УДК 51-72
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-19-22

ДВОЙСТВЕННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ПО НАХОЖДЕНИЮ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ УПРУГОЙ И ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТЕЙ

© Е.Е. Красновский[1], А.П. Черняев[2]
[1] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)
105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5
E-mail: ee_krasnovskiy@mail.ru
[2] Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Российская Федерация, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: chernyaev.alexandr2013@yandex.ru

Получена двойственная вариационная формулировка задачи по исследованию напряженно-деформированного состояния конструкции, изготовленной как из неоднородных жестко-пластических, так и из линейно упругих материалов. На основе вариационных принципов теории упругости и теории течения построены функционалы, обладающие экстремальными свойствами. Приведен пример расчета.
Ключевые слова: вариационные принципы теории упругости; вариационные принципы теории пластичности; жестко-пластическое тело; термомеханика; термоупругость; упругопластическое деформирование

Получить аналитическое решение задачи теории пластического течения довольно сложно. С практической же точки зрения не менее важно получить численные, хоть и приближенные значения нужных величин. При нахождении приближенного решения задачи возникают проблемы не только по разработке методов численного решения, но и по оценке точности полученных приближенных результатов. Существенный вклад в решение указанных проблем внесли вариационные методы. Вариационные постановки служат удобной основой для построения и теоретического обоснования многих расчетов сложных конструкций [1].

Преимуществами вариационного подхода являются как возможность эффективного поиска приближенного решения с помощью прямых методов, так и возможность оценки его погрешности. Для нахождения этой оценки следует построить два функционала – прямой и встречный, которые достигают альтернативных, но равных по значению экстремумов на точном решении задачи.

Суть двойственной вариационной формулировки задачи и состоит в построении этих двух функционалов. Используя разность их значений на приближенных решениях, можно рассчитать среднеквадратическую оценку погрешности приближенного решения.

Применение вариационных методов для исследования напряженно-деформированного состояния конструкции является актуальной задачей.

Например, в работах [2] и [3] приведены двойственные вариационные формулировки задач теории термоупругости и теории течения соответственно. В статье [4] построена двойственная вариационная постановка для задачи деформационной теории термопластичности тел с учетом анизотропии согласно модели, описанной в работах [5–6].

В работе [7] рассмотрены модификации управляющих уравнений линейной теории упругости, в результате чего алгебраическая формулировка закона Гука заменена на интегральную. Получена вариационная задача и предложены двусторонние оценки интегральных характеристик деформированного тела.

В монографии [8] даны вариационные постановки связанных краевых задач при внешних механических и тепловых воздействиях и представлены соотношения, определяющие поведение изотропных и анизотропных материалов при конечном деформировании.

В статье [9] рассмотрена задача о равновесии двумерного вязкоупругого тела, имеющего трещину и тонкое жесткое включение. Приведена эквивалентная вариационная постановка указанной задачи.

Работа [10] посвящена моделированию трехмерного деформирования неоднородных тел на базе вариационного принципа виртуальных скоростей и напряжений. При этом расчетная область состоит из частей с различными механическими свойствами.

В данной работе на основе приведенных в [2–3] вариационных принципов теории упругости и теории течения получена двойственная вариационная формулировка задачи по исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции, которая состоит как из неоднородных жестко-пластических, так и из линейно упругих материалов. В расчетах учитываются температурные напряжения в упругой области рассматриваемого тела. Для простоты объемными силами пренебрегаем.

Обозначим через $V = V_P + V_E$ объем рассматриваемого тела, где V_P и V_E – объемы, соответственно, жестко-пластической и упругой его областей. Обозначим через ∂V границу рассматриваемого тела, а через ∂V_P и ∂V_E – границы его жестко-пластической и упругой областей соответственно.

Математическая постановка указанной задачи имеет вид (здесь и далее принято правило суммирования по повторяющимся индексам, $i,j,k=1\ldots3$)

Уравнения

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=0 \text{ в областях } V_P \text{ и } V_E, \tag{1}$$

$$s_{ij}s_{ij}\le 2k^2 \text{ в области } V_P, \tag{2}$$

$$d\varepsilon_{ij}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\overline{d\varepsilon_И^p}}{\sigma_И}s_{ij} \text{ в области } V_P, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}-(3\lambda+2\mu)\alpha\Delta T\delta_{ij}$$

$$\text{в области } V_E, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \text{ в областях } V_P \text{ и } V_E, \tag{5}$$

$$d\varepsilon_{ij}\delta_{ij}=0 \text{ в области } V_P, \tag{6}$$

Граничные условия

$$\sigma_{ij}n_j=\overline{F}_i \text{ на } \partial V_F\subset\partial V, \tag{7}$$

$$du_i=d\overline{u}_i \text{ на } \partial V_U=\partial V\setminus\partial V_F, \tag{8}$$

