

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-539-546

УДК 517.929

О РАЗРЕШИМОСТИ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЕНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© И. М. Плаксина

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
E-mail: atp@pstu.ru, impl@list.ru

Аннотация. В предлагаемой работе получены условия однозначной разрешимости линейного функционально-дифференциального уравнения первого порядка, сингулярного по независимой переменной, содержащего сингулярный коэффициент и отклонение аргумента специального вида.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; сингулярное уравнение; линейное дифференциальное уравнение; задача Коши; оператор Че-заро; разрешимость

Введение

В предлагаемой работе рассматривается линейное функционально-дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x}(t) + a(t)x_h(t) + (Tx)(t) = f(t), \quad t \in (0, b], \quad (0.1)$$

$$\text{где } x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & \text{если } h(t) \in [0, b] \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [0, b] \end{cases}.$$

Уравнение (0.1) содержит несуммируемый коэффициент $a: (0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и является сингулярным по независимой переменной, сингулярность сосредоточена в точке $t = 0$. Коэффициент a растет в окрестности нуля с той же скоростью, что и функция $kt^{-\alpha}$, $\alpha > 1$. Отклонение $h(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow 0+$ так же, как функция t^β , $\beta > 1$. Вид линейного оператора T будет определен ниже.

В статье получены условия разрешимости уравнения (0.1) при любой правой части и найдена константа $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$, такая, что весовое начальное условие

$$\lim_{t \rightarrow 0+} t^\gamma x(t) = 0 \quad (0.2)$$

гарантирует единственность решения уравнения (0.1).

При исследовании уравнения (0.1) применялась методика абстрактного функционально-дифференциального уравнения, основные положения которой приведены, например, в книге [1]. Также использовались свойства оператора Чезаро [2–4]. Эти же способы применялись в статьях [5–7].

Отметим, что уравнение (0.1) может быть записано как уравнение с запаздыванием на отрицательной полуоси. Вопросам разрешимости таких уравнений посвящены работы [8–10]. Сингулярные функционально-дифференциальные уравнения также изучались в работах И.Т. Кигурадзе, З.П. Сохадзе, Р. Хакла, А. Ронто, В. Пилипенко. Подробный библиографический обзор приведен в работе [11].

1. Пространства

Положим $p \in (1, \infty)$. Определим пространство L^p функций $z: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, таких, что $\|z\|_{L^p}^p = \int_0^b |z(t)|^p dt < \infty$. Также определим пространство D_0^p абсолютно непрерывных функций $y: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих производную в пространстве L^p и удовлетворяющих дополнительному условию $y(0) = 0$. Норма в этом пространстве имеет вид $\|y\|_{D_0^p} = \|\dot{y}\|_{L^p}$. Далее, определим пространство $L^p(\gamma)$ функций f , таких, что $t^\gamma f(t) \in L^p$, с нормой $\|f\|_{L^p(\gamma)} = \|t^\gamma f(t)\|_{L^p}$. Наконец, определим пространство $D_0^p(\gamma)$ функций x , таких, что $t^\gamma x(t) \in D_0^p$, с нормой $\|x\|_{D_0^p(\gamma)} = \|t^\gamma x(t)\|_{D_0^p}$.

2. Постановка задачи

Уравнение (0.1) будем рассматривать в следующих предположениях.

Коэффициент $a(t)$ асимптотически стремится к $\frac{k}{t^\alpha}$, то есть представим в виде $a(t) = \frac{k}{t^\alpha} + \tilde{a}(t)$, где $\alpha > 1$ и функция $\tilde{a}$ такова, что:

- 1) $\lim_{t \rightarrow 0+} t^\alpha \tilde{a}(t) = 0$;
- 2) $\tilde{a} \in L^p[\varepsilon, b]$ для всех значений $0 < \varepsilon < b$;
- 3) $\tilde{a} \in L[0, b]$.

