ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 150 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Близорукова М.С., Максимов В.И., 2025

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-97-109

УДК 517.977.56

О динамическом восстановлении возмущения системы уравнений с распределенными параметрами

Марина Сергеевна БЛИЗОРУКОВА, Вячеслав Иванович МАКСИМОВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук

620077, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

Аннотация. Рассматривается задача динамического восстановления возмущений, действующих на нелинейную систему, состоящую из двух взаимосвязанных уравнений параболического вида. В предположении, что в дискретные моменты времени измеряется (с ошибкой) решение системы, указывается алгоритм решения указанной задачи. Алгоритм, основанный на идеологии теории управления с обратной связью, является устойчивым к информационным помехам и погрешностям вычислений. Приводится оценка скорости сходимости алгоритма.

Ключевые слова: система с распределенными параметрами, динамическое восстановление возмущения

Благодарности: Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2025-1549).

Для цитирования: *Близорукова М.С., Максимов В.И.* О динамическом восстановлении возмущения системы уравнений с распределенными параметрами // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 150. С. 97–109. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-97-109

SCIENTIFIC ARTICLE

© M. S. Blizorukova, V. I. Maksimov, 2025

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-97-109

On dynamic reconstruction of a disturbances in distributed parameter systems

Marina S. BLIZORUKOVA, Vyacheslav I. MAKSIMOV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620077, Russian Federation

Abstract. The problem of dynamic reconstruction of disturbances acting on a nonlinear system composed of two coupled parabolic-type equations is under consideration. Assuming that a solution of the system is measured (with errors) at discrete times, an algorithm for solving the problem is proposed. The algorithm, based on the principles of feedback control theory, is shown to be robust with respect to informational noises and computational inaccuracies. An estimate of the convergence rate of the algorithm is provided.

Keywords: distributed parameter system, dynamic disturbance reconstruction

Acknowledgements: The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement no. 075-02-2025-1549).

Mathematics Subject Classification: 33R30, 35Q93, 93B30.

For citation: Blizorukova M.S., Maksimov V.I. On dynamic reconstruction of a disturbances in distributed parameter systems. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:150 (2025), 97–109. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-97-109

Введение

Исследуется задача восстановления распределенных входных воздействий (возмущений) системы уравнений с распределенными параметрами по результатам неточных измерений решения. Предполагается, что на заданном конечном временном интервале рассматривается нелинейная система, состоящая из двух взаимосвязанных уравнений параболического типа. На систему действует неизвестное возмущение. Необходимо построить алгоритм восстановления этого возмущения. При этом в дискретные (достаточно частые) моменты времени решение системы измеряется с ошибкой. Точное восстановление соответствующего возмущения, вообще говоря, невозможно в силу погрешности измерений. Поэтому мы предполагаем построить некоторую его аппроксимацию. Потребуем, чтобы аппроксимация была сколь угодно близка к восстанавливаемому входу при условии достаточной малости измерительных ошибок и расстояния между моментами измерений решения. Описанная задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем и, в более общем контексте, вкладывается в проблематику теории некорректных задач. Суть развиваемой в данной работе методики состоит в том, что алгоритм восстановления представляется в виде алгоритма управления некоторой вспомогательной динамической системой — моделью. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени «аппроксимирует» неизвестный вход.

1. Постановка задачи

Задана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &x_t(t,\eta) - D_1\Delta x(t,\eta) + k_1 x(t,\eta)y(t,\eta) = 0, \quad (t,\eta) \in Q, \\ &y_t(t,\eta) - D_2\Delta y(t,\eta) + k_2 x(t,\eta)y(t,\eta) = v(t,\eta) + f(t,\eta), \quad (t,\eta) \in Q, \end{aligned} \tag{1.1}$$

с краевыми

$$\partial_\nu x(t,s) = 0, \quad \partial_\nu y(t,s) = 0, \quad (t,s) \in \Sigma,$$

и начальными

$$x(0,\eta) = x_0(\eta), \quad y(0,\eta) = y_0(\eta), \quad \eta \in \Omega,$$

условиями. Здесь $Q = T \times \Omega$, $\Sigma = T \times \partial\Omega$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $T = [0,\vartheta]$, $\vartheta > 0$, $v(t,\eta)$, $(t,\eta) \in Q$ — возмущающее воздействие, $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ — константы, ∂_ν — производная по внешней нормали к границе области Ω.

Функции $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ описывают концентрацию двух субстанций, D_1, D_2 и k_1, k_2 — коэффициенты диффузии и реакции. Ниже полагаем, что $x_0 = x_0(\eta) \in H^1(\Omega)$, $y_0 = y_0(\eta) \in H^1(\Omega)$ — неотрицательные функции, возмущение $v(t)$ при п. в. $t \in T$ принадлежит множеству

$$P = \{v \in L_2(\Omega) : v_1(\eta) \leq v(\eta) \leq v_2(\eta) \quad \text{при п. в.} \quad \eta \in \Omega\},$$

где $v_1, v_2 \in L_\infty(\Omega)$, $v_1(\eta) \leq v_2(\eta)$ при п. в. $\eta \in \Omega$. Функцию $f(\cdot) \in L_\infty(T;H)$, $H = L_2(\Omega)$, предполагаем известной, а функции $v(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)$ неизвестными. Таким образом, множество ограничений на возмущение предполагается неизвестным. Неизвестны также постоянные k_1 и D_1, а также функция $x_0(\cdot)$.

Обозначим через $H^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega)$ пространства Соболева. В дальнейшем нам потребуется пространство

$$W(T) = \{x(\cdot) \in L_2(T;H^2(\Omega)) : x_t(\cdot) \in L_2(T;H)\}$$

с нормой

$$|x|_{W(T)} = \Big\{ \int\limits_0^\vartheta \big(|x(t)|^2_{H^2(\Omega)} + |x_t(t)|^2_H \big)\, dt \Big\}^{1/2}.$$

Таким образом, $W(T)$ означает пространство функций из $L_2(T; H^2(\Omega))$, обобщенные производные которых являются элементами пространства $L_2(T; H)$. Заметим, что пространство $W(T)$ непрерывно и плотно вложено в пространство $C(T; H^1(\Omega)) \subset C(T; L_p(\Omega))$, $1 \le p < +\infty$, непрерывных функций, действующих из T в $H^1(\Omega)$. Поэтому найдется константа $c^* > 0$ такая, что для всех $x(\cdot) \in W(T)$ верно неравенство

$$|x(\cdot)|_{C(T;H^1(\Omega))} \le c^* |x(\cdot)|_{W(T)}.$$

Пространство $W(T)$ также вложено компактно (см. [1, с. 33]) в $L_p(Q)$, $1 \le p < +\infty$.

В дальнейшем предполагаем выполненным

У с л о в и е 1.1. $0 \le v_1(\eta) + f(t, \eta)$ при п. в. $(t, \eta) \in Q$.

Подчеркнем, что известна функция $f(\cdot)$ и не известна функция $v_1(\cdot)$. Однако полагаем, что она такова, что выполнено условие 1.1.

Справедлива (см. [2])

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие 1.1. Тогда для любых* $v(\cdot) \in P(\cdot) = \{\tilde v(\cdot) \in L_2(T; H) : \tilde v(t) \in P$ *при п. в.* $t \in T\}$ *существует единственное неотрицательное решение* $\{x(\cdot), y(\cdot)\} \in W(T) \times W(T)$ *системы* (1.1), *удовлетворяющее неравенству*

$$|x(\cdot)|^2_{W(T)} + |y(\cdot)|^2_{W(T)} \le c(1 + |x_0|^2_{H^1(\Omega)} + |y_0|^2_{H^1(\Omega)} + |v(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} + |f(\cdot)|^2_{L_2(T;H)}),$$

где $c > 0$ *константа, не зависящая от* $x_0, y_0, v(\cdot)$ *и* $f(\cdot)$.

Всюду ниже используются обозначения: $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, y_0, v(\cdot))$, $y(\cdot) = y(\cdot; x_0, y_0, v(\cdot))$ — решение системы (1.1), порожденное возмущением $v(\cdot)$, ∇x — градиент функции $x \in H^1(\Omega)$, т. е. $\nabla x = \{\partial x/\partial \eta_1, \partial x/\partial \eta_2\}$, $\eta = \{\eta_1, \eta_2\} \in \Omega$, $|\nabla x|^2 = \partial^2 x/\partial \eta_1^2 + \partial^2 x/\partial \eta_2^2$. Норма в пространстве $H^1(\Omega)$ задается следующим образом

$$|x|_{H^1(\Omega)} = \Big(\int\limits_\Omega \big\{ x^2(\eta) + |\nabla x(\eta)|^2 \big\}\, d\eta \Big)^{1/2}.$$

Рассматриваемая в работе задача состоит в следующем. Имеется система (1.1) с неизвестным возмущением $v(\cdot) \subset P(\cdot)$. Это возмущение, а также отвечающее ему решение $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ априори не известны. В моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $i \in [0 : m-1]$, $\tau_i = 0$, $\tau_m = \vartheta$, измеряется (с ошибкой) решение системы (1.1); а именно вычисляются величины $\xi_i^h \in L_4(\Omega)$ и $\psi_i^h \in L_4(\Omega)$ со свойствами:

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h|_H \le h, \quad |y(\tau_i) - \psi_i^h|_H \le h. \tag{1.2}$$

Здесь $h \in (0, 1)$ величина погрешности измерений. Требуется указать алгоритм вычисления в «реальном времени» возмущения $v(\cdot)$. Такова содержательная постановка.

Таким образом, задача состоит в построении алгоритма приближенного восстановления неизвестного возмущения $v(\cdot)$ (по результатам неточных измерений решения системы

(1.1)), который обладал бы свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности алгоритма означает, что построенные с его помощью приближения $u^h(\cdot)$ текущих значений возмущения $v(\cdot)$ вырабатываются в реальном времени. Свойство устойчивости алгоритма означает, что приближение $u^h(\cdot)$ сколь угодно точно, если точность измерений достаточно высока (значение h и расстояние между временами измерения τ_i решения достаточно малы).

Задача относится к классу задач динамического обращения систем с возмущением; искомый алгоритм может быть классифицирован как алгоритм устойчивого динамического обращения (динамической регуляризации). Первый из алгоритмов динамического обращения, основанный на известном в теории гарантированного управления принципе экстремального сдвига [3], был предложен в работе [4]. Впоследствии данный алгоритм был развит в ряде работ (см., например, монографии [5, 6], обзорную [7] и журнальные статьи [8–10], а также последнюю по времени публикации статью [11], в которой рассматривалась задача (аналогичная обсуждаемой в данной работе) для другой системы параболического типа. В соответствии с описанным в цитированных выше работах методом задача восстановления неизвестного возмущения заменяется некоторой другой задачей, а именно, задачей позиционного управления вспомогательной системой (уравнением), называемой моделью. При этом задача восстановления сводится к следующим двум задачам:

а) задаче выбора модели, функционирующей «синхронно» с реальной системой (уравнением) и

б) задаче выбора закона формирования управления моделью по принципу обратной связи.

Перейдем к строгой постановке рассматриваемой задачи, воспользовавшись подходом, развитым в работах, цитированных выше. Пусть фиксировано семейство разбиений отрезка T :

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \delta(h) = \tau_{h,i+1} - \tau_{h,i} < 1.$$

Обозначим

$$\xi^h(t) = \xi_i^h, \quad \psi^h(t) = \psi_i^h \quad \text{при п. в.} \quad t \in \delta_i \quad \text{и всех} \quad i \in [0 : m-1].$$

Здесь и всюду ниже $m = m_h$, $\delta = \delta(h)$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$.

В качестве модели возьмем параболическое уравнение

$$w_t^h(t,\eta) - D_2 \Delta w^h(t,\eta) + k_2 \xi^h(t,\eta)\psi^h(t,\eta) = u^h(t,\eta) + f(t,\eta), \quad (t,\eta) \in Q, \tag{1.3}$$

с краевым

$$\partial_\nu w^h(t,s) = 0, \quad (t,s) \in \Sigma,$$

и начальным

$$w^h(0,\eta) = y_0(\eta), \quad \eta \in \Omega,$$

условиями. Существование и единственность решения $w^h(\cdot) \in W(T)$ следует, например, из [12, теорема 5.5]. Кроме того, из этой же теоремы следует, что при всех $t \in T$ имеет место неравенство

$$|w^h(t)|_H + \int_0^t |w^h(s)|^2_{H^1(\Omega)}\, ds + \int_0^t |\dot{w}^h(s)|^2_H\, ds \le c^{(0)}\Big(1 + |y_0|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^t |u^h(s)|^2_H\, ds\Big). \tag{1.4}$$

Роль управления в модели играет функция $u^h(\cdot)$.

Задача восстановления возмущения. Требуется указать такой алгоритм вычисления управления $u^h(\cdot)$ в правой части уравнения (1.3) по принципу обратной связи

$$u^h(t) = u_i^h(\tau_i, \xi_i^h, \psi_i^h, \Psi_i^h,) \quad \text{при п. в.} \quad t \in \delta_i \quad \text{и всех} \quad i \in [0 : m-1], \tag{1.5}$$

что имеет место сходимость

$$u^h(\cdot) \to v(\cdot) \ \text{ в } \ L_2(T; H) \ \text{ при } \ h \to 0.$$

Здесь $\Psi_i^h \in H$ — результаты неточных измерений состояний $w^h(\tau_i) = w^h(\tau_i; x_0, u^h(\cdot))$:

$$|\Psi_i^h - w^h(\tau_i)|_H \le h, \quad i \in [1 : m-1], \quad m = m_h, \tag{1.6}$$

$\Psi_0^h = y_0$, $w^h(\cdot) = w^h(\cdot; y_0, u^h(\cdot))$ — решение уравнения (1.3), порожденное управлением $u^h(\cdot)$, формируемым по принципу обратной связи (1.5).