где σ_{ij}, s_{ij} – компоненты тензора и девиатора напряжений соответственно; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций; u_i – компоненты вектора перемещений; $\sigma_И=\sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ – интенсивность напряжений; $\overline{d\varepsilon_И^p}=\sqrt{2d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$ – интенсивность приращений $d\varepsilon_{ij}^p$ пластических деформаций ε_{ij}^p; k – предел текучести материала при сдвиге; λ,μ – упругие постоянные Ламе; $\overline{F}_i$ – заданные компоненты поверхностной нагрузки; $\overline{u}_i$ – заданные приращения компонент вектора перемещений; ΔT – изменение температуры в точке тела по сравнению с первоначальной; δ_{ij} – символ Кронекера.

Соотношения (1) представляют собой уравнения равновесия, (2) выражают условия пластичности. Уравнения (3) представляют собой уравнения Сен-Венана–Леви–Мизеса для жестко-пластических материалов, записанные в приращениях деформаций и полученные умножением на dt уравнений типа $\xi_{11}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\xi_И}{\sigma_И}\cdot s_{11}$, взятых из [3]. Уравнение (4) представляет собой обобщенный закон Гука, а выражения (5) соответствуют соотношениям Коши. Уравнения (6) выражают условие несжимаемости.

Поставленную задачу (1)–(8) приведем к вариационной постановке. При этом будем предполагать, что компоненты вектора перемещений являются непрерывными функциями координат. Также будем считать, что по поверхности S_C контакта областей V_P и V_E нет разрывов ни в напряжениях, ни в перемещениях.

Докажем, что для поставленной задачи (1)–(8) прямой функционал

$$\begin{aligned}П_{P+E}&=\sqrt{2}\iiint_{V_P}k\sqrt{d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ij}}\,dV+\\&+\iiint_{V_E}\begin{pmatrix}\frac{\lambda}{2}(d\varepsilon_{kk})^2+\mu d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ij}-\\-(3\lambda+2\mu)\alpha\Delta T d\varepsilon_{kk}\end{pmatrix}dV-\iint_{\partial V_F}\overline{F}_i du_i dS,\end{aligned} \tag{9}$$

записанный в приращениях деформаций и перемещений, достигает минимума на ее точном решении. Функционал (9) можно рассматривать лишь на тех непрерывных полях приращений перемещений, которые удовлетворяют граничным условиям (7), а также условиям несжимаемости (6).

Для доказательства рассмотрим область V_E отдельно от области V_P, при этом воздействие области V_P заменяем силами $\overline{F}^P$, действующими по поверхности S_C. Для области V_E прямой функционал, записанный в приращениях деформаций и перемещений, имеет вид (под $(\partial V_E\setminus S_C)_F$ понимаем ту часть поверхности $\partial V_E\setminus S_C$, на которой заданы граничные условия на напряжения):

$$\begin{aligned}П_E&=\iiint_{V_E}\begin{pmatrix}\frac{\lambda}{2}(d\varepsilon_{kk})^2+\mu d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ij}-\\-(3\lambda+2\mu)\alpha\Delta T d\varepsilon_{kk}\end{pmatrix}dV-\\&-\iint_{(\partial V_E\setminus S_C)_F}\overline{F}_i du_i dS-\iint_{S_C}\overline{F}_i^P du_i dS.\end{aligned} \tag{10}$$

Для жестко-пластического тела в работах [2; 11] приведен и доказан вариационный принцип Маркова, записанный в скоростях. Этот принцип можно обобщить на случай неоднородного материала, внося его предел текучести при сдвиге под знак интеграла. Домножая функционал, выражающий принцип Маркова, на dt, получим функционал $П_P$ в приращениях деформаций и перемещений

$$\begin{aligned}П_P&=\sqrt{2}\iiint_{V_P}k\sqrt{d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ij}}\,dV-\iint_{(\partial V_P\setminus S_C)_F}\overline{F}_i du_i dS-\\&-\iint_{S_C}\overline{F}_i^E du_i dS.\end{aligned} \tag{11}$$

В функционале (11) силы $\overline{F}^E$ соответствуют воздействию области V_E на область V_P.

По III закону Ньютона силы, действующие на области V_P и V_E со стороны друг друга, равны по абсолютной величине, но противоположны по направлению. Поэтому при суммировании функционалов (10) и (11) интегралы по поверхности S_C взаимоуничтожаются.

