чисел сложнее алгебры детерминированных чисел. В связи с этим для решения указанных задач приходится применять тот или иной специализированный математический аппарат: теорию вероятностей [1], теорию нечетких множеств [2], интервальную алгебру [3], многозначные функции [4].

Применение этого математического аппарата позволяет строить и изучать более адекватные математические модели сложных систем с недетерминированными параметрами, учитывающие неопределенность в поведении таких систем [5–13].

Однако на практике встречаются еще более трудные для изучения классы сложных систем, в которых даже математические модели с детерминированными параметрами приводят к задачам, не имеющим определенного решения. Таковы, например, сложные системы, изучение которых сводится к решению системы линейных уравнений, определитель которой в некоторых случаях может быть равен нулю. Именно для подобных систем раздетерминизация, т. е. переход к соответствующей недетерминированной системе, позволяет получить необходимое решение. Так, для сложных систем, изучение которых сводится к решению системы линейных уравнений (с возможно нулевым определителем), определитель после раздетерминизации становится численно равным интервалу, включающему, кроме нуля, также ненулевые значения, что открывает возможность получения решения.

В настоящей статье рассматриваются задачи изучения именно таких классов сложных систем. В качестве раздетерминизации используется процедура перехода от системы с детерминированными параметрами к системе с интервальными параметрами. В качестве математического аппарата используется интервальная математика, точнее – интервальная алгебра. Раздетерминизация является процедурой, обратной по отношению к детерминизации, широко использующейся в работах автора по изучению поведения неопределенных систем [14–19].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Допустим, имеется некоторая практическая задача, сводящаяся с математической точки зрения к изучению (расчету и анализу поведения) детерминированной функции одной независимой переменной – характеристики изучаемой системы

$$y = f(x), \qquad (1)$$

однозначно отображающей заданное множество $X = \{x\}$ независимых переменных x в заданное множество $Y = \{y\}$ зависимых переменных y, в соответствии с законом f, который и называется функцией. Хорошо известно, что задача расчета (вычисления значений) функции (1) принципиально всегда решается с помощью адекватного этой задаче математического аппарата алгебры вещественных чисел, с использованием подходящих методов вычислений, а задача анализа поведения функции (1) – с помощью адекватного ей аппарата классического дифференциального исчисления.

Рассмотрим далее распространенную ситуацию, когда изучаемая функция (1) имеет вид дроби

$$f(x) = f_1(x)/f_2(x) \qquad (2)$$

с числителем – функцией $f_1(x)$ и знаменателем – $f_2(x)$. В этой ситуации расчет и анализ поведения функции (1) затрудняется, поскольку в каждой точке с нулевым знаменателем эта функция не существует (если в этой точке числитель не равен нулю) либо принимает бесконечное множество значений, т. е. не имеет определенного значения (если в этой точке числитель равен нулю). Очевидно, что для функций с указанными точками (их естественно называть особыми) должны быть разработаны специальные методы расчета и анализа поведения функций, позволяющие исключить эффект влияния таких особых точек. Задача настоящей работы состоит в построении двух систематических процедур, связанных с изучением поведения детерминированных функций вида (2). А именно: 1) процедура расчета (т. е. вычисления значений) детерминированной функции типа (2), содержащей особые точки; 2) процедура анализа поведения такой же функции.

2. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Ниже мы будем исследовать поведение детерминированных функций типа (2), содержащих особые точки, имея в виду преодоление трудности, связанной с наличием таких точек, путем раздетерминизации, т. е. перехода от функции (2) к соответствующей недетерминированной функции (функции с недетерминированными, точнее – с интервальными параметрами). В связи с этим представляет интерес обзор литературы по изучению различных неопределенных объектов.

Проблема изучения объектов, характеризуемых той или иной неопределенностью, возникла впервые в начале Второй мировой войны в связи с необходимостью управления огнем зенитной артиллерии, в условиях случайного движения воздушных целей. Соответствующими задачами занимались выдающиеся математики-вероятностники Н. Винер [5], А.Н. Колмогоров [6] и их многочисленные последователи. Однако широкое развитие исследований по изучению гражданских объектов, работающих в условиях возможной неопределенности, началось только в конце 1950-х – начале 1960-х гг., в рамках математической статистики и ее новых в то время направлений – обработки данных и планирования экспериментов [7–8].

Исследования, проводимые в 1970–1980-е гг., привели к более широкому пониманию неопределенности, включившей в себя теперь не только случайность, но и незнание, неединственность возможных исходов, неопределенность целей, многокритериальность при решении задач оптимизации. Появились новые подходы к описанию неопределенности: теория нечетких множеств, принцип недоопределенной модели, принятие решений в многокритериальных задачах [2; 9–10].

С 1980-х гг. начал интенсивно применяться подход к описанию неопределенности, базирующийся на интервальной математике, позволяющей получать оценки характеристик неопределенных систем с гарантированной точностью [11–18]. При этом указанный подход применялся сначала в метрологии для определения интервального значения известной функции при интервальных значениях аргументов. Затем его развитие стало происходить по двум направлениям. За рубежом этот подход развивался как средство автоматического учета ошибок округления при численном решении задач на компьютерах, в то время как в СССР и России ученые развивали его с целью нахождения области возможных значений результата вычислений с учетом структуры данных и функций, заданных в символьном виде.

Наконец, с 1990-х гг. начала изучаться очень важная в практических приложениях задача исследования поведения произвольной недетерминированной функции с интервальными параметрами, являющейся аналогом хорошо известной задачи математического анализа – исследования поведения детерминированной функции средствами классического дифференциального исчисления [20].

3. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ МЕТОДЫ

Изложим сначала основную идею предлагаемого метода. Рассмотрим детерминированную функцию вида дроби (2), с возможными особыми точками, т. е. точками, в которых знаменатель функции (2) равен нулю. В таких точках, как уже говорилось в п. 1, функция (2) либо не существует, либо не имеет определенного значения. Мы предлагаем метод, позволяющий придать функции (2) одно определенное значение во всех ее точках, включая и особые, тем самым исключается влияние особых точек на характер поведения функции. Предлагаемый метод состоит в переходе от детерминированной функции (2) к соответствующей интервальной функции

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}_1(x) / \widetilde{f}_2(x) \qquad (3)$$

путем замены всех точно заданных параметров исходной функции соответствующими интервальными параметрами. Эту процедуру естественно назвать раздетерминизацией. В результате раздетерминизации все точные значения числителя $y_1 = f_1(x)$ и знаменателя $y_2 = f_2(x)$ исходной функции $f(x)$ переходят в соответствующие интервальные значения $\widetilde{y}_1 = \widetilde{f}_1(x)$, $\widetilde{y}_2 = \widetilde{f}_2(x)$, где $\widetilde{y}_1$, $\widetilde{y}_2$ – интервалы $\widetilde{y}_1 = [y_{11}, y_{12}]$, $\widetilde{y}_2 = [y_{21}, y_{22}]$, а все точные значения самой исходной функции $y = f(x)$ – в соответствующие интервальные значения этой функции $\widetilde{y} = \widetilde{f}(x)$, где $\widetilde{y} = [y_1, y_2]$. При этом все особые точки исходной функции после раздетерминизации можно исключить из рассмотрения. Действительно, в каждой такой точке знаменатель $f_2(x)$ исходной функции равен нулю, но раздетерминизируемый знаменатель $\widetilde{f}_2(x)$ в этой точке равен уже не нулю, а интервалу, содержащему в себе нуль. Деление на такой интервал в интервальной математике не рассматривается и предполагается невозможным [3]. Однако это ошибочная точка зрения, поскольку, если вырезать из интервала малый подынтервал, содержащий нуль, то оставшаяся, большая часть интервала уже не будет содержать нуля, и деление на такой интервал по методологии интервальной математики окажется вполне возможным. Таким образом, использование метода раздетерминизации исходной детерминированной функции (2) в сочетании с вырезанием нуля из интервала возможных значений раздетерминизируемого знаменателя этой функции позволяет ликвидировать все особые точки исходной функции (2) и применить к изучению поведения этой функции обычные методы изучения поведения интервальной функции [3; 11; 14; 19–20]. Разумеется, предлагаемый нами метод изучения поведения детерминированной функции, содержащей особые точки, является приближенным, т. к. при вырезании интервала, содержащего нуль, отбрасывают часть возможных значений подфункции – знаменателя изучаемой функции. Однако погрешность такого приближения может быть сделана как угодно малой методом уменьшения ширины вырезаемого интервала.

Опишем метод раздетерминизации подробнее. Как известно из интервальной математики [3], любая операция над интервалами определяется как теоретико-множественное обобщение соответствующей операции над точными вещественными числами. То есть, если a, b – точные вещественные числа, $\widetilde{a} = [a_1, a_2]$, $\widetilde{b} = [b_1, b_2]$ – интервалы, $\bullet$ – операция над точными вещественными числами, а $\circ$ – соответствующая операция над интервалами, то по определению получаем

$$\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \equiv [a_1, a_2] \circ [b_1, b_2] \equiv \{a \cdot b \,|\, a \in \widetilde{a}, b \in \widetilde{b}\}. \qquad (4)$$

Также получаем формулу для операции деления двух интервалов

$$\widetilde{a} / \widetilde{b} \equiv [a_1, a_2] / [b_1, b_2] \equiv \{a / b \,|\, a \in \widetilde{a}, b \in \widetilde{b}\},$$
$$0 \notin \widetilde{b}. \qquad (5)$$

Дополнительное требование относительно нуля в этой формуле связано с невозможностью деления вещественного числа на нуль. Учитывая, что деление вещественных чисел обратно умножению, формулу (5) можно переписать в терминах операции умножения

$$\widetilde{a} / \widetilde{b} \equiv [a_1, a_2] / [b_1, b_2] \equiv [a_1, a_2] \cdot [1/b_1, 1/b_2],$$
$$0 \notin \widetilde{b}. \qquad (6)$$

А операция умножения интервалов, как известно из [3], выполняется по формуле такого вида

$$\widetilde{c} \cdot \widetilde{d} \equiv [c_1, c_2] \cdot [d_1, d_2] = [\min_{i,j}(c_i \cdot d_j), \max_{i,j}(c_i \cdot d_j)]. \qquad (7)$$

Соединяя формулы (6), (7), получаем окончательную формулу для операции деления двух интервалов

$$\widetilde{a} / \widetilde{b} \equiv [a_1, a_2] / [b_1, b_2] = [\min_{i,j}(a_i / b_j), \max_{i,j}(a_i / b_j)],$$
$$0 \notin \widetilde{b}. \qquad (8)$$

Эта формула, однако, пригодна для выполнения операции деления интервалов только в тех случаях, когда интервал-делитель $\widetilde{b} = [b_1, b_2]$ не содержит нуля. А что делать, если он содержит нуль? Интервальная математика не отвечает на этот вопрос [3].

Мы предлагаем следующий ответ на него. Будем считать, что интервал-делитель содержит нуль внутри себя (а не на одном из концов). Вырежем из интервала $\widetilde{b} = [b_1, b_2]$ (знаменателя в формуле (8)) некоторый достаточно малый подынтервал $\widetilde{b}^* = [b'_1, b'_2]$, содержащий нуль, заменив тем самым интервал $\widetilde{b}$ биинтервалом

$$\widetilde{b}''' = \widetilde{b} / \widetilde{b}^* = \widetilde{b}' \cup \widetilde{b}'', \qquad (9)$$

где $\widetilde{b}' = [b_1, b'_1]$; $\widetilde{b}'' = [b'_2, b_2]$ (рис. 1).