Кроме того, будем считать, что

$$t^{(\alpha p - 1)/p} \tilde{a}(t) \in L^p. \quad (2.1)$$

Отклонение $h: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством $h(t) = t^\beta \tilde{h}(t)$. Здесь $\beta > 1$ и измеримая функция $\tilde{h}$ такова, что справедливы оценки $0 < m_{\tilde{h}} \leq \tilde{h}(t) \leq M_{\tilde{h}} < \infty$ при всех $t \in [0, b]$. Далее, функция h имеет обратную функцию g , представимую в виде $g(t) = t^{1/\beta} \tilde{g}(t)$, где при всех $t \in [0, b]$ выполняются неравенства $0 < m_{\tilde{g}} \leq \tilde{g}(t) \leq M_{\tilde{g}} < \infty$.

Вполне непрерывный линейный оператор $T: D_0^p(\gamma) \rightarrow L^p(\gamma)$ определяется равенством $(Tx)(t) = P(t)x_H(t)$, где $P \in L^p(\gamma)$; $x_H(t) = \begin{cases} x[H(t)], & \text{если } H(t) \in [0, b] \\ 0, & \text{если } H(t) \notin [0, b] \end{cases}$, функция $H: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима, причем $H(t) \leq t$.

Пусть $f \in L^p(\gamma)$. Решение уравнения (0.1) будем искать в пространстве $D_0^p(\gamma)$.

Положим

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{\beta - 1} - \frac{1}{p}. \quad (2.2)$$

Отметим, что так как $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, то $\gamma < \frac{p-1}{p}$.

3. Вспомогательные результаты

Определим на пространстве L^p операторы A и B вида $(Az)(t) = \frac{k}{t^\alpha} \int_0^{h(t)} \left(\frac{t}{s}\right)^\gamma z(s) ds$

и $(Bz)(t) = \tilde{a}(t) \int_0^{h(t)} \left(\frac{t}{s}\right)^\gamma z(s) ds$ соответственно.

Лемма 3.1. *Оператор A ограничен в пространстве L^p , причем имеет место оценка $\|A\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq |k| \vartheta$, где*

$$\vartheta^p = \left(\frac{\beta-1}{\alpha-1}\right)^p \frac{1}{\beta} M_h^{(\alpha-1)(p-1)/(\beta-1)} m_{\tilde{g}}^{(1-\alpha)\beta/(\beta-1)}. \quad (3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся тестом Шура [12, с. 33; 4]. Тест Шура представляет собой полуэффективный признак, заключающийся в том, что существование неотрицательной функции $v_1(t)$ и положительной функции $v_2(s)$, таких, что $\left[\int_0^b |K(t,s)| v_2(s) ds\right]^{p-1} \leq \mu_1 v_1(t)$ и $\int_0^b |K(t,s)| v_1(t) dt \leq \mu_2 [v_2(s)]^{p-1}$, гарантирует ограниченность в пространстве L^p интегрального оператора K вида $(Kz)(t) = \int_0^b K(t,s) z(s) ds$ и оценку его нормы $\|K\|_{L^p \rightarrow L^p}^p \leq \mu_1 \mu_2$.

Положим $v_1(t) = t^{(1-p)/p}$ и $v_2(s) = s^{-1/p}$. Получим $\mu_1 = \left[|k| \frac{\beta-1}{\alpha-1} M_h^{(\alpha-1)/(\beta-1)}\right]^{p-1}$ и $\mu_2 = |k| \frac{\beta-1}{\alpha-1} \frac{1}{\beta} m_{\tilde{g}}^{(1-\alpha)\beta/(\beta-1)}$. $\square$

Отметим, что для применимости теста Шура с указанными функциями v_1, v_2 требуется, чтобы константа γ определялась равенством (2.2).

Лемма 3.2. *Пусть $|k| < \frac{1}{\vartheta}$, где величина ϑ определяется равенством (3.1).*

Тогда оператор $I + A$ обратим.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие леммы обеспечивает неравенство $\|A\|_{L^p \rightarrow L^p} < 1$.

$\square$

Лемма 3.3. *Оператор B вполне непрерывен в пространстве L^p .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся неравенством Гельдера. Получим $|(Bz)(t)| \leq \nu \hat{u}(t) \|z\|_{L^p}$, где $\nu = \text{const}$, $\hat{u}(t) = t^{(\alpha p - 1)/p} |\tilde{a}(t)|$.

Так как в силу условия (2.1) $\hat{u}(t) \in L^p$, то (теорема 6.3 [13, с. 111]) оператор $B: L^p \rightarrow L^p$ является u -ограниченным и, следовательно, вполне непрерывным. $\square$

Лемма 3.4. Пусть выполняются условия леммы 3.2.

Тогда оператор $I + A + B$ фредгольмов.

Доказательство следует из теоремы С.М. Никольского (см., например, [1, с. 28]) о том, что сумма ограниченного обратимого и вполне непрерывного оператора является фредгольмовым оператором. $\square$

Определение 3.1. Произвольный оператор $\bar{A}: L^p \rightarrow L^p$ называется [1, с. 81] вольтерровым, если для каждого $c \in (0, b)$ равенство $(\bar{A}z)(t) = 0$ имеет место почти всюду на $[0, c]$ для всех таких $z \in L^p$, что $z(t) = 0$ почти всюду на $[0, c]$.

Лемма 3.5. Пусть $|k| < \frac{1}{g}$, $b = 1$, $M_{\bar{h}} \leq 1$.

Тогда оператор $I + A$ обратим, причем обратный к нему оператор вольтерров.

Доказательство следует из леммы 3.2 и теоремы, аналогичной теореме 2.1 [1, с. 85], о том, что оператор $(I + \bar{A})^{-1}$ является вольтерровым, если оператор $\bar{A}$ линейен, ограничен и вольтерров, а также его спектральный радиус меньше единицы.

Так как спектральный радиус оператора A не превосходит его нормы, которая в силу условия $|k| < \frac{1}{g}$ меньше единицы, то оператор $(I + A)^{-1}$ вольтерров. $\square$

Приведем формулировку теоремы, аналогичной теореме 2.3 [1, с. 86].

Утверждение 3.1. Пусть оператор $\bar{A}: L^p \rightarrow L^p$ линейен, ограничен и вольтерров.

Пусть, далее, оператор $\bar{B}: L^p \rightarrow L^p$ линейен, вполне непрерывен и вольтерров.

Тогда из существования и вольтерровости оператора $(I + \bar{A})^{-1}$ следует существование и вольтерровость оператора $(I + \bar{A} + \bar{B})^{-1}$.

Лемма 3.6. В условиях леммы 3.5 оператор $I + A + B$ обратим, причем обратный оператор вольтерров.

Доказательство следует из лемм 3.3 и 3.5, а также утверждения 3.1. $\square$

4. Основной результат

Теорема 4.1. Пусть выполняется условие (2.1) и условия леммы 3.5.

Тогда задача (0.1) – (0.2) имеет единственное решение в пространстве $D_0^p(\gamma)$ при любой правой части $f \in L^p(\gamma)$.

Доказательство. Определим вспомогательную переменную $y(t) = t^\gamma x(t)$. Тогда уравнение (0.1) примет вид

$$t^{-\gamma} \left(\dot{y}(t) - \frac{\gamma}{t} y(t) + a(t) [h(t)]^{-\gamma} y[h(t)] + P(t) [H(t)]^{-\gamma} y[H(t)] \right) = f(t), \quad t \in [0, b], \quad (4.1)$$

или

$$\dot{y}(t) - \frac{\gamma}{t} y(t) + a(t) \left(\frac{t}{h(t)} \right)^\gamma y[h(t)] + P(t) \left(\frac{t}{H(t)} \right)^\gamma y[H(t)] = t^\gamma f(t), \quad t \in [0, b]. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) определено для $y \in D_0^p$. Запишем изоморфизм между пространствами D_0^p и L^p :

$$\dot{y}(t) - \frac{\gamma}{t}y(t) = z(t), \quad t \in [0, b]. \quad (4.3)$$

Так как $\gamma < \frac{p-1}{p}$, то в силу [2], [8] обратное преобразование имеет вид

$$y(t) = \int_0^t \left(\frac{t}{s}\right)^\gamma z(s) ds. \quad (4.4)$$

Здесь $z \in L^p$.

Подставим выражения (4.3) и (4.4) в уравнение (4.2). Получим уравнение

$$(I + A + B + Q)z = \varphi, \quad (4.5)$$

эквивалентное уравнению (4.2). Эквивалентность понимается в том смысле, что между решениями уравнений (4.2) и (4.5) существует взаимно-однозначное соответствие, определяемое равенствами (4.3) и (4.4).

Оператор $Q: L^p \rightarrow L^p$ определяется равенством $(Qz)(t) = P(t) \int_0^{H(t)} \left(\frac{t}{s}\right)^\gamma z(s) ds$. При $H(t) \leq t$ в силу неравенства Гельдера оператор Q является u -ограниченным, где $u(t) \sim t^{(p-1)/p} |P(t)|$. Так как $\gamma < \frac{p-1}{p}$ и $P \in L^p(\gamma)$, то $u \in L^p$. Кроме того, так как $H(t) \leq t$, то оператор Q вольтерров.

Правая часть φ имеет вид $\varphi(t) = t^\gamma f(t)$.

Так как в силу леммы 3.6 оператор $I + A + B$ обратим и обратный оператор вольтерров, то в силу утверждения 3.1 уравнение (4.5) имеет единственное решение в пространстве L^p при любой правой части $\varphi \in L^p$. Так как уравнение (4.2) эквивалентно уравнению (4.5), то уравнение (4.2) также однозначно разрешимо в пространстве D_0^p . Отсюда задача (0.1)–(0.2) имеет единственное решение в пространстве $D_0^p(\gamma)$ при любой правой части $f \in L^p(\gamma)$. $\square$

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение $\dot{x}(t) + \frac{k}{t^2}x(t^3) = f(t)$. Здесь $\alpha = 2$, $\tilde{a} \equiv 0$; $\beta = 3$, $\tilde{h} \equiv 1$, $\tilde{g} \equiv 1$. Поэтому $\gamma = \frac{p-2}{2p}$ и оператор A определяется равенством

$$(Az)(t) = \frac{k}{t^2} \int_0^{t^3} \left(\frac{t}{s}\right)^{(p-2)/2p} z(s) ds. \quad \text{Отсюда} \quad \|A\|^p \leq \frac{1}{3} (2|k|)^p. \quad \text{Поэтому при}$$

$$|k| < \frac{3^{1/p}}{2} \quad \text{уравнение имеет единственное решение в пространстве } D_0^p\left(\frac{p-2}{2p}\right). \quad \text{Это}$$

решение удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow 0+} t^{(p-2)/2p} x(t) = 0$ в силу определения пространства $D_0^p\left(\frac{p-2}{2p}\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991, 280 с.
2. Muntean I. The spectrum of the Cesaro operator // *Mathematica. Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation*. 1980. Vol. 22 (45). № 1. P. 97-105.
3. Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В. О спектре оператора Чезаро // *Научно-технический вестник Поволжья*. 2011. № 4. С. 33-37.
4. Абдуллаев А.Р., Плаксина И.М. Об оценке спектрального радиуса одного сингулярного интегрального оператора // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2015. № 2. С. 3-9.
5. Абдуллаев А.Р. О разрешимости задачи Коши для сингулярного уравнения второго порядка в критическом случае // *Труды Института прикладной математики им. И.Н. Векуа*. 1990. № 37. С. 5-12.
6. Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В. Об одной краевой задаче для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка // *Научно-технический вестник Поволжья*. 2013. № 4. С. 30-35.
7. Плаксина И.М. Об одном сингулярном линейном функционально-дифференциальном уравнении // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2012. № 2. С. 92-96.
8. Баландин А.С. О разрешимости на оси некоторых классов дифференциально-разностных уравнений // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5-2. С. 2449-2451.
9. Баландин А.С. О разрешимости на оси автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1044-1050.
10. Баландин А.С., Малыгина В.В. О разрешимости на оси автономных дифференциальных уравнений с последствием // *Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2016. № 2. С. 7-13.
11. Bravyi E.I., Plaksina I.M. On the Cauchy problem for singular functional-differential equations // *Advances in Difference Equations*. 2017. № 1. P. 91. DOI: 10.1186/s13662-017-1149-7.
12. Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2 . М.: Наука, 1985. 160 с.
13. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.
14. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983. 432 с.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.

Принята в печать 19 июня 2018 г.

