ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 152 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-338-345

УДК 517.938

Теоремы о возвращении для динамических систем в секвенциально компактном топологическом пространстве с инвариантной мерой Лебега

Сергей Михайлович ДЗЮБА

ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»

170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. Приведено свойство, достаточно полно характеризующее взаимоотношение движений динамической системы g^t, заданной в хаусдорфовом секвенциально компактном топологическом пространстве Γ. Отмечено, что в пространстве Γ с инвариантной (относительно g^t) мерой Лебега μ справедлив прямой аналог теоремы Пуанкаре–Каратеодори о возвращении множеств. Кроме того, показано, что если $\bar{\mathcal{M}}$ — замыкание объединения $\mathcal{M}$ всех минимальных множеств пространства Γ, то $\mu\bar{\mathcal{M}} = \mu\Gamma$, а через каждую точку $p \notin \mathcal{M}$ проходит движение $f(t,p)$, которое является и положительно, и отрицательно асимптотическим по отношению к компактным минимальным множествам $\Omega_p \subset \mathcal{M}$ и $\mathrm{A}_p \subset \mathcal{M}$. Если при этом Γ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то $\mu\mathcal{M} = \mu\Gamma$, т. е. в Γ имеет место важное дополнение к теореме Пуанкаре–Каратеодори о возвращении точек.

Ключевые слова: секвенциально компактное топологическое пространство, динамические системы, инвариантная мера Лебега, теоремы о возвращении точек и множеств

Для цитирования: *Дзюба С.М.* Теоремы о возвращении для динамических систем в секвенциально компактном топологическом пространстве с инвариантной мерой Лебега // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 152. С. 338–345.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-338-345

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-338-345

Recurrence theorems for dynamical systems in a sequentially compact topological space with invariant Lebesgue measure

Sergei M. DZYUBA

Tver State Technical University

22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. A property is presented that characterizes quite fully the interrelation of motions of a dynamical system g^t defined in a Hausdorff sequentially compact topological space Γ. It is noted that in the space Γ with an invariant (with respect to g^t) Lebesgue measure μ, a direct analogue of the Poincare–Caratheodory recurrence theorem for sets is valid. In addition, it is shown that if $\bar{\mathcal{M}}$ is the closure of the union $\mathcal{M}$ of all minimal sets of the space Γ, then $\mu\bar{\mathcal{M}} = \mu\Gamma$, and through each point $p \notin \mathcal{M}$ there passes a motion $f(t,p)$ that is both positively and negatively asymptotic with respect to the compact minimal sets $\Omega_p \subset \mathcal{M}$ and $\mathrm{A}_p \subset \mathcal{M}$. If Γ satisfies the second axiom of countability, then $\mu\mathcal{M} = \mu\Gamma$, i. e. in Γ, there is an important addition to the Poincare-Caratheodory theorem on the points recurrence.

Keywords: sequentially compact topological space, dynamical systems, invariant Lebesgue measure, theorems on the points and sets recurrence

Mathematics Subject Classification: 37B20.

For citation: Dzyuba S.M. Recurrence theorems for dynamical systems in a sequentially compact topological space with invariant Lebesgue measure. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:152 (2025), 338–345.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-338-345

Введение

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и пусть $\mathbb{R}$ — действительная ось $(-\infty, +\infty)$. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}\times\Sigma \to \Sigma$ и положим

$$f(t,p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

(c1) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R}\times\Sigma$;

(c2) для всех $p \in \Sigma$

$$g^0 p = p;$$

(c3) для всех $t, \tau \in \mathbb{R}$

$$g^{t+\tau} = g^t g^\tau.$$

Тогда будем говорить, что группа преобразований g^t — *динамическая система*, а для любого $p \in \Sigma$ функция $t \to f(t,p)$ — *движение* (см. [1, с. 347]).

Как было изначально заявлено Дж. Биркгофом, конечной целью общей теории динамических систем должно служить «качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями» (см. [2, с. 194]). Первые результаты построения такой теории Биркгоф свел вместе в [2, гл. VII]. Дальнейшее развитие этих результатов изложено в [1, гл. V].

Как ни покажется странным, с тех пор, до еще совсем недавнего прошлого, ничего принципиально нового в общей теории динамических систем получено не было (см., например, [3, с. 1–4]). Изменение в ситуации здесь мы свяжем с выходом статей [4–7], в которых существенным образом упрощено классическое представление о взаимоотношении движений как в произвольном метрическом, так и в некоторых топологических пространствах.