Произведенную выше операцию естественно назвать операцией вырезания подынтервала из указанного интервала. Объективный смысл этой операции – приближение исходного интервала $\widetilde{b} = [b_1, b_2]$ биинтервалом (объединением 2 непересекающихся интервалов) вида $\tilde{b}' \cup \tilde{b}''$, выражающимся по формуле (9), таким образом, чтобы полученный биинтервал не содержал неприемлемого множества точек. В данном случае это множество – интервал $\tilde{b}^* = [b_1', b_2']$, содержащий нуль. Таким образом, если нужно разделить интервал $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ на интервал $\tilde{b} = [b_1, b_2]$, содержащий нуль, надо заменить в общей формуле деления (5) интервал $\tilde{b}$ биинтервалом $\tilde{b}'''$ вида (9), не содержащим нуль. Явный вид этой формулы найдем, используя общий принцип теоретико-множественного обобщения операций над точными вещественными числами (4):

$$\tilde{a}/\tilde{b} \approx \tilde{a}/(\tilde{b} \setminus \tilde{b}^*) = \tilde{a}/(\tilde{b}'/\tilde{b}'') =$$
$$= \{a/b \,|\, a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}' \cup \tilde{b}''\} =$$
$$= \{(a/b') \cup (a/b'') \,|\, a \in \tilde{a}, b' \in \tilde{b}', b'' \in \tilde{b}''\} =$$
$$= \{a/b' \,|\, a \in \tilde{a}, b' \in \tilde{b}'\} \cup \{a/b'' \,|\, a \in \tilde{a}, b'' \in \tilde{b}''\} = (\tilde{a}/\tilde{b}') \cup (\tilde{a}/\tilde{b}'').$$

Итак, деление интервала $\tilde{a}$ на интервал $\tilde{b}$, содержащий нуль, можно выполнить по приближенной формуле

$$\tilde{a}/\tilde{b} = (\tilde{a}/\tilde{b}') \cup (\tilde{a}/\tilde{b}''), \tag{10}$$

где $\tilde{b}'$ и $\tilde{b}''$ – подынтервалы интервала $\tilde{b}$, не содержащие нуля, объединение которых приближенно равно $\tilde{b}$ (рис. 1). Поскольку $\tilde{b}'$ и $\tilde{b}''$ не содержат нуля, обе скобки в правой части (10) можно вычислять по формуле (8). В развернутом виде формула (10) переписывается как

$$\begin{aligned} &[a_1, a_2]/[b_1, b_2] \equiv \\ &\equiv [a_1, a_2]/[b_1, b_1'] \cup [a_1, a_2]/[b_2', b_2]. \end{aligned} \tag{11}$$

4. РАБОЧИЕ ФОРМУЛЫ ДЕЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛА НА ИНТЕРВАЛ, СОДЕРЖАЩИЙ НУЛЬ

Общую формулу (10) деления на интервал, содержащий нуль, или эквивалентную ей формулу (11) можно значительно упростить и конкретизировать, если рассмотреть все возможные типы области делимого $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ (рис. 2), при упрощении используем соотношения для делителя $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ (рис. 1)

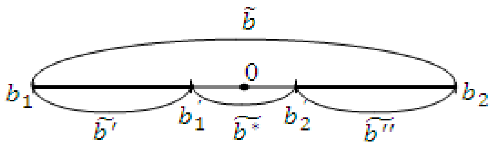


Рис. 1

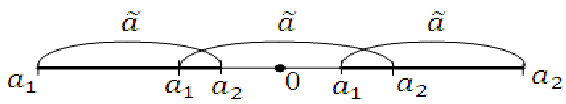


Рис. 2

$$\underbrace{b_1 < b_1'}_{<0} < \underbrace{b_2' < b_2'}_{>0}. \tag{12}$$

Случай 1:

$$\tilde{a} = [a_1, a_2] \geq 0. \tag{13}$$

В этом случае, вычисляя скобки в правой части формулы (10) по формуле (8), найдем формулу деления интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ на $\tilde{b} = [b_1, b_2]$, содержащий нуль, в виде биинтервала

$$\tilde{a}/\tilde{b} = [\underbrace{a_2/b_1', a_1/b_1}_{<0}] \cup [\underbrace{a_1/b_2, a_2/b_2'}_{>0}], \tag{14}$$

при $\tilde{a} = [a_1, a_2] \geq 0$.

Случай 2:

$$\tilde{a} = [a_1, a_2] \leq 0. \tag{15}$$

Здесь, вычисляя аналогично предыдущему скобки в правой части формулы (10) по формуле (8), также получим формулу деления интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ на $\tilde{b} = [b_1, b_2]$, содержащий нуль, в виде биинтервала

$$\tilde{a}/\tilde{b} = [\underbrace{a_1/b_2', a_2/b_2}_{<0}] \cup [\underbrace{a_2/b_1, a_1/b_1'}_{>0}], \tag{16}$$

при $\tilde{a} = [a_1, a_2] \leq 0$.

Случай 3:

$$\tilde{a} = [a_1, a_2] \text{ такой, что } a_1 < 0 < a_2. \tag{17}$$

В этом случае, вычисляя аналогично предыдущему скобки в правой части (10) по формуле (8), найдем формулу деления интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ на интервал $\tilde{b} = [b_1, b_2]$, содержащий нуль, сначала в виде следующего объединения 4-х интервалов

$$\begin{aligned} &\tilde{a}/\tilde{b} = (\tilde{a}/\tilde{b}') \cup (\tilde{a}/\tilde{b}'') = [a_1, a_2]/[b_1, b_1'] \cup [a_1, a_2]/[b_2', b_2] = \\ &= [a_1, 0]/[b_1, b_1'] \cup [0, a_2]/[b_1, b_1'] \cup \\ &\cup [a_1, 0]/[b_2', b_2] \cup [0, a_2]/[b_2', b_2] = \\ &= \underline{[0, a_1/b_1']} \cup \underline{\underline{[a_2/b_1', 0]}} \cup \underline{[a_1/b_2', 0]} \cup \underline{\underline{[0, a_2/b_2']}}, \end{aligned}$$