Так как каждый из функционалов (10) и (11) достигает минимума на точном решении задачи для соответствующей области, а их сумма не зависит от распределений перемещений и напряжений по поверхности S_C, то построенный функционал (9) достигает минимума на точном решении поставленной задачи.

Функционал (9) можно обобщить на случай, когда касательная составляющая вектора перемещений в области V_P терпит разрыв.

Аналогичным образом путем суммирования соответствующих функционалов, взятых из работ [2–3], можно построить и встречный функционал W_{P+E}, который достигает максимума на точном решении задачи (1)–(8). Он имеет вид

$$W_{P+E} = -\iiint\limits_{V_E}\left(\frac{(\sigma_{kk})^2}{18K} + \sigma_{kk}\alpha\Delta T + \frac{s_{ij}s_{ij}}{4G}\right)dV + \iint\limits_{\partial V_U} d\sigma_{ij} n_j d\bar{u}_i S. \qquad (12)$$

Функционал (12) можно рассматривать лишь на тех полях напряжений, которые удовлетворяют уравнениям равновесия, граничным условиям (7) и не превосходят предела текучести в жестко-пластической области V_p.

В качестве примера в работе рассмотрена задача по нахождению НДС двустеночной цилиндрической оболочки, поперечное сечение которой находится в плоском деформированном состоянии.

Материал внутренней стенки оболочки рассматривается как неоднородный и находящийся в жестко-пластическом состоянии, а внешней стенки – как линейно упругий и находящийся при постоянной температуре. Оболочка нагружена внутренним давлением; ее наружная поверхность свободна.

Обозначим через p^* предельное внутреннее давление для внутренней стенки. Тогда оболочка имеет следующую схему работы.

1. Пока внутреннее давление меньше p^*, внутренняя стенка остается жестким телом, а вся конструкция – неподвижной.
2. Как только внутреннее давление начинает превышать p^*, то задачу можно рассматривать как задачу Ламе для внешней трубы, уменьшая при этом внутреннее давление на p^*.

Непротиворечивость такой схемы показана на примере задачи с однородной внутренней стенкой. Полученные результаты были сопоставлены с решениями, полученными при упрощающих допущениях (задачу рассматриваем как одномерную, напряженное состояние в стенках оболочки считаем одноосным).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розин Л.А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 223 с.
2. *Зарубин В.С.* Прикладные задачи термопрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 293 с.
3. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1967. 420 с.
4. *Зарубин В.С., Красновский Е.Е.* Двойственная вариационная постановка задачи деформационной теории термопластичности анизотропных тел // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2005. № 1 (16). С. 41-54.
5. *Кувыркин Г.Н., Темис Ю.М.* Прикладные задачи термопластичности и термоползучести // Машиностроение: энциклопедия. Т. 1–3. Кн. 1 / под общ. ред. К.С. Колесникова. М.: Машиностроение, 1994. С. 226-227.
6. *Геогджаев В.О.* К вопросу о теории упругопластической деформации анизотропных материалов // Известия вузов. Машиностроение. 1956. № 3–4. С. 9-13.
7. *Костин Г.В., Саурин В.В.* Интегро-дифференциальная постановка и вариационный метод решения задач линейной теории упругости // Проблемы прочности и пластичности. 2005. № 67. С. 190-198.
8. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 319 с.
9. *Попова Т.С.* Задача о равновесии вязкоупругого тела с трещиной и тонким жестким включением // Математические заметки СВФУ. 2014. Т. 21. № 2. С. 94-105.
10. *Горшков А.В., Спевак Л.Ф.* Решение трехмерных задач деформирования неоднородных областей методом разделения переменных, основанным на вариационной постановке // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2015. № 6-2. С. 218-223.
11. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

Поступила в редакцию 24 ноября 2016 г.

Красновский Евгений Ефимович, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика», e-mail: ee_krasnovskiy@mail.ru

Черняев Александр Петрович, Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, e-mail: chernyaev.alexandr2013@yandex.ru

Информация для цитирования:

Красновский Е.Е., Черняев А.П. Двойственная вариационная формулировка задачи по нахождению термонапряженного состояния конструкции, состоящей из упругой и жестко-пластической областей // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 1. С. 19-22. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-19-22

Krasnovskiy E.E., Chernyaev A.P. Dvoystvennaya variatsionnaya formulirovka zadachi po nakhozhdeniyu termonapryazhennogo sostoyaniya konstruktsii, sostoyashchey iz uprugoy i zhestko-plasticheskoy oblastey [Double variational adjustment for estimation of hot structural state, consisting of elastic and plastic-rigid area]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 1, pp. 19-22. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-19-22 (In Russian).

