ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-510-516

УДК 517.925.52

ПРИМЕНЕНИЕ ИДЕЙ МЕТОДА НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© **А. И. Перов**[1], **В. К. Каверина**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: office@main.vsu.ru

[2] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026, Российская Федерация, г. Воронеж, Московский проспект, 14
E-mail: vmkaf@vgasu.vrn.ru

Аннотация. Указываются условия, связанные с методом направляющих функций, при выполнении которых периодически возмущенная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет периодическое решение.

Ключевые слова: периодически возмущенная автономная система ОДУ; топологическая степень отображения; усреднение по Стеклову; коэрцитивность отображения

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, записанную в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \tag{1}$$

где $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть непрерывное локально липшицево отображение, для которого

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \tag{2}$$

Кроме того, нулевое стационарное решение $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ системы (1) является асимптотически устойчивым в целом, то есть любое решение $\mathbf{x}(t)$ этой системы может быть определено для всех $t \geq 0$ и

$$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00197).

Наряду с системой (1) рассмотрим неавтономную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + h(t), \tag{4}$$

где $h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ – любая непрерывная периодическая векторная функция, $h(t+\omega) = h(t)$.

Тогда справедлива

Теорема 1. *Пусть непрерывное локально липшицево отображение* $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям (2), (3) и условию коэрцитивности отображения, то есть*

$$\|f(\mathbf{x})\| \to +\infty \quad \textit{при} \quad \|\mathbf{x}\| \to +\infty. \tag{5}$$

Пусть любое решение $\mathbf{x}(t)$ *с начальным условием* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *системы (4) может быть определено для всех* $t \geq t_0$.

Тогда периодически возмущенная система (4) имеет по крайней мере одно ω*-периодическое решение:* $\mathbf{x}(t+\omega) = \mathbf{x}(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно условию (3) нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом, следовательно, по теореме Н.Н. Красовского [1, с. 37] существует такая непрерывно дифференцируемая функция $u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой $u(\mathbf{0}) = 0$, $u(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $u(\mathbf{x}) \to +\infty$ при $\|\mathbf{x}\| \to +\infty$; для которой

$$(grad\, u(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})) < 0, \quad (\mathbf{x} \neq 0). \tag{6}$$

Здесь $grad\, u(\mathbf{x})$ – градиент рассматриваемой функции в точке $\mathbf{x}$, то есть вектор с компонентами $\partial u(\mathbf{x})/\partial x_1, ..., \partial u(\mathbf{x})/\partial x_n$. Градиентное отображение $grad\, u(\mathbf{x})\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является непрерывным и обладает свойствами: $grad\ u(\mathbf{0}) = 0$, $grad\ u(\mathbf{x}) \neq 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Так как выполнено условие $u(\mathbf{x}) \to +\infty$ при $\|\mathbf{x}\| \to +\infty$, то по теореме М.А. Красносельского [2, с. 111] (см. также [3, с. 53]) топологическая степень градиентного отображения $grad\ u(\mathbf{x})$ на границе ∂G любого открытого ограниченного множества G, содержащего нуль пространства в качестве внутренней точки, равно единице:

$$deg(grad\, u(\mathbf{x}), \partial G) = 1. \tag{7}$$

Проверим линейную гомотопность векторных полей $grad\ \ u(\mathbf{x})$ и $-f(\mathbf{x})$: $(1-\lambda)grad\, u(\mathbf{x}) - \lambda f(\mathbf{x}) \neq 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$ и $0 \leq \lambda \leq 1$. Так как при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ это неравенство очевидно, то, предполагая обратное, найдем такие $\mathbf{x}_0 \neq 0$ и $0 < \lambda_0 < 1$, для которых имеет место равенство $(1-\lambda_0)grad\, u(\mathbf{x}_0) - \lambda_0 f(\mathbf{x}_0) = 0$. Умножая обе части последнего равенства на $-f(\mathbf{x}_0)$, получим $\lambda_0\|f(\mathbf{x}_0)\|^2 = (1-\lambda_0)(grad\, u(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_0)) > 0$, что явно противоречит (6).

Так как по доказанному векторные поля $grad\, u(\mathbf{x})$ и $-f(\mathbf{x})$ гомотопны на ∂G, то их топологические степени совпадают; поэтому согласно (7) имеем $deg(-f(\mathbf{x}), \partial G) = 1$, откуда немедленно следует, что [3, с. 51]

$$deg(f(\mathbf{x}), \partial G) = (-1)^n. \tag{8}$$

Хорошо известно, что начальное значение при $t = 0$ периодического решения с периодом ω является неподвижной точкой отображения Пуанкаре $p(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\omega, 0, \mathbf{x})$, то есть должно быть $\mathbf{x} = p(\mathbf{x})$.

Пусть $k = max\|h(t)\|$, $0 \le t \le \omega$. В силу свойства коэрцитивности (5) можно указать такое $r > 0$, что $\|f(\mathbf{x})\| > k$ при $\|\mathbf{x}\| = r$.

По теореме Руше из (8) получим

$$deg(f(\mathbf{x}) + h(t), \partial S^n) = (-1)^n$$

при каждом фиксированном значении t. Положим $q(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) - \mathbf{x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Если $q(\xi) = 0$ при некотором $\xi \in \partial S^n$, то в силу сказанного выше возмущенная система (4) имеет периодическое решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, 0, \xi)$. Пусть теперь $q(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \partial S^n$, то есть непрерывное векторное поле $q(\mathbf{x})$ является невырожденным на ∂S^n. Центральная часть доказательства заключается в установлении формулы

$$deg(q(\mathbf{x}), \partial S^n) = (-1)^n. \tag{9}$$

По теореме Кронекера [4, с. 162] отсюда будет следовать, что непрерывное отображение $q(\mathbf{x})$ обращается в нуль в некоторой точке $\xi \in S^n$. Тогда $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, 0, \xi)$ будет ω-периодическим решением возмущенной системы (4), и наше утверждение доказано.

При доказательстве формулы (9) мы не предполагаем, что выполнено условие ω-невозвращаемости [5, с. 48]

$$\mathbf{x}(t, 0, \xi) \neq \xi \quad \text{при} \quad \xi \in \partial S^n \ \text{ и } \ 0 < t \le \omega. \tag{10}$$

Поэтому наши рассуждения меняются следующим образом. Прежде всего для каждого $\xi \in \partial S^n$ найдем единственное $\lambda(\xi) \in [0, \omega]$, для которого

$$\mathbf{x}(\lambda(\xi), 0, \xi) = \xi \quad \text{и} \quad \mathbf{x}(t, 0, \xi) \neq \xi \quad \text{при} \quad \lambda(\xi) < t \le \omega.$$

Напомним, что $\mathbf{x}(0, 0, \xi) = \xi$ и в рассматриваемом случае $\mathbf{x}(\omega, 0, \xi) \neq \xi$ при любом $\xi \in \partial S^n$, так что существование функции $\lambda(\xi) : \partial S^n \to [0, \omega]$ не вызывает сомнений. (В случае, когда выполнено условие ω-невозвращаемости (10), очевидно, имеем $\lambda(\xi) \equiv 0$.) Нетрудно проверить, что $\lambda(\xi)$ является полунепрерывной сверху [6, с. 353], и потому измерима на сфере ∂S^n, рассматриваемой как $(n-1)$-мерное риманово многообразие с лебеговой мерой.

Рассмотрим измеримую гомотопию $\varphi(\xi, \alpha) : \partial S^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, положив

$$\varphi(\xi, 0) = \dot{\mathbf{x}}(\lambda(\xi), 0, \xi) = f(\xi) + h[\lambda(\xi)];$$

$$\varphi(\xi, \alpha) = \frac{\mathbf{x}(\alpha\omega + (1-\alpha)\lambda(\xi), 0, \xi) - \xi}{d(\xi, \alpha)} \ \text{ при } \ 0 < \alpha \le 1,$$

где непрерывная и положительная при $0 < \alpha \le 1$ функция $d(\xi, \alpha)$ определяется следующим образом $d(\xi, \alpha) = \alpha(\omega - \lambda(\xi))$ при $0 \le \alpha \le 1/2$ и $d(\xi, \alpha) = (1-\alpha)(\omega - \lambda(\xi)) + (2\alpha - 1)$ при $1/2 < \alpha \le 1$.

Отметим, что гомотопии такого типа в близкой ситуации встречаются в [7, см., например, с. 172]. Рассматриваемая гомотопия $\varphi(\xi,\alpha)$ измерима по ξ и непрерывна по α, то есть удовлетворяет условиям Каратеодори [8, с. 120]. Кроме того, как нетрудно видеть, она является невырожденной: $\varphi(\xi,\alpha)\neq 0$ при $\xi\in\partial S^n$ и $\alpha\in[0,1]$.

От измеримой гомотопии $\varphi(\xi,\alpha)$ перейдем к новой

$$\varphi_\varepsilon(\xi,\alpha)=\frac{1}{\mu S(\xi,\varepsilon)}\int\limits_{S(\xi,\varepsilon)}\varphi(\eta,\alpha)d\mu$$

(усреднение по Стеклову (сравни с [6, с. 377]); здесь $S(\xi,\varepsilon)$ – это $(n-1)$-мерный шар на ∂S^n с центром в точке $\xi\in\partial S^n$ и радиусом $\varepsilon>0$). Нетрудно проверить, что в силу выбора ∂S^n при $\varepsilon>0$ построенная гомотопия $\varphi_\varepsilon(\xi,\alpha):\partial S^n\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$ является непрерывной по совокупности переменных и невырожденной: $\varphi_\varepsilon(\xi,\alpha)\neq 0$ при $\xi\in\partial S^n$ и $\alpha\in[0,1]$. Стандартные рассуждения показывают, что из (8) при $\alpha=0$ вытекает равенство $deg(\varphi_\varepsilon(\xi,0),\partial S^n)=deg(f(\xi)+h[\lambda(\xi)],\partial S^n)=(-1)^n$ (в этом пункте удобнее писать $f(\xi)$, подчеркнув явную зависимость отображения f от ξ). Отсюда в силу невырожденности непрерывной гомотопии $\varphi_\varepsilon(\xi,\alpha)$ получаем $deg(\varphi_\varepsilon(\xi,1),\partial S^n)=deg(q_\varepsilon(\xi),\partial S^n)=(-1)^n$. Но $q(\xi):\partial S^n\to\mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение и потому $q_\varepsilon(\xi)\to q(\xi)$ равномерно по $\xi\in\partial S^n$ при $0<\varepsilon\to 0$, откуда вытекает, что $deg(q(\xi),\partial S^n)=(-1)^n$ и формула (9) с точностью до обозначений установлена.

Теорема 1 появилась как попытка ответить на вопрос, заданный в книге [9, с. 220]. Отметим, что подобное утверждение было сформулировано нами ранее в работе [10], но здесь изложено более подробное доказательство, которое представляет, по нашему мнению, и самостоятельный интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

2. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1960. 331 с.

3. *Звягин В.Г.* Введение в топологические методы анализа. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2014. 290 с.

4. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1979. 558 с.

5. *Перов А.И., Евченко В.К.* Метод направляющих функций. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. 182 с.

6. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

7. *Рейссиг Р., Сансоне Дж., Конти Р.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 318 с.

8. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИИЛ, 1954. Т. 2. 346 с.

9. *Зубов В.И.* Теория колебаний. М.: Высшая школа, 1979. 400 с.

10. *Евченко В.К.* Об одной задаче из теории колебаний // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1136-1138.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Перов Анатолий Иванович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления, e-mail: anperov@mail.ru

Каверина Валерия Константиновна, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики, e-mail: lera_evk@mail.ru

Для цитирования: *Перов А.И., Каверина В.К.* Применение идей метода направляющих функций при исследовании неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 510–516. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-510-516

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-510-516

RESEARCH OF THE NONAUTONOMOUS SYSTEM OF ODE BY THE IDEAS OF THE METHOD OF GUