

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-679-684

УДК 517.92

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

© Г. Г. Петросян¹⁾, О. Ю. Королева²⁾

¹⁾ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»
394043, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86

E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

²⁾ МБОУ СОШ № 51 г. Воронеж
394019, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Загородная, 66
E-mail: korolevamatematika@mail.ru

Аннотация. В докладе приводится задача управляемости для дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве

Ключевые слова: дифференциальное включение дробного порядка; неподвижная точка; уплотняющее отображение; мера некомпактности

Введение

Исследование управляемых систем с нелинейными звеньями является важным разделом современной математической теории управления, имеющим многочисленные приложения (см. работы [1–3]). В свою очередь, развитие теории дифференциальных включений, связано с тем, что они являются удобным и естественным аппаратом для описания управляемых систем различных классов (см. статьи [4–6]). Один из наилучших аппаратов для изучения такого рода задач, предоставляют методы многозначного и нелинейного анализа, которые выделяются как очень мощные, эффективные и полезные (см. монографию [7]).

Мы будем рассматривать задачу управляемости для системы, описываемой полулинейным дифференциальным включением с дробной производной в банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^\alpha y(t) \in Ay(t) + F(t, y(t)) + Bu(t), \quad t \in [0, T] = I, \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проект № 1.3464.2017 / 4.6).

с начальным условием:

$$y(0) = x_0, \quad (2)$$

где $D^\alpha, 0 < \alpha < 1$, – дробная производная Капуто, $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ – линейный замкнутый оператор в E , порождающий ограниченную C_0 -полугруппу $\{T(t)\}$, $t \geq 0$, $F: [0, T] \times E \rightrightarrows E$ – мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями, удовлетворяющее условиям:

(F1) мультифункция $F(\cdot, y): [0, T] \rightrightarrows E$ допускает измеримое сечение для всех $y \in E$;

(F2) мультиотображение $F(t, \cdot): E \rightrightarrows E$ – полунепрерывно сверху (п.н.св.) для п. в. $t \in I$;

(F3) существует функция $w \in L^\infty([0, T])$ такая, что:

$$\|F(t, y)\| := \sup \{\|f\|_E : f \in F(t, y)\} \leq w(t)(1 + \|y\|_E), \text{ п. в. } t \in [0, T],$$

для всех $y \in E$;

(F4) существует функция $\mu \in L^\infty([0, T])$ такая, что для любого ограниченного множества $Q \subset E$, мы имеем:

$$\chi_E(F(t, Q)) \leq \mu(t)\chi_E(Q), \text{ п. в. } t \in [0, T],$$

где χ_E – мера некомпактности Хаусдорфа в E .

Начальное значение $x_0 \in E$ и функция управления $u(\cdot) \in L^p(I, U)$, $p > 1/\alpha$, где U – гильбертово пространство управлений. Оператор $B: U \rightarrow E$ является ограниченным и линейным.

1. Основные понятия

О п р е д е л е н и е 1. Интегральным решением задачи (1)–(2) на промежутке $[0, T]$ называется функция $y \in C([0, T]; E)$:

$$y(t) = \mathcal{G}(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) (f(s, y(s)) + Bu(s)) ds, \quad t \in [0, T],$$

где $f(s, y(s)) \in F(s, y(s))$,

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta) T(t^q \theta) d\theta, \quad \mathcal{T}(t) = q \int_0^\infty \theta \xi_q(\theta) T(t^q \theta) d\theta,$$

$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q} \theta^{-1-\frac{1}{q}} \Psi_q(\theta^{-1/q}),$$

$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{-qn-1} \frac{\Gamma(nq+1)}{n!} \sin(n\pi q), \theta \in \mathbb{R}_+.$$

Наша основная задача управляемости может быть описана следующим образом.

Для заданного начального условия $x_0 \in E$ и заданного $x_1 \in E$ мы будем рассматривать существование решения $y \in C([0, T]; E)$ задачи (1)–(2) и управления $u \in L^p(I, U)$ такого, что:

$$y(T) = x_1. \quad (3)$$

Сделаем стандартное предположение о разрешимости соответствующей линейной задачи управляемости, для этого будем полагать, что линейный оператор управления $W : L^p(I, U) \rightarrow E$ следующего вида:

$$Wu = \int_0^T \mathcal{T}(T-s)(T-s)^{\alpha-1} Bu(s) ds,$$

имеет обратный ограниченный оператор $W^{-1} : E \rightarrow L^p(I, U)$ и удовлетворяет следующему условию регулярности:

(W) найдется функция $\gamma \in L^\infty(I, E)$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset E$, мы имеем:

$$\chi_U(W^{-1}(\Omega)(t)) \leq \gamma(t)\chi_E(\Omega) \quad \text{для п. в. } t \in [0, T],$$

где χ_U – мера некомпактности Хаусдорфа в U .