Плаксина Ирина Михайловна, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры автоматизации технологических процессов, e-mail: atp@pstu.ru, impl@list.ru

Для цитирования: Плаксина И.М. О разрешимости сингулярной задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения с отклонением специального вида // *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 539–546. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-539-546

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-539-546

ON SOLVABILITY OF SINGULAR CAUCHY PROBLEM FOR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH SPECIAL TYPE DEVIATION

I. M. Plaksina

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomol'skiy Pr., Perm 614990 Russian Federation
E-mail: atp@pstu.ru, impl@list.ru

Abstract. At this paper unique solvability conditions of singular at independent variable linear first order functional-differential equation with special type argument deviation and singular coefficient were obtained.

Keywords: functional-differential equation; singular equation; linear differential equation; Cauchy problem; Cesaro operator; solvability

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p. (In Russian).
2. Muntean I. The spectrum of the Cesaro operator. *Mathematica. Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation*, 1980, vol. 22 (45), no. 1, pp. 97-105.
3. Abdullaev A.R., Plekhova E.V. O spektre operatora Chezaro [On a spectrum of Chesaro operator]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Volga Region Bulletin*, 2011, no. 4, pp. 33-37. (In Russian).
4. Abdullaev A.R., Plaksina I.M. Ob otsenke spektral'nogo radiusa odnogo singulyarnogo integral'nogo operatora [An estimate of the spectral radius of a certain singular integral operator]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 3-9. (In Russian).
5. Abdullaev A.R. O razreshimosti zadachi Koshi dlya singulyarnogo uravneniya vtorogo poryadka v kriticheskom sluchae [On solvability of Cauchy problem for a second order singular equation]. *Trudy Instituta prikladnoy matematiki im. I.N. Vekua – Proceedings of the I.N. Vekua Institute of Applied Mathematics*, 1990, no. 37, pp. 5-12. (In Russian).
6. Abdullaev A.R., Plekhova E.V. Ob odnoy kraevoy zadache dlya singulyarnogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka [On the one boundary value problem for singular second order differential equation]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Volga Region Bulletin*, 2013, no. 4, pp. 30-35. (In Russian).
7. Plaksina I.M. Ob odnom singulyarnom lineynom funktsional'no-differentsial'nom uravnenii [One class of singular linear functional differential equations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 92-96. (In Russian).
8. Balandin A.S. O razreshimosti na osi nekotorykh klassov differentsial'no-raznostnykh uravneniy [On solvability some classes of differential-difference equations on the line]. *Vestnik Tambovskogo*

universiteta. *Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2013, vol. 18, no. 5-2, pp. 2449-2451. (In Russian).

9. Balandin A.S. O razreshimosti na osi avtonomnykh differentsial'nykh uravneniy s ogranichenym zapazdyvaniem [On solvability of autonomous differential equations with bounded delay on the axis]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1044-1050. (In Russian).

10. Balandin A.S., Malygina V.V. O razreshimosti na osi avtonomnykh differentsial'nykh uravneniy s posledeystviem [On solvability of autonomous delay differential equations on the real axis]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2016, no. 2, pp. 7-13. (In Russian).

11. Bravyi E.I., Plaksina I.M. On the Cauchy problem for singular functional-differential equations. *Advances in Difference Equations*, 2017, no. 1, p. 91. DOI: 10.1186/s13662-017-1149-7.

12. Halmos P., Sander V. Ogranichennye integral'nye operatory v prostranstvakh L^2 [Bounded Integral Operators at Spaces L^2] Moscow, Nauka Publ., 1985, 160 p. (In Russian).

13. Krasnoselskiy M.A., Zabreyko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskiy P.E. *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators at Spaces of Integrable Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 499 p. (In Russian).

14. Hatson V., Pim G. *Prilozheniya funktsional'nogo analiza i teorii operatorov* [Applications of Functional Analysis and Operator Theory]. Moscow, Mir Publ., 1983, 432 p. (In Russian).

Received 16 April 2018

Reviewed 18 May 2018

Accepted for press 19 June 2018

Plaksina Irina Mikhaylovna, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Automation of Technological Processes Department, e-mail: atp@pstu.ru, impl@list.ru

For citation: Plaksina I.M. O razreshimosti odnoy singulyarnoy kraevoy zadachi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s otkloneniem spetsial'nogo vida [On solvability of one singular boundary value problem for functional-differential equation with special-type deviation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 539–546. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-539-546 (In Russian, Abstr. in Engl.).