Прежде чем перейти к описанию алгоритма решения, заметим, что $t \to \xi^h(t)\psi^h(t) \subset L_2(T; H)$. Кроме того, как нетрудно видеть, для решения $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, y_0, v(\cdot))$, $y(\cdot) = y(\cdot; x_0, y_0, v(\cdot))$ системы (1.1) равномерно по всем $h \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$, $v(\cdot) \in P(\cdot)$ справедливо неравенство

$$\int_0^\vartheta \left| x(t)y(t) - \xi^h(t)\psi^h(t) \right|_H^2 dt \le c_0(h^2 + \delta), \tag{1.7}$$

где постоянная c_0 не зависит от h и δ.

2. Алгоритм решения

Возьмем некоторую функцию $\alpha = \alpha(h) : (0, 1) \to (0, 1)$ такую, что $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину погрешности измерения h. Вместе с ней фиксируются число $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta = \Delta_h$. Работа алгоритма разбивается на $m - 1$ ($m = m_h$) идентичных шагов. При осуществлении i-го шага на промежутке $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ ($\tau_i = \tau_{h,i}$) сначала (в момент τ_i) находится элемент

$$u_i^h = u_i^h(\tau_i, \psi_i^h, \Psi_i^h) = \arg\min \left\{ (\Psi_i^h - \psi_i^h, u) + \tfrac{1}{2}\alpha|u|_H^2 : u \in H \right\} = \alpha^{-1}(\psi_i^h - \Psi_i^h). \tag{2.1}$$

Здесь и всюду в дальнейшем символ $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H. После этого при $t \in \delta_i$ на вход уравнения (1.3) подается управление

$$u^h(t) = u_i^h + u_i^{h1}, \tag{2.2}$$

где $u_i^{h1} = 2(\psi_i^h - \Psi_i^h)$. В результате действия этого управления на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ реализуется $w^h(t)$ — решение уравнения (1.3). На $(i + 1)$-м шаге аналогичные действия повторяются. Работа алгоритма осуществляется до момента ϑ.

В дальнейшем нам потребуется дискретное неравенство Гронуолла.

Лемма 2.1. *Пусть* $0 \le \phi_j$, $0 \le f_j$ *при* $j \in [0 : m]$ u $f_j \le f_{j+1}$ *при* $j \in [0 : m-1]$. *Тогда неравенства*

$$\phi_{j+1} \le c_0\delta \sum_{i=1}^{j} \phi_i + f_j, \quad j \in [1 : m-1]$$

влекут неравенства

$$\phi_{j+1} \le f_j \exp\{c_0 j\delta\}, \quad j \in [0 : m-1],$$

если $c_0 = \mathrm{const} > 0$, $\phi_1 \le f_0$.

Теорема 2.1. *Пусть управление* $u^h(\cdot)$ *в уравнении* (1.3) *находится по правилу* (2.1), (2.2). *Пусть также* $\delta(h)\alpha^{-2}(h) < 1$ *при всех* $h \in (0,1)$. *Тогда верны неравенства*

$$\varepsilon(t) \le d_1(\alpha + h^2\delta^{-1}), \quad t \in T, \tag{2.3}$$

$$|\tilde{u}^h(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} \le |v(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} + d_2\rho(h,\delta,\alpha). \tag{2.4}$$

Здесь $\tilde{u}^h(t) = u^h_i$ *при п. в.* $t \in \delta_i$, $i \in [0 : m-1]$, $\rho(h,\delta,\alpha) = \alpha + h^2(\alpha\delta)^{-1} + \delta\alpha^{-2}$, $\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$,

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2}|\mu^h(t)|^2_H + D_2 \int_0^t \int_\Omega |\nabla\mu^h(\eta,\tau)|^2 \, d\eta \, d\tau,$$

$\mu^h(t) = w^h(t) - y(t)$, $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ *и* $w^h(\cdot)$ *— решения системы* (1.1) *и уравнения* (1.3) *соответственно,* d_1 *и* d_2 *положительные постоянные, не зависящие от* $v(\cdot), u^h(\cdot), x(\cdot), y(\cdot)$ *и* $w^h(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы оценим изменение величины

$$\varepsilon_h(t) = \varepsilon(t) + \frac{1}{2}\alpha \int_0^t \{|\tilde{u}^h(s)|^2_H - |v(s)|^2_H\} \, ds.$$

Вычтем второе уравнение системы (1.1) из уравнения (1.3) и умножим полученную разность скалярно (в H) на $\mu^h(t)$. В результате получим

$$\mu^h(0) = 0,$$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d|\mu^h(t)|^2_H}{dt} + D_2 \int_\Omega |\nabla\mu^h(\eta,t)|^2 \, d\eta = I^h_{1t} + I^h_{2t} + I^h_{3t}, \tag{2.5}$$