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие результатов статей [4–7], направленное на изучение аналогов теорем Пуанкаре–Каратеодори о возвращении множеств и точек для системы g^t в хаусдорфовом секвенциально компактном топологическом пространстве с инвариантной (относительно g^t) мерой Лебега.

1. Основные свойства динамических систем

Пусть Γ — хаусдорфово секвенциально компактное топологическое пространство и пусть на Γ задана полная однопараметрическая группа преобразований g^t, которая по определению удовлетворяет аксиомам (c1)–(c3) и поэтому представляет собой динамическую систему (см., например, [8, с. 150, 152]).

Как обычно, множество $A \subset \Gamma$ будем называть *инвариантным*, если для всех $t \in \mathbb{R}$

$$g^t A = A$$

(см. [1, с. 349]).

Для системы g^t в пространстве Γ примем основные определения общей теории динамических систем, изначально введенные Дж. Биркгофом на замкнутом дифференцируемом многообразии (см. [2, гл. VII]):

(d1) если $p \in \Gamma$, то ω*-предельным* множеством Ω_p движения $f(t,p)$ называется множество

$$\Omega_p = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau\geq t} f(\tau,p)};$$

(d2) если $p \in \Gamma$, то α*-предельным* множеством A_p движения $f(t,p)$ называется множество

$$\mathrm{A}_p = \bigcap_{t \le 0} \overline{\bigcup_{\tau \le t} f(\tau, p)};$$

(d3) множество $M \subset \Gamma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего теми же тремя свойствами;

(d4) любое движение $f(t,p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M, называется *рекуррентным.*

Нам также потребуются следующие известные определения (см., например, [1, с. 363]):

(d5) движение $f(t,p)$ называется *положительно асимптотическим* по отношению к множеству Ω_p, если $p \notin \Omega_p$; в противном случае говорят, что движение $f(t,p)$ *положительно устойчиво по Пуассону*;

(d6) движение $f(t,p)$ называется *отрицательно асимптотическим* по отношению к множеству A_p, если $p \notin \mathrm{A}_p$; в противном случае говорят, что движение $f(t,p)$ *отрицательно устойчиво по Пуассону.*

Заметим теперь, что рассматриваемое хаусдорфово секвенциально компактное топологическое пространство Γ является полуметризуемым пространством с отделимой структурой (см. [9, с. 458]). Поэтому везде в дальнейшем мы будем считать Γ именно полуметрическим пространством с отделимой структурой. Здесь необходимо отметить, что введение отделимой структуры в Γ является естественным, поскольку определение Биркгофа (d3) ее фактически требует. Что же касается секвенциальных свойств пространства Γ, то без них мы не можем ссылаться на результаты работы [6], основополагающие для дальнейших построений и существенно использующиеся в доказательствах теорем 1.1 и 2.2.

Напомним определения полуметрики и полуметрического пространства.

Топологическое пространство Γ называется *полуметрическим*, если топология в нем индуцирована направленным семейством полуметрик $(d_i)_{i \in I}$, где множество индексов I может иметь произвольную мощность (см., например, [9, с. 456]).

Функция $d_\gamma \colon \Gamma \times \Gamma \to [0, +\infty)$ называется *полуметрикой*, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

(s1) для всех $(p,q) \in \Gamma \times \Gamma$

$$d_\gamma(p,q) = d_\gamma(q,p);$$

(s2) для всех $p \in \Gamma$

$$d_\gamma(p,p) = 0$$

(при этом равенство $d_\gamma(p,q) = 0$ не исключается и в случае $q \ne p$);

(s3) для всех $p \in \Gamma$, $q \in \Gamma$ и $r \in \Gamma$ выполнено неравенство треугольника

$$d_\gamma(p,q) \le d_\gamma(p,r) + d_\gamma(r,q).$$

Семейство полуметрик $(d_i)_{i \in I}$ называется *направленным*, если для любого конечного подмножества $J \subset I$ найдется такое $k \in I$, что $d_k \ge d_j$ при всех $j \in J$.

Если для каждой пары $(p,q) \in \Gamma \times \Gamma$, $p \ne q$, в семействе $(d_i)_{i \in I}$ найдется такая полуметрика d_γ, что

$$d_\gamma(p,q) > 0,$$

то говорят, что пространство Γ снабжено *отделимой структурой* (см. [9, с. 456]).

Рекуррентные движения динамических систем в полуметрических пространствах были подробно исследованы в работе [6].

З а м е ч а н и е 1.1. Очевидно, что простейшим примером полуметрического пространства с отделимой структурой может служить метрическое пространство.

Покажем, что примером полуметризуемого пространства с отделимой структурой является топологическое многообразие V. Зафиксируем произвольную точку $x \in V$, некоторую ее окрестность E и зададим непрерывную функцию $\gamma\colon V \to [0, +\infty)$, такую, что $\gamma(p) > 0$, если $p \in E$, и $\gamma(p) = 0$ в противном случае. Тогда равенство

$$d_\gamma(p, q) = |\gamma(p) - \gamma(q)|$$

задает полуметрику d_γ на V (см. [9, с. 457]). Изменяя функцию γ, мы можем получать различные полуметрики d_γ. Значит, всегда можно построить семейство полуметрик $(d_i)_{i \in I_E}$, которое будет направленным. При этом всегда можно добиться того, что для двух любых точек $p \neq q$ нашлась полуметрика d_γ, для которой $d_\gamma(p, q) > 0$. Проделав эту процедуру на всех окрестностях E всех точек $x \in V$, мы превратим V в полуметрическое пространство с отделимой структурой, в котором топология $\mathcal{T}$ индуцирована семейством полуметрик $(d_i)_{i \in I}$. Более полно, множество $E \subset V$ открыто в топологии $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда вместе с каждой своей точкой x оно содержит некоторый шар

$$B_\gamma(x, \varepsilon) = \{p \in V\colon d_\gamma(x, p) < \varepsilon\}$$

(см. [9, с. 456]). Очевидно, что эта топология совпадает с исходной топологией, изначально введенной на V соответствующим атласом.

В силу введенной выше полуметрической структуры пространства Γ, мы можем использовать основной результат работы [6]. Используя его, установим в этом пространстве достаточно полную характеристику взаимоотношения движений системы g^t следующей теоремой.

Теорема 1.1. *Любое нерекуррентное движение $f(t, p)$, расположенное в Γ, является положительно и отрицательно асимптотическим по отношению к секвенциально компактным минимальным множествам Ω_p и A_p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(t, p)$ — произвольное движение, расположенное в Γ. Поскольку пространство Γ секвенциально компактно, согласно теореме 3.1 работы [6], оба множества Ω_p и A_p являются секвенциально компактными минимальными множествами. Это в силу определений (d3), (d5) и (d6) делает утверждение теоремы 1.1 очевидным. $\square$

З а м е ч а н и е 1.2. Вообще говоря, согласно теореме 1.1 любые попытки построения положительно (отрицательно) устойчивого по Пуассону нерекуррентного движения или предельного множества типа гомоклинического (гетероклинического) аттрактора динамической системы g^t лишены какого-либо смысла. В работе [4] приведены простейшие примеры, объясняющие причины возникающих здесь ошибок для системы g^t, заданной соответственно на торе и на круге. Для нас же значение теоремы 1.1 состоит в том, что на нее существенным образом опирается доказательство теоремы 2.2 о возвращении точек.

2. Теоремы о возвращении

По определению пространства Γ без каких-либо дополнительных условий можем принять, что в Γ определена некоторая мера Лебега μ (см., например, [10, с. 490–501]). Будем считать, что мера μ конечна и положительна, и заметим, что множество всех μ-измеримых подмножеств пространства Γ оказывается σ-алгеброй, зависящей, разумеется, от μ и содержащей борелевскую σ-алгебру (см., [10, с. 506]).

Рассмотрим динамическую систему g^t и предположим, что в Γ для g^t мера μ является инвариантной мерой. Другими словами, будем считать, что если A — произвольное измеримое множество, то для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\mu(g^t A) = \mu A.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть $A \subset \Gamma$ — произвольное измеримое множество положительной меры. Тогда найдется такая последовательность натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что для всех $k = 1, 2, \ldots$*

$$\mu(A \cap g^{N_k} A) > 0 \quad \text{и} \quad \mu(A \cap g^{-N_k} A) > 0.$$

Теорема 2.1 является очевидным прямым аналогом теоремы Пуанкаре–Каратеодори о возвращении множеств, и ее доказательство полностью совпадает с доказательством упомянутой теоремы (см., например, [1, с. 470, 471]).

Продолжая проводить аналогию с теоремой Пуанкаре–Каратеодори, заметим, что наряду с теоремой 2.1 справедлива также

Теорема 2.2. *Пусть $\bar{\mathcal{M}}$ — замыкание объединения $\mathcal{M}$ всех минимальных множеств пространства Γ. Тогда*

$$\mu\bar{\mathcal{M}} = \mu\Gamma,$$

а любое движение $f(t,p)$, расположенное в множестве $D = \Gamma \setminus \mathcal{M}$, является положительно и отрицательно асимптотическим по отношению к секвенциально компактным минимальным множествам $\Omega_p \subset \mathcal{M}$ и $\mathrm{A}_p \subset \mathcal{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, согласно теореме 1.1, множество $\bar{\mathcal{M}}$ непусто, компактно и потому измеримо.

Заметим теперь, что множество

$$E = \Gamma \setminus \bar{\mathcal{M}}$$

открыто. Предположим, что

$$\mu E > 0 \tag{2.1}$$

и приведем это предположение к противоречию.

В силу условия (2.1) существует такая собственная измеримая часть F множества E, что

$$\mu F > 0. \tag{2.2}$$

Докажем, что каждое такое множество для всех достаточно больших значений t удовлетворяет условию

$$F \neq g^t F. \tag{2.3}$$

Пусть p — произвольная точка множества F, которое удовлетворяет неравенству (2.2). Поскольку по построению

$$\mathcal{M} \cap F = \varnothing,$$

то согласно теореме 1.1 найдется такая окрестность $F_p \subset E$ точки p и такое $T > 0$, что

$$F_p \cap g^t F_p = \varnothing$$

для всех $t \geq T$. Отсюда и следует формула (2.3).

Если выполнено условие (2.2), то в силу теоремы 2.1 найдется такая последовательность натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что для всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\mu(F \cap g^{N_k} F) > 0.$$

Последнее, однако, невозможно, поскольку согласно соотношению (2.3) множество F не инвариантно, а в силу теоремы 1.1 через каждую точку $p \in F$ проходит нерекуррентное движение $f(t, p)$.

Полученное выше противоречие, очевидно, завершает доказательство. □

Следствие 2.1. *Если пространство* Γ *удовлетворяет второй аксиоме счетности, то*

$$\mu\mathcal{M} = \mu\Gamma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действуя как в [1, с. 471, 472], несложно показать, что почти для каждой точки $p \in \Gamma$ движение $f(t, p)$ устойчиво по Пуассону как положительно, так и отрицательно. Поэтому дальнейшее доказательство следствия 2.1 очевидно. □

З а м е ч а н и е 2.1. Вообще говоря, без каких-либо дополнительных условий мы не можем утверждать, что множества $\bar{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ всюду плотны в Γ (см. [1, с. 472]).

Как известно, теорема Пуанкаре–Каратеодори о возвращении точек утверждает, что в метрическом пространстве Σ со второй аксиомой счетности и инвариантной конечной мерой μ почти для каждой точки $p \in \Sigma$ движение $f(t, p)$ устойчиво по Пуассону и положительно, и отрицательно (см., например, [1, с. 471]), т. е. все указанные точки $p \in \Sigma$ могут быть точками компактных минимальных множеств.

Таким образом, теорема 2.2 и следствие 2.1 существенным образом дополняют упомянутую теорему о возвращении точек в хаусдорфовом секвенциально компактном пространстве Γ и, значит, в компактном пространстве Σ.

References

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[2] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].

[3] D. N. Cheban, *Asymptotically Almost Periodic Solutions of Differential Equations*, HPC Publ., New York, 2009.

[4] A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, "The interrelation of motions of dynamical systems in a metric space", *Lobachevskii J. Math.*, **43**:12 (2022), 3414–3419.

[5] S. M. Dzyuba, “On the interrelation of motions of dynamical systems on compact manifolds”, *Lobachevskii J. Math.*, **44**:7 (2023), 2630–2637.

[6] С. М. Дзюба, “О рекуррентных движениях динамических систем в полуметрическом пространстве”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:144 (2023), 371–382. [S. M. Dzyuba, “On the recurrent motions of dynamical systems in a semi-metric space”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 371–382 (In Russian)].

[7] С. М. Дзюба, “О рекуррентных движениях периодических процессов в секвенциально компактном топологическом пространстве”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:146 (2024), 138–148. [S. M. Dzyuba, “About recurrent motions of periodic processes in a sequentially compact topological space”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 138–148 (In Russian)].

[8] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, УРСС, М., 2009. [L. S. Pontryagin, *Topological Groups*, URSS Publ., Moscow, 2009 (In Russian)].

[9] Л. Шварц, *Анализ*. Т. II, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analisys*. V. II, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

[10] Л. Шварц, *Анализ*. Т. I, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analisys*. V. I, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

Информация об авторе

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 19.03.2025 г.
Поступила после рецензирования 02.09.2025 г.
Принята к публикации 21.11.2025 г.

Information about the author

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

There is no conflict of interests.

Received 19.03.2025
Reviewed 02.09.2025
Accepted for press 21.11.2025