далее, после объединения одинаково подчеркнутых интервалов, в виде такого объединения 2-х интервалов

$$\tilde{a}/\tilde{b} = [\underbrace{a_1/b_2'}_{<0}, \underbrace{a_1/b_1'}_{>0}] \cup [\underbrace{a_2/b_1'}_{<0}, \underbrace{a_2/b_2'}_{>0}],$$

и, наконец, используя операции непрерывной логики

$$\wedge = \min, \ \vee = \max, \tag{18}$$

в виде одного интервала

$$\tilde{a}/\tilde{b} = [a_1/b_2' \wedge a_2/b_1', a_1/b_1' \vee a_2/b_2']. \tag{19}$$

5. СЛУЧАЙ ДЕЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛОВ, СИММЕТРИЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО НУЛЯ

Особый практический интерес представляет подслучай случая 3, когда оба интервала – делимое $\widetilde{a}=[a_1,a_2]$ и делитель $\widetilde{b}=[b_1,b_2]$ – расположены симметрично относительно нуля, в соответствии с чем естественно и вырезаемый из интервала $\widetilde{b}$ подынтервал $\widetilde{b}^*=[b_1',b_2']$ сделать симметричным относительно нуля. Тогда условия симметричности интервалов относительно нуля

$$a_2=-a_1,\ b_2=-b_1,\ b_2'=-b_1'. \tag{20}$$

Подставляя соотношения (20) в формулу (19), найдем

$$\widetilde{a}/\widetilde{b}=[a_1,a_2]/([b_1,b_1']\cup[b_2',b_2])=$$
$$=[\underbrace{(-a_2/b_2')\wedge(a_2/-b_2')}_{<0},\underbrace{(-a_2/-b_2')\vee(a_2/b_2')}_{>0}].$$

Окончательно,

$$\widetilde{a}/\widetilde{b}=[a_1,a_2]/([b_1,b_1']\cup[b_2',b_2])=$$
$$=[-a_2/b_2',a_2/b_2')]. \tag{21}$$

Как видно из (21), деление интервальных чисел, симметричных относительно нуля, в результате также дает интервальное число, симметричное относительно нуля.

Интерпретацию формулы (21) легко дать, учитывая, что a_2 – это полуширина интервала делимого $\widetilde{a}=[a_1,a_2]$, b_2' – полуширина интервала-выреза $\widetilde{b}^*=[b_1',b_2']$ в интервале-делителе $\widetilde{b}=[b_1,b_2]$, обеспечивающего отсутствие в этом интервале нуля и тем самым – возможность деления интервала $\widetilde{a}$ на интервал $\widetilde{b}$. Итак, смысл формулы (21) заключается в следующем: частное от деления интервала $\widetilde{a}$ на интервал $\widetilde{b}$, содержащий нуль (в случае, если интервалы симметричны относительно нуля, как и вырез в интервале $\widetilde{b}$, обеспечивающий отсутствие в нем нуля), равно интервалу (также симметричному относительно нуля), левая граница которого равна частному от деления ширины интервала-делимого $\widetilde{a}$ на ширину интервала-выреза $\widetilde{b}^*$, взятому со знаком «–», правая граница – тому же частному, взятому со знаком «+».

Полученной формуле (21) можно придать более ясную форму, в которой числитель и знаменатель вычисляемой интервальной дроби выражены в явном виде. Для этого мы обозначим ширину интервала-делимого $\widetilde{a}$ через a, ширину интервала-делителя $\widetilde{b}$ через b, ширину интервала-выреза $\widetilde{b}^*$ через b^*. Далее, обозначим через β долю ширины выреза b^* от ширины b всего интервала, в котором производится этот вырез ($0<\beta<1$) (коэффициент вырезания). Тогда величины в правой части (21) выражаются в виде

$$a_2=a/2,\ b_2'=b^*/2=\beta b/2,$$

и формула (21) принимает искомую форму

$$\widetilde{a}/\widetilde{b}=[-0{,}5a,\ 0{,}5a]/[-0{,}5b,\ 0{,}5b]=$$
$$=[-a/\beta b,\ a/\beta b]. \tag{22}$$

Коэффициент β в выражении (22) необходимо подбирать достаточно близким к нулю, поскольку чем он ближе к нулю, тем точность этой приближенной формулы (22) выше.

Пример 1. Вычислить дробь $[-2{,}2]/[-5{,}5]$, полученную делением интервальных чисел, симметричных относительно нуля. Примем коэффициент вырезания $\beta=0{,}1$. Далее учтем, что в нашем случае ширина интервала-делимого равна $a=2-(-2)=4$, ширина интервала-делителя равнее $b=5-(-5)=10$, тогда по формуле (22) получим

$$[-2{,}2]/[-5/5]=[-4/(0{,}1\cdot 10),4/(0{,}1\cdot 10)]=[-4/4].$$

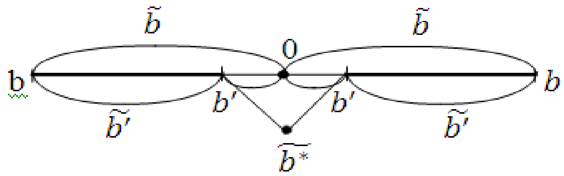
Как этого и следовало ожидать, результатом деления оказалось также интервальное число, симметричное относительно нуля.

6. СЛУЧАЙ ДЕЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛА НА ИНТЕРВАЛ С НУЛЕМ НА КОНЦЕ

В пп. 3–5 мы рассматривали случай, когда интервал-делитель содержит нуль внутри себя. В случае, когда нуль находится на одном из концов интервала-делителя, формулы деления интервалов изменяются. Это связано с тем, что в данном случае интервал-делитель $\widetilde{b}=[b_1,b_2]$ приобретает одну из двух конкретных форм, отличных от ранее рассмотренной формы, указанной на рис. 1, и эти две формы таковы

$$1)\ \widetilde{b}=[0,b]\ \text{или}\ 2)\ \widetilde{b}=[b,0]. \tag{23}$$

Они показаны на рис. 3. Последующий вывод рабочих формул деления интервала $\widetilde{a}=[a_1,a_2]$ на интервал $\widetilde{b}$ проведем отдельно для каждого возможного сочетания типа интервала $\widetilde{a}$ и типа интервала $\widetilde{b}$.



форма 2 форма 1

Рис. 3.

Исходная приближенная формула для деления интервала $\widetilde{a}$ на интервал $\widetilde{b}$ такова

$$\widetilde{a}/\widetilde{b}=\widetilde{a}/(\widetilde{b}\setminus\widetilde{b}^*). \tag{24}$$

Формула (24) имеет для рассматриваемого здесь случая такой же смысл, что и формула (10) для случая нахождения нуля внутри интервала-делителя. Вывод рабочих формул деления начнем со случая формы 1 интервала-делителя $\widetilde{b}$ (рис. 3). В этом случае скобка в (24) равна

$$(\widetilde{b} \setminus \widetilde{b}^*) = [0,b] \setminus [0,b'] = [b,b'] \text{, где } 0 < b' < b. \quad (25)$$

Как видно из (25), интервал-делитель в правой части формулы (24) не содержит нуля. Поэтому деление в этой формуле можно выполнять по формуле (8). Получение соответствующих рабочих формул проведем отдельно для трех типов интервала-делимого $\widetilde{a} = [a_1, a_2]$.

1) $\widetilde{a} = [a_1, a_2] \geq 0$. Тогда по формуле (8) получаем из формулы (24) следующую рабочую формулу

$$\begin{aligned} \widetilde{a} / \widetilde{b} &= \widetilde{a} / (\widetilde{b} \setminus \widetilde{b}^*) = [a_1, a_2] / [b', b] = \\ &= [a_1 / b, a_2 / b'] = [a_1 / b, a_2 / \beta b], \end{aligned} \quad (26)$$

где $\beta = b'/b$ – коэффициент ширины выреза b' в интервале-делителе $\widetilde{b}$;

2) $\widetilde{a} = [a_1, a_2] \leq 0$. Тогда по формуле (8) получаем из формулы (24) такую рабочую формулу

$$\begin{aligned} \widetilde{a} / \widetilde{b} &= \widetilde{a} / (\widetilde{b} \setminus \widetilde{b}^*) = [a_1, a_2] / [b', b] = \\ &= [a_1 / b', a_2 / b] = [a_1 / \beta b, a_2 / b], \end{aligned} \quad (27)$$

где β – тот же коэффициент.

3) $\widetilde{a} = [a_1, a_2]$ такой, что $a_1 < 0 < a_2$. Тогда из (24) по формуле (8) получаем следующую рабочую формулу

$$\begin{aligned} \widetilde{a} / \widetilde{b} &= \widetilde{a} / (\widetilde{b} \setminus \widetilde{b}^*) = [a_1, a_2] / [b', b] = \\ &= [a_1 / b', a_2 / b'] = [a_1 / \beta b, a_2 / \beta b], \end{aligned} \quad (28)$$

где β – тот же коэффициент.

Теперь проделаем ту же процедуру для случая формы 2 интервала-делителя $\widetilde{b}$ (см. рис. 3). В этом случае скобка в формуле (24) равна

$$(\widetilde{b} \setminus \widetilde{b}^*) = [b,0] \setminus [b',0] = [b,b'] \text{, где } b < b' < 0. \quad (29)$$

Как видно из (29), интервал-делитель в правой части формулы (24) и в этом случае не содержит нуля. Поэтому деление и здесь можно выполнять по формуле (8). Как и в случае формы 1 интервала-делителя $\widetilde{b}$, исследуем возможные 3 типа интервала-делимого $\widetilde{a} = [a_1, a_2]$:

1) $\widetilde{a} = [a_1, a_2] \geq 0$. По формуле (8) из формулы (24) получаем следующую рабочую формулу

$$\begin{aligned} \widetilde{a} / \widetilde{b} &= \widetilde{a} / (\widetilde{b} \setminus \widetilde{b}^*) = [a_1, a_2] / [b, b'] = \\ &= [a_2 / b', a_1 / b] = [a_2 / \beta b, a_1 / b], \end{aligned} \quad (30)$$

где $\beta = b'/b$ – коэффициент ширины выреза b' в интервале-делителе $\widetilde{b}$;

2) $\widetilde{a} = [a_1, a_2] \leq 0$. По формуле (8) из формулы (24) получаем такую рабочую формулу

$$\begin{aligned} \widetilde{a} / \widetilde{b} &= \widetilde{a} / (\widetilde{b} \setminus \widetilde{b}^*) = [a_1, a_2] / [b, b'] = \\ &= [a_2 / b, a_1 / b'] = [a_2 / b, a_1 / \beta b], \end{aligned} \quad (31)$$

где β – тот же коэффициент;

3) $\widetilde{a} = [a_1, a_2]$ такой, что $a_1 < 0 < a_2$. По формуле (8) получаем из (24) такую рабочую формулу

$$\begin{aligned} \widetilde{a} / \widetilde{b} &= \widetilde{a} / (\widetilde{b} \setminus \widetilde{b}^*) = [a_1, a_2] / [b, b'] = \\ &= [a_2 / b', a_1 / b'] = [a_2 / \beta b, a_1 / \beta b], \end{aligned} \quad (32)$$

где β – тот же коэффициент.

Сравнение формул (26) с (30), (27) с (31) и (28) с (32) показывает, что эти формулы (в них интервал-делимое $\widetilde{a} = [a_1, a_2]$ одного и того же типа, а интервал-делитель $\widetilde{b} = [b_1, b_2]$ противоположного типа) различаются лишь тем, что выражение для нижней границы результата деления в одной формуле является выражением для верхней границы результата деления в другой формуле и наоборот.

7. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Обратимся к двум задачам, поставленным в п. 1. Будем решать эти задачи в условиях, когда обычные методы математического анализа, основанные на понятии предельного перехода в особую точку, не работают из-за отсутствия предела, так что получить решение невозможно даже для простейших особых точек – вида $0/0$. Поэтому для получения решения используем здесь принципиально иной подход, основанный на интервальной раздетерминизации, т. е. переходе от исходной детерминированной функции к соответствующей недетерминированной – интервальной путем замены детерминированных параметров исходной функции соответствующими интервальными параметрами. В полученной интервальной функции особым точкам вида $0/0$ и $a/0$ ($a \neq 0$) исходной детерминированной функции соответствуют особые интервальные точки $\widetilde{0}/\widetilde{0}$ и $\widetilde{a}/\widetilde{0}$ (при этом $\widetilde{0}$ – интервал, содержащий 0, $\widetilde{a}$ – интервал, не содержащий 0). После этого для решения задачи расчета функции следует вычислить значения функции во всех ее интервальных неособых точках, используя методы вычисления интервальных функций [3], и во всех интервальных особых точках, используя изложенные выше специальные методы вычислений. После этого совокупность проведенных вычислений с помощью предложенных ранее методов анализа [20] позволит выполнить анализ поведения имеющейся функции. Из всех указанных процедур новыми являются только процедуры нахождения интервальных функций в интервальных особых точках при помощи специальных методов вычислений (пп. 4–6). Ниже мы ограничимся демонстрацией выполнения только этих процедур при решении прикладных задач.

Пример 2. Найти решение следующей детерминированной системы линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{aligned}\right\}. \qquad (33)$$

Сразу видно, что в заданной детерминированной постановке система уравнений (33) не имеет решений, поскольку при равенстве левых частей обоих уравнений их правые части различны, так что эти уравнения противоречивы. О том же говорит и обычная алгебра: определитель системы (33)

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 3\cdot 4 = 0,$$

т. е. равен нулю, а производные от него определители D_1, D_2, полученные заменой 1-го и 2-го столбцов столбцом свободных членов,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 4 - 6\cdot 4 = -4,$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 3\cdot 5 = 3,$$

не равны 0, так что система (33) не имеет решений. Однако система (33) вполне может быть реалистичной, например, представлять собой результат повторных измерений одного и того же объекта, т. е. процесс последовательного накопления информации в некотором реальном объекте. Поэтому система (33) может иметь реальное решение, если постановку задачи изменить, приблизив ее к реальности. Этим изменением может быть более близкая к реальности совокупность недетерминированных (интервальных) коэффициентов уравнений, например, следующая: вместо $3 \to [2,4]$, вместо $4 \to [3,5]$, вместо $5 \to [4,6]$, вместо $6 \to [5,7]$, система (33) при этом запишется в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} [2,4]\tilde{x}_1 + [3,5]\tilde{x}_2 = [4,6] \\ [2,4]\tilde{x}_1 + [3,5]\tilde{x}_2 = [5,7] \end{aligned}\right\}. \qquad (34)$$

Под решением интервальной линейной системы уравнений (34) будем понимать интервальную версию выражений Крамера для системы уравнений (33), т. е.

$$\tilde{x}_1 = \left(\begin{vmatrix} [4,6] & [3,5] \\ [5,7] & [3,5] \end{vmatrix}\right) \Big/ \left(\begin{vmatrix} [2,4] & [3,5] \\ [2,4] & [3,5] \end{vmatrix}\right),$$

$$\tilde{x}_2 = \left(\begin{vmatrix} [2,4] & [4,6] \\ [2,4] & [5,7] \end{vmatrix}\right) \Big/ \left(\begin{vmatrix} [2,4] & [3,5] \\ [2,4] & [3,5] \end{vmatrix}\right). \qquad (35)$$

С использованием общих методов вычисления интервальной функции [3] вычисляем определители в правых частях (35)

$$\begin{vmatrix} [2,4] & [3,5] \\ [2,4] & [3,5] \end{vmatrix} = [2,4]\cdot[3,5] - [2,4]\cdot[3,5] =$$
$$= [2\cdot 3, 4\cdot 5] - [2\cdot 3, 4\cdot 5] = [6,20] - [6,20] = [-14,14];$$

$$\begin{vmatrix} [4,6] & [3,5] \\ [5,7] & [3,5] \end{vmatrix} = [4,6]\cdot[3,5] - [5,7]\cdot[3,5] =$$
$$= [4\cdot 3, 6\cdot 5] - [5\cdot 3, 7\cdot 5] = [12,30] - [15,35] = [-23,15];$$

$$\begin{vmatrix} [2,4] & [4,6] \\ [2,4] & [5,7] \end{vmatrix} = [2,4]\cdot[5,7] - [2,4]\cdot[4,6] =$$
$$= [2\cdot 5, 4\cdot 7] - [2\cdot 4, 4\cdot 6] = [10,28] - [8,24] = [-14,20]$$

Подставляя вычисленные определители в выражения (35) для $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, используя (19) для деления интервалов, содержащих нуль, и учитывая, что в выражении $\tilde{x}_1$ у делимого $a_1 = -23$, $a_2 = 15$, в выражении $\tilde{x}_2$ у делимого $a_1 = -14$, $a_2 = 20$, а также в обоих выражениях ширина делителя равна $b_2 - b_1 = 14 - (-14) = 28$, беря ширину выреза нуля в 10 % ширины делителя симметрично относительно нуля, т. е. $b_2' - b_1' = \beta(b_2 - b_1) = 0{,}1\cdot 28 = 2{,}8$, так что $b_1' = -1{,}4$, а $b_2' = 1{,}4$, находим значения $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_1 = [-23,15]/[-14,14] = [(-23/1{,}4) \wedge (15/-1{,}4), \\ &(-23/-1{,}4) \vee (15/1{,}4)] = [-16{,}4;\ 16{,}4]; \\ &\tilde{x}_2 = [-14,20]/[-14,14] = [(-14/1{,}4) \wedge (20/-1{,}4), \\ &(-14/-1{,}4) \vee (20/1{,}4)] = [-14{,}3;\ 14{,}3]. \end{aligned} \qquad (36)$$

Мы видим, что система линейных уравнений, которая в детерминированном варианте (33) не имела решения, после интервальной раздетерминизации приобретает форму (34), которая имеет решение (36).