где

$$I^h_{1t} = -k_2(\xi^h(t)\psi^h(t) - x(t)y(t), \mu^h(t)) = -k_2 \int_\Omega (\xi^h(t,\eta)\psi^h(t,\eta) - x(t,\eta)y(t,\eta))\mu^h(t,\eta) \, d\eta,$$

$$I^h_{2t} = (\tilde{u}^h(t) - v(t), \mu^h(t)), \quad I^h_{3t} = 2(u^{h1}(t), \mu^h(t)), \quad u^{h1}(t) = u^{h1}_i \text{ при п. в. } t \in \delta_i.$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$\dot{\varepsilon}_h(t) = \dot{\varepsilon}(t) + \frac{1}{2}\alpha\{|\tilde{u}^h(t)|^2_H - |v(t)|^2_H\} \quad \text{при п. в.} \quad t \in T. \tag{2.6}$$

В силу теоремы 2.1, неравенств (1.7) и (1.4) при всех $t \in T$ справедлива оценка

$$I^h_{1t} \le k_2|\xi^h(t)\psi^h(t) - x(t)y(t)|_H|\mu^h(t)|_H \le \Phi_h(t) + \frac{1}{2}|\mu^h(t)|^2_H, \tag{2.7}$$

где

$$\Phi_h(t) = \frac{1}{2}k_2^2|\xi^h(t)\psi^h(t) - x(t)y(t)|_H^2.$$

Также несложно заметить, что при п. в. $t \in \delta_i$ справедливо неравенство

$$I_{2t}^h \le (\tilde{u}^h(t) - v(t), \Psi_i^h - \psi_i^h)_H + \varrho_i(t,h). \tag{2.8}$$

Здесь

$$\varrho_i(t,h) = (|\tilde{u}^h(t)|_H + |v(t)|_H)(2h + \int_{\tau_i}^{t} \{|\dot{w}^h(\tau)|_H + |\dot{y}(\tau)|_H\}\, d\tau).$$

Из (2.5), (2.8) и (2.6) вытекает верное при п. в. $t \in \delta_i$ неравенство

$$\dot{\varepsilon}_h(t) \le \left(\tilde{u}^h(t), \Psi_i^h - \psi_i^h\right)_H + \frac{1}{2}\alpha|\tilde{u}^h(t)|_H^2 - \left(v(t), \Psi_i^h - \psi_i^h\right)_H - \frac{1}{2}\alpha|v(t)|_H^2 + \varrho_i(t,h) + I_{1t}^h + I_{3t}^h. \tag{2.9}$$

Заметим, что при почти всех $t \in \delta_i$

$$I_{3t}^h = 2(\psi_i^h - \Psi_i^h, \mu^h(t)) = 2(\psi_i^h - y(\tau_i), \mu^h(t)) - 2(\Psi_i^h - w^h(\tau_i), \mu^h(t)) - 2(\mu^h(\tau_i), \mu^h(t)).$$

При этом

$$-2(\mu^h(\tau_i), \mu^h(t)) = -2|\mu^h(t)|_H^2 + 2(\mu^h(t) - \mu^h(\tau_i), \mu^h(t)).$$

Поэтому

$$|I_{3t}^h| \le 4h|\mu^h(t)|_H - 2|\mu^h(t)|_H^2 + 2|(\mu^h(t) - \mu^h(\tau_i), \mu^h(t))|.$$

Далее, имеем

$$4h|\mu^h(t)|_H \le 8h^2 + \frac{1}{2}|\mu^h(t)|_H^2, 2|(\mu^h(t) - \mu^h(\tau_i), \mu^h(t))| = 2\Big|\Big(\int_{\tau_i}^{t} \{\dot{w}^h(s) - \dot{y}(s)\}\, ds, \mu^h(t)\Big)\Big| \le 2\delta \int_{\tau_i}^{t} \{|\dot{w}^h(s)|_H^2 + |\dot{y}(s)|_H^2\}\, ds + |\mu^h(t)|_H^2.$$

Таким образом, при почти всех $t \in \delta_i$

$$|I_{3t}^h| \le 2\delta \int_{\tau_i}^{t} \left\{|\dot{w}^h(s)|_H^2 + |\dot{y}(s)|_H^2\right\} ds + 8h^2 - \frac{1}{2}|\mu^h(t)|_H^2. \tag{2.10}$$

Из (2.7) и (2.10) получим при $t \in \delta_i$

$$I_{1t}^h + I_{3t}^h \le 8h^2 + \Phi_h(t) + 2\delta \int_{\tau_i}^{t} \{|\dot{w}^h(s)|_H^2 + |\dot{y}(s)|_H^2\}\, ds. \tag{2.11}$$