UDC 51-72
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-1-19-22

DOUBLE VARIATIONAL ADJUSTMENT FOR ESTIMATION OF HOT STRUCTURAL STATE, CONSISTING OF ELASTIC AND PLASTIC-RIGID AREA

© E.E. Krasnovskiy[1], A.P. Chernyaev[2]
[1] Bauman Moscow State Technical University
(National Research University)
5 2-ya Baumanskaya St., Moscow, Russian Federation, 105005
E-mail: ee_krasnovskiy@mail.ru
[2] Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
9 Institutskiy Ln., Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation, 141700
E-mail: chernyaev.alexandr2013@yandex.ru

The double variational adjustment on research of stress-strain behavior of construction, made of non-homogeneous plastic-rigid but also of linear elastic material is achieved. Basing on variational principles of elasticity theory and flow theory were built functionals, having extreme features. The example of calculation is given.
Key words: variational principles of elasticity theory; variational principles of plasticity theory; rigid plastic body; thermal mechanics; elastic plastic straining

REFERENCES

1. Rozin L.A. *Variatsionnye postanovki zadach dlya uprugikh system* [Variational Goals' Setting for Elastic Systems]. Leningrad, Pushkin Leningrad State University Publ., 1978, 223 p. (In Russian).
2. Zarubin V.S. *Prikladnye zadachi termoprochnosti elementov konstruktsiy* [Applied Tasks of Thermostability of Construction Elements]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985, 293 p. (In Russian).
3. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Basic Theory of Plasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 420 p. (In Russian).
4. Zarubin V.S., Krasnovskiy E.E. Dvoystvennaya variatsionnaya postanovka zadachi deformatsionnoy teorii termoplastichnosti anizotropnykh tel [Double variational statement of deformational theory of thermoplasticity of anisotropic body]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2005, no. 1 (16), pp. 41-54. (In Russian).
5. Kuvyrkin G.N., Temis Yu.M. Prikladnye zadachi termoplastichnosti i termopolzuchesti [Applied tasks of thermoplasticity and thermal creep]. *Mashinostroenie.* T. 1–3. Kn. 1 [Engineering. Vol. 1–3. Book. 1]. K.S. Kolesnikov (ed.). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1994, pp. 226-227. (In Russian).
6. Geogdzhaev V.O. K voprosu o teorii uprugoplasticheskoy deformatsii anizotropnykh materialov [To the issue of elastoplastic deformation of anisotropic materials]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie – Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 1956, no. 3–4, pp. 9-13. (In Russian).
7. Kostin G.V., Saurin V.V. Integro-differentsial'naya postanovka i variatsionnyy metod resheniya zadach lineynoy teorii uprugosti [An integro-differential formulation and a variational method of solving linear elasticity problems]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2005, no. 67, pp. 190-198. (In Russian).
8. Markin A.A., Sokolova M.Yu. *Termomekhanika uprugoplasticheskogo deformirovaniya* [Thermo-Mechanics of Elastic-Plastic Deformation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2013, 319 p. (In Russian).
9. Popova T.S. Zadacha o ravnovesii vyazkouprugogo tela s treshchinoy i tonkim zhestkim vklyucheniem [Task of viskoelastic body with fractures and thin rigid inclusion]. *Matematicheskie zametki Severo-Vostochnogo federal'nogo universiteta – Yakutian Mathematical Journal*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 94-105. (In Russian).
10. Gorshkov A.V., Spevak L.F. Reshenie trekhmernykh zadach deformirovaniya neodnorodnykh oblastey metodom razdeleniya peremennykh, osnovannym na variatsionnoy postanovke [Solution of three-dimensional deformation problems for heterogeneous areas using the variable separation method based on a variational formulation]. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy – International Journal of Applied and Fundamental Research*, 2015, no. 6-2, pp. 218-223. (In Russian).
11. Vasidzu K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variational Methods in Theory of Elasticity and Plasticity]. Moscow, Mir Publ., 1987, 542 p. (In Russian).

Received 24 November 2016

Krasnovskiy Evgeniy Efimovich, Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow, Russian Federation, Candidate of Technics, Associate Professor, Associate Professor of "Applied Mathematics" Department, e-mail: ee_krasnovskiy@mail.ru

Chernyaev Aleksander Petrovich, Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, e-mail: chernyaev.alexandr2013@yandex.ru