8. ОБСУЖДЕНИЕ

Ранее мы убедились в том, что предложенная процедура раздетерминизации, т. е. переход от модели детерминированной системы к модели недетерминированной интервальной системы придает изучаемой системе новое важное свойство: в точках, в которых знаменатель функции-характеристики прежней системы обращался в нуль (особые точки), из-за чего характеристика в этих точках не существовала, знаменатель функции-характеристики новой системы равен интервалу, включающему, кроме нуля, бесконечное множество ненулевых значений, что делает возможным существование характеристики системы и в особых точках. Благодаря этому свойству предложенная очень простая процедура раздетерминизации, заключающаяся в замене детерминированных параметров характеристики рассматриваемой системы соответствующими интервальными параметрами, позволяет изучать исчерпывающим образом те системы, характеристики которых в базовой детерминированной модели не везде существуют. Примерами таких систем могут служить разнообразные неклассические информационные системы, применяемые в телеметрии, надежности, гуманитарных областях и т. д. Их особенность состоит в том, что они не могут быть описаны средствами классической детерминированной математики. Поэтому для их адекватного описания нужно либо придумать новый, адекватный проблеме математический аппарат, либо придумать новую математическую модель системы, поддающуюся адекватному описанию средствами какого-нибудь известного математического аппарата. Примером первого подхода может служить предложенный ранее для описания гуманитарных систем аппарат нечетких множеств [2], а примером второго подхода служит предложенный в этой статье раздетерминизационный подход.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен метод раздетерминизации для решения проблемы вычисления детерминированных функций, имеющих т. н. особые точки, в которых определенного значения у функции не существует. Предложенный метод состоит в переходе от проблемной детерминированной функции к соответствующей недетерминированной (в нашем случае, интервальной) функции путем замены детерминированных параметров функции соответствующими интервальными параметрами. Благодаря этому значения функции в особых точках становятся вполне определенными интервальными значениями, что и позволяет решить эту проблему.

Решение проблемы достигается легализацией деления на нуль путем интервализации вычислений. Предложенный нами подход к решению проблемы вычисления функций с особыми точками имеет важное значение для некоторых классов прикладных систем, в которых эта проблема существует. Такие системы встречаются в телеметрии, надежности, гуманитарной сфере и некоторых других областях, в которых не всегда применимы классические методы детерминистской математики, что заставляет искать новые подходы к решению возникающих в этих областях задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 2004. 350 с.
2. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.
3. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.
4. *Горбань И.И.* Феномен статистической устойчивости. Киев: Наукова Думка, 2014. 370 с.
5. *Wiener N.* Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. N. Y.: Technology Press and Wiley, 1949. 180 p.
6. *Колмогоров А.Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Известия АН СССР. Математика. 1941. № 5. С. 3-14.
7. *Канторович Л.В.* О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3. № 5. С. 3-14.
8. *Налимов В.В., Чернова Н.А.* Теория эксперимента. М.: Наука, 1971. 320 с.
9. *Нариньяни А.С.* Недоопределенность в системе представления и обработки знаний // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1986. № 5. С. 3-28.
10. *Hyvonen E.* Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach // Artificial Intelligence. 1992. V. 58. P. 19.
11. *Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.* Оптимизация в условиях неопределенности. М.: МЭИ – София; Техника, 1989. 226 с.
12. *Вощинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р.* Интервальный анализ данных // Заводская лаборатория. 1990. № 7. С. 76-81.
13. *Куржанский А.Б.* Задача идентификации – теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 75-89.
14. *Левин В.И.* Дискретная оптимизация в условиях неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 97-106.
15. *Левин В.И.* Булево линейное программирование с интервальными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 1994. № 7. С. 111-122.
16. *Левин В.И.* Интервальное дискретное программирование // Кибернетика и системный анализ. 1994. № 6. С. 92-103.
17. *Левин В.И.* Нелинейная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 2. С. 138-146.
18. *Левин В.И.* Методы оптимизации систем в условиях интервальной неопределенности параметров // Информационные технологии. 2012. № 4. С. 17-22.
19. *Левин В.И.* Методология оптимизации в условиях неопределенности методом детерминизации // Информационные технологии. 2014. № 5. С. 13-21.
20. *Левин В.И.* Анализ поведения неточно заданных функций с помощью интервально-дифференциального исчисления // Информационные технологии. 2015. Т. 21. № 3. С. 163-170.

Поступила в редакцию 29 июля 2016 г.

Левин Виталий Ильич, Пензенская государственная технологическая академия, г. Пенза, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, советник ректора по науке, заслуженный деятель науки РФ, e-mail: levin@pgta.ru

UDC 62-50; 519.7; 519.8
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-23-32

DEDETERMINATION – METHOD OF SOME MODELING PROBLEMS' SOLVING

© V.I. Levin
Penza State Technological University
1a/11 Gagarin St./Baidukov Dr., Penza, Russian Federation, 440039
E-mail: levin@pgta.ru

The method of dedetermination as a new method designed to solving problem of calculation of deterministic functions with the so-called singular points where the function does not take a certain value is proposed. The aim is to describe an approach that allows for division by zero and thus exclude singular points of such functions. The proposed method is to move from problematic (from point of view of calculating) exact function to the corresponding not determined (interval) function by replacing determined function parameters by corresponding interval parameters. Due to this change the values of the function at the singular points will be well-defined interval and values. Latter allows you to solve the problem of finding the function meaning. The solution to this problem is achieved by legalization of division by zero by intervalization of calculations. It uses the principle of cutting out a neighborhood of zero in the interval being denominator of the fraction representing studied function. For the simplified by cutting out interval function the effective formulas are derived based on the main provisions of interval mathematics and make it easy to calculate the value of this function. The proposed in the article approach to the problem of calculating functions with singular points is important for all classes of systems in which the problem really exists. It is about the systems which functions have any number of specific points. Such systems exist mostly in telemetry, reliability theory and practice, humanitarian and many others areas. Features of these areas is that they do not always apply the classical methods of deterministic mathematics. This leads to search for new approaches to solving problems that arise here.
Key words: interval; interval function; interval calculations; dedetermination; division by zero

REFERENCES

1. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostey* [The Theory of Probability Course]. Moscow, Nauka Publ., 2004, 350 p. (In Russian).
2. Zade L.A. *Ponyatie lingvisticheskoy peremennoy i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennykh resheniy* [Linguistic Variable Notion and its Appliance for Taking Approximate Solutions]. Moscow, Mir Publ., 1976, 165 p. (In Russian).
3. Alefel'd G., Khertsberger Yu. *Vvedenie v interval'nye vychisleniya* [Introduction in Interval Calculations]. Moscow, Mir Publ., 1987, 360 p. (In Russian).
4. Gorban' I.I. *Fenomen statisticheskoy ustoychivosti* [Phenomenon of Statistical Stability]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 2014, 370 p. (In Russian).
5. Wiener N. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. New York, Technology Press and Wiley, 1949, 180 p.
6. Kolmogorov A.N. Interpolirovanie i ekstrapolirovanie statsionarnykh sluchaynykh posledovatel'nostey [Interpolating and extrapolating of stationary random sequence]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Matematika* [News of Academy of Sciences of the USSR. Mathematics], 1941, no. 5, pp. 3-14. (In Russian).
7. Kantorovich L.V. O nekotorykh novykh podkhodakh k vychislitel'nym metodam i obrabotke nablyudeniy [About some new approaches to calculating methods and processing of observation results]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal – Siberian Mathematical Journal*, 1962, vol. 3, no. 5, pp. 3-14. (In Russian).
8. Nalimov V.V., Chernova N.A. *Teoriya eksperimenta* [Experiment Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 320 p. (In Russian).
9. Narin'yani A.S. Nedoopredelennost' v sisteme predstavleniya i obrabotki znaniy [Uncertainty in the system of presentation and processing of data]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [News of Academy of Sciences of the USSR. Technical Cybernetics], 1986, no. 5, pp. 3-28. (In Russian).
10. Hyvonen E. Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach. *Artificial Intelligence*, 1992, vol. 58, p. 19.
11. Voshchinin A.P., Sotirov G.R. *Optimizatsiya v usloviyakh neopredelennosti* [Optimization in Conditions of Uncertainty]. Moscow, Electronic-machinery institute–Sofiya; Tekhnika Publ., 1989, 226 p. (In Russian).
12. Voshchinin A.P., Bochkov A.F., Sotirov G.R. Interval'nyy analiz dannykh [Interval analysis of data]. *Zavodskaya laboratoriya – Industrial Laboratory*, 1990, no. 7, pp. 76-81. (In Russian).
13. Kurzhanskiy A.B. Zadacha identifikatsii – teoriya garantirovannykh otsenok [Identification task – theory of guaranteed estimation]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1991, no. 4, pp. 75-89. (In Russian).
14. Levin V.I. Diskretnaya optimizatsiya v usloviyakh neopredelennosti [Discrete optimization in the conditions of uncertainty]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control,* 1992, no. 7, pp. 97-106. (In Russian).

15. Levin V.I. Bulevo lineynoe programmirovanie s interval'nymi koeffitsientami [Boole linear simulation with interval coefficients]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control,* 1994, no. 7, pp. 111-122. (In Russian).
16. Levin V.I. Interval'noe diskretnoe programmirovanie [Interval discrete simulation]. *Kibernetika i sistemnyy analiz – Cybernetics and Systems Analysis*, 1994, no. 6, pp. 92-103. (In Russian).
17. Levin V.I. Nelineynaya optimizatsiya v usloviyakh interval'noy neopredelennosti [Non-linear optimization in the conditions of interval uncertainty]. *Kibernetika i sistemnyy analiz – Cybernetics and Systems Analysis*, 1999, no. 2, pp. 138-146. (In Russian).
18. Levin V.I. Metody optimizatsii sistem v usloviyakh interval'noy neopredelennosti parametrov [Systems optimization methods in conditions of interval uncertainty of parameters]. *Informatsionnye tekhnologii – Information Technology*, 2012, no. 4, pp. 17-22. (In Russian).
19. Levin V.I. Metodologiya optimizatsii v usloviyakh neopredelennosti metodom determinizatsii [The methodology of optimization in condition of uncertainty by determination method]. *Informatsionnye tekhnologii – Information Technology*, 2014, no. 5, pp. 13-21. (In Russian).
20. Levin V.I. Analiz povedeniya netochno zadannykh funktsiy s pomoshch'yu interval'no-differentsial'nogo ischisleniya [The analysis of inexactly specified functions by interval-differential calculus]. *Informatsionnye tekhnologii – Information Technology*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 163-170. (In Russian).

Received 29 July 2016

Levin Vitaliy Ilich, Penza State Technological Academy, Penza, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Science Advisor of Rector, Honored Worker of Science of Russian Federation, e-mail: levin@pgta.ru

Информация для цитирования:

Левин В.И. Раздетерминизация – метод решения некоторых задач моделирования // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 1. С. 23-32. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-23-32

Levin V.I. Razdeterminizatsiya – metod resheniya nekotorykh zadach modelirovaniya [Dedetermination – method of some modeling problems' solving]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 1, pp. 23-32. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-23-32 (In Russian).