В таком случае ввиду (2.1), (2.2), (2.9) при п. в. $t \in \delta_i$ имеет место неравенство

$$\dot{\varepsilon}_h(t) \le \rho_i(t,h) + I_{1h}^h + I_{3i}^h.$$

Значит, в силу (2.11) при п. в. $t \in \delta_i$ выполнено

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} \Big[\{|\tilde{u}^h(\tau)|_H + |v(\tau)|_H\}\{2h + \int_{\tau_i}^{t} (|\dot{x}^h(s)|_H + |\dot{x}_1(s)|_H) ds\} \Big] d\tau + \int_{\tau_i}^{t} \{I^h_{1s} + I^h_{3s}\}\, ds$$

$$\le \varepsilon_h(\tau_i) + c_2 h^2 + c_3 \delta \int_{\tau_i}^{t} \{|\tilde{u}^h(s)|^2_H + |v(s)|^2_H\} ds + c_4 \delta \int_{\tau_i}^{t} \{|\dot{w}^h(\tau)|^2_H + |\dot{y}(\tau)|^2_H\}\, d\tau + \int_{\tau_i}^{t} \Phi_h(s)\, ds.$$

Воспользовавшись теоремой 2.1, равенством $\varepsilon_h(0) = 0$, а также включением $v(\cdot) \in L_2(T; H)$ и неравенствами (1.7) и (1.4), получим при $t \in T$

$$\varepsilon_h(t) \le c_5 h^2 \delta^{-1} + c_6 \delta \Big(1 + \int_0^t |\tilde{u}^h(s)|^2_H\, ds + \int_0^t |u^{h1}(s)|^2_H\, ds \Big). \tag{2.12}$$

Ввиду (1.2), (1.6), а также способа формирования управлений u^h_i и u^{h1}_i (см. (2.1)), имеем

$$|u^h_i|^2_H \le c_7 (|\mu^h(\tau_i)|^2_H + h^2)\alpha^{-2}, \quad |u^{h1}_i|^2_H \le 4\{2h + |\mu^h(\tau_i)|_H\}^2. \tag{2.13}$$

Следовательно, учитывая (2.13) и (2.12), а также (1.7) и неравенства $\alpha(h) < 1$, $\delta(h) < 1$, получаем

$$|\mu^h(\tau_i)|^2_H \le c_8 h^2 \delta^{-1} + c_9 \delta + c_{10}\alpha + c_{11}\delta^2\alpha^{-2} \sum_{j=0}^{i-1} (h^2 + |\mu^h(\tau_j)|^2_H)$$

$$\le c_{12}(\alpha + \delta + h^2\delta^{-1} + h^2\delta\alpha^{-2}) + c_{11}\delta^2\alpha^{-2} \sum_{j=0}^{i-1} |\mu^h(\tau_j)|^2_H.$$

В силу леммы 2.1, а также неравенства $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \le \mathrm{const}$ при всех $h \in (0,1)$ имеем

$$|\mu^h(\tau_i)|^2_H \le c_{13}(\alpha + h^2\delta^{-1}) \exp\{c_{11}\vartheta\delta\alpha^{-2}\} \le c_{14}(h^2\delta^{-1} + \alpha), \quad i \in [0:m]. \tag{2.14}$$

Неравенства (2.14) и (2.13) влекут неравенства

$$\delta \int_0^t |u^{h1}(s)|^2_H ds \le \delta^2 \sum_{j=0}^{i} |u^{h1}_i|^2_H \le c_{15}\delta \max_{j\in[0:i]} (h^2 + |\mu^h(\tau_j)|^2_H) \le c_{16}\delta^2(h^2\delta^{-1} + \alpha), \tag{2.15}$$

$$\delta \int_0^t |\tilde{u}^h(s)|^2_H\, ds \le \delta^2 \sum_{j=0}^{i} |u^h_i|^2_H \le c_{17}\delta\alpha^{-2} \max_{j\in[0:i]} (h^2 + |\mu^h(\tau_j)|^2_H)$$

$$\le c_{18}\delta\alpha^{-2}(h^2\delta^{-1} + \alpha), \quad t \in \delta_i. \tag{2.16}$$

В таком случае, из (2.15), (2.16) и (2.12) выводим

$$\varepsilon(t) \le c_{19}(h^2\delta^{-1} + \alpha). \tag{2.17}$$

Неравенство (2.3) следует из (2.17). В силу (2.12) и (2.16) также верно неравенство

$$\varepsilon_h(t) \le c_{20}h^2\delta^{-1} + c_{21}\delta\alpha^{-2}(h^2\delta^{-1} + \alpha). \tag{2.18}$$

Неравенство (2.4) вытекает из (2.18). □

Из доказанной теоремы вытекает основной результат работы — следующая

Теорема 2.2. *Пусть* $\alpha(h) \to 0$, $\delta(h) \to 0$, $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \to 0$, $h^2(\alpha(h)\delta(h))^{-1} \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда имеет место сходимость*

$$\tilde{u}^h(\cdot) \to v(\cdot) \ \text{ в } \ L_2(T;H) \ \text{ при } \ h \to 0.$$

Доказательство этой теоремы проводится по стандартной схеме (см., например, [6], доказательство теоремы 1.2.3 или [11], доказательство теоремы 8).