Рассмотрим мультиоператор $G : C([0, T]; E) \multimap C([0, T]; E)$:

$$G(y)(t) = \mathcal{G}(t)x_0 +$$

$$\int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) \left(f(s, y(s)) + BW^{-1} \left(x_1 - \mathcal{G}(t)x_0 - \int_0^T (T-s)^{q-1} \mathcal{T}(T-s) f(s, y(s)) ds \right) (s) \right) ds.$$

Можно показать, что функция $y \in C([0, T]; E)$ – интегральное решение задачи (1)–(3) на промежутке $[0, T]$, тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора G .

Теорема 1. *Мультиоператор G является п.н.св.*

Теорема 2. *Мультиоператор G является уплотняющим относительно меры некомпактности в пространстве $C([0, T]; E)$.*

2. Основные результаты

Теорема 3. *При выполнении условий (A), (F1) – (F4), (W) множество решений задачи (1)–(3) на $[0, T]$ непусто и компактно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces // Fixed Point Theory. 2017. Vol. 18. № 1. P. 269-292.
2. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space // Applicable Analysis. 2017. Vol. 96. P. 1-21.

3. *Обуховский В.В., Петросян Г.Г.* О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2013. № 1. С. 192-209.

4. *Петросян Г.Г., Афанасова М.С.* О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2017. № 1. С. 135-151.

5. *Петросян Г.Г.* О нелокальной задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в банаховом пространстве // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2012. № 2. С. 207-212.

6. *Petrosyan G.G.* On the structure of the solutions set of the Cauchy problem for a differential inclusions of fractional order in a Banach space // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Воронеж, 2016. С. 7-8.

7. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.

Поступила в редакцию 9 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 15 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Петросян Гарик Гагикович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Королева Оксана Юрьевна, МБОУ СОШ № 51, г. Воронеж, Российская Федерация, учитель математики, e-mail: korolevamatematika@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-679-684

ON A CONTROLLABILITY PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL INCLUSION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES OF CAPUTO

G. G. Petrosyan¹⁾, O. Yu. Koroleva²⁾

¹⁾ Voronezh State Pedagogical University
86 Lenin St., Voronezh 394043, Russian Federation
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

²⁾ School No. 51
66 Zagorodnaya St., Voronezh 394019, Russian Federation
E-mail: korolevamatematika@mail.ru

Abstract. The paper gives the controllability problem for a differential inclusion of fractional order in a Banach space.

Keywords: differential inclusion of fractional order; fixed point; condensing map; measure of noncompactness

REFERENCES

1. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces. *Fixed Point Theory*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 269-292.
2. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space. *Applicable Analysis*, 2017, vol. 96, pp. 1-21.
3. Obukhovskiy V.V., Petrosyan G.G. O zadache Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo vklucheniya drobnogo poryadka s impul'snymi kharakteristikami v banakhovom prostranstve [On the Cauchy problem for functional differential inclusions of fractional order with impulsive characteristics in a banach space]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 192-209. (In Russian).
4. Petrosyan G.G., Afanasova M.S. O zadache Koshi dlya differentsial'nogo vklucheniya drobnogo poryadka s nelineynym granichnym usloviyem [On the Cauchy problem for a differential inclusion of fractional order with nonlinear boundary conditions]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 135-151. (In Russian).
5. Petrosyan G.G. O nelokal'noy zadache Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s drobnoy proizvodnoy v banakhovom prostranstve [On a nonlocal Cauchy problem for functional differential equations with fractional derivative in the banach space]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 207-212. (In Russian).

The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the frameworks of the project part of the state work quota (Project No 1.3464.2017/4.6)

6. Petrosyan G.G. On the structure of the solutions set of the Cauchy problem for a differential inclusions of fractional order in a Banach space. *Nekotorye voprosy analiza, algebry, geometrii i matematicheskogo obrazovaniya* [Some Questions of Analysis, Algebra, Geometry and Mathematical Education]. Voronezh, 2016, pp. 7-8. (In Russian).

7. Borisovich Yu.G., Guelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskiy B.V. *Vvedeniye v teoriyu mnogoznachnykh otobazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to The Theory of Many-Valued Separations and Differential Inclusions]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2011. (In Russian).

Received 9 April 2018

Reviewed 15 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Petrosyan Garik Gagikovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Koroleva Oxana Yur'evna, School No. 51, Voronezh, the Russian Federation, Teacher of Mathematics, e-mail: korolevamatematika@mail.ru

For citation: Petrosyan G.G, Koroleva O.Yu. Ob odnoy zadache upravlyaemosti dlya differentsial'nogo vklyucheniya s drobnoy proizvodnoy Kaputo [On a controllability problem for a differential inclusion with fractional derivatives of Caputo]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 679–684. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-679-684 (In Russian, Abstr. in Engl.).