3. Оценка скорости сходимости алгоритма

При некоторых дополнительных условиях можно указать оценку скорости сходимости алгоритма (см. теорему 3.1 ниже).

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3.1. [6, с. 29] *Пусть* $V(\cdot) \in L_\infty(T_*;V^*)$ *и* $\tilde{v}(\cdot) \in W(T_*;V)$, $T_* = [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\Big| \int_a^t V(\tau)\,d\tau \Big|_{V^*} \le \varepsilon_*, \quad |\tilde{v}(t)|_V \le K \quad \forall t \in T_*.$$

Тогда для всех $t \in T_*$ *справедливо неравенство*

$$\Big| \int_a^t \langle V(\tau), \tilde{v}(\tau)\rangle_V \,d\tau \Big| \le \varepsilon_*(K + \operatorname{var}(T_*;\tilde{v}(\cdot))).$$

В этом утверждении V — банахово пространство с нормой $|\cdot|_V$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — двойственность между V и V^*. Символ $\operatorname{var}(T_*;v(\cdot))$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T_*, а символ $W(T_*;V)$ — множество функций $y(\cdot): T_* \to V$ ограниченной вариации.

Теорема 3.1. *Пусть* $v(\cdot) \in W(T;H^1(\Omega))$ *и пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма:*

$$|v(\cdot) - \tilde{u}^h(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} \le c^{(0)}\{\alpha^{1/2}(h) + h\delta^{-1/2}(h)\} + c^{(1)}\rho(h,\delta(h),\alpha(h)),$$

где $c^{(0)}, c^{(1)}$ — *некоторые положительные постоянные, не зависящие от* $h \in (0,1)$, δ *и* α.

Доказательство. Введем линейный непрерывный оператор

$$A: H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))^*, \quad \langle Aw_1, w_2\rangle_{H^1} = \int_\Omega \nabla w_1(\eta)\nabla w_2(\eta)\,d\eta, \quad w_1, w_2 \in H^1(\Omega).$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1}$ означает двойственность между $H^1(\Omega)$ и $(H^1(\Omega))^*$.

Вычтем второе уравнение системы (1.1) из (1.3) и умножим полученную разность на $\phi \in H^1(\Omega)$. После интегрирования устанавливаем неравенство

$$\Big| \Big\langle \int_{t_1}^{t_2} \{\tilde{u}^h(\tau) - v(\tau)\}\,d\tau, \varphi \Big\rangle_{H^1} \Big| \le \sum_{j=1}^4 |J^h_{jt}(\varphi)|, \tag{3.1}$$

справедливое при всех $0 \le t_1 < t_2 \le \vartheta$. Здесь

$$J^h_{1t}(\varphi) = \langle \mu^h(t_2) - \mu^h(t_1), \varphi\rangle_{H^1}, \quad J^h_{2t}(\varphi) = D_2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle A\mu^h(t), \varphi\rangle_{H^1}\, dt,$$

$$J^h_{3t}(\varphi) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle \xi^h(\tau)\psi^h(\tau) - x(\tau)y(\tau), \varphi\rangle_{H^1}\, d\tau, \quad J^h_{4t}(\varphi) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle u^{h1}(t), \varphi\rangle_{H^1}\, d\tau.$$

Из (3.1) следует неравенство

$$\Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} \{\tilde u^h(\tau) - v(\tau)\} d\tau \Big|_{(H^1(\Omega))^*} \le C_1 \{ |\mu^h(t_2)|_{(H^1(\Omega))^*} + |\mu^h(t_1)|_{(H^1(\Omega))^*}$$
$$+ D_2 \int\limits_{t_1}^{t_2} |A\mu^h(t)|_{(H^1(\Omega))^*}\, dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} |x(t)y(t) - \psi^h(t)\xi^h(t)|_{(H^1(\Omega))^*}\, dt. \quad (3.2)$$

Обозначим

$$|w|^2_{H^1_0(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla w(\eta)|^2\, d\eta, \quad w \in H^1(\Omega).$$

Заметим, что

$$|\cdot|^2_{H^1(\Omega)} = |\cdot|^2_{H^1_0(\Omega)} + |\cdot|^2_H.$$

Поэтому, воспользовавшись теоремой 2.2 (см. (2.3)), получаем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} |A\mu^h(t)|_{(H^1(\Omega))^*}\, dt \le C_2 \Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} |\mu^h(t)|^2_{H^1(\Omega)}\, dt \Big)^{1/2} \le C_3(\alpha + h^2\delta^{-1})^{1/2}. \quad (3.3)$$

Объединив (1.7) с (3.3), учитывая непрерывность вложения H в $(H^1(\Omega))^*$, а также неравенство $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \le \text{const}$, получим из (3.2)

$$\Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} \{\tilde u^h(\tau) - v(\tau)\}\, d\tau \Big|_{(H^1(\Omega))^*} \le C_4(\alpha^{1/2} + h\delta^{-1/2}). \quad (3.4)$$

Далее, воспользовавшись известным свойством троек Гельфанда, а также неравенствами (2.4), (3.4) и леммой 3.1, устанавливаем неравенство

$$|\tilde u^h(\cdot) - v(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} \le |\tilde u^h(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} - 2 \int\limits_0^\vartheta (\tilde u^h(s), v(s))\, ds + |v(\cdot)|^2_{L_2(T;H)}$$
$$\le 2 \Big| \int\limits_0^\vartheta \langle \tilde u^h(s) - v(s), v(s)\rangle_{H^1}\, ds \Big| + d_2\rho(h,\alpha,\delta) \le C_5\{\alpha^{1/2} + h\delta^{-1/2}\} + d_2\rho(h,\alpha,\delta). \quad (3.5)$$

Утверждение теоремы следует из (3.5). □

References

[1] Ж.-Л. Лионс, *Управление сингулярными распределенными системами*, Наука, М., 1987; франц. пер.:J.-L. Lions, *Contrôle des Systèmes Distribués Singuliers*, Gauthier Villars, Paris, 1983.

[2] R. Griesse, "Parametric sensitivity analysis in optimal control of a reaction diffusion system. I. Solution differentiability", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **25**:1–2 (2004), 93-117.

[3] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974; англ. пер.:N. Krasovskii, A. Subbotin, *Game-Theoretical Control Problems*, Springer, Berlin, 1988.

[4] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, "О моделировании управления в динамической системе", *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*, 1983, №2, 51–60; англ. пер.:A. V. Kryazhimskiy, Yu. S. Osipov, "Modelling of a control in a dynamic system", *Engrg. Cybernetics*, **21**:2 (1983), 38–47.

[5] Yu. S. Osipov, A. V. Kryazhimskii, *Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions*, Gordon and Breach, London, 1995.

[6] Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, В. И. Максимов, *Методы динамического восстановления входов управляемых систем*, Изд-во УрО РАН, Екатеринбург, 2011. [Yu. S. Osipov, A. V. Kryazhimsky, V. I. Maksimov, *Methods of Dynamic Restoration of Inputs of Controlled Systems*, Publishing house of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 2011 (In Russian)].

[7] V. I. Maksimov, "The methods of dynamical reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations", *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **29**:1 (2021), 125–156.

[8] Yu. S. Osipov, V. I. Maksimov, "On dynamical input reconstruction in a distributed second order equation", *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **29**:5 (2021), 707–719.

[9] М. С. Близорукова, "О динамической реконструкции входа управляемой системы", *Дифференциальные уравнения*, **50**:7 (2014), 859–864; англ. пер.:M. S. Blizorukova, "On the dynamic reconstruction of the input of a control system", *Differential Equations*, **50**:7 (2014), 847–853.

[10] V. I. Maksimov, "On a stable solution of the dynamical reconstruction and tracking control problems for coupled ordinary differential equation-heat equation", *Mathematical Control and Related Fields*, **14**:1 (2024), 322–345.

[11] В. И. Максимов, Ю. С. Осипов, "Экстремальный сдвиг в задаче отслеживания возмущения параболического включения, описывающего двухфазную задачу Стефана", Труды Института математики и механики УрО РАН, **30**, №3, 2024, 191–206; англ. пер.:V. I. Maksimov, Yu. S. Osipov, "Extremal shift in the problem of tracking a disturbance in a parabolic inclusion describing the two-phase Stefan problem", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **327**, Suppl. 1 (2024), S182–S197.

[12] F. Tröltzsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications*, AMS, Providence, Rhode Island, 2010.

Информация об авторах

Близорукова Марина Сергеевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: msb@imm.uran.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1728-1270

Information about the authors

Marina S. Blizorukova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation. E-mail: msb@imm.uran.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1728-1270

Максимов Вячеслав Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий отделом. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: maksimov@imm.uran.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5643-7998

Поступила в редакцию 19.05.2025 г.
Поступила после рецензирования 04.06.2025 г.
Принята к публикации 06.06.2025 г.

Vyacheslav I. Maksimov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation. E-mail: maksimov@imm.uran.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5643-7998

Received 19.05.2025
Reviewed 04.06.2025
Accepted for press 06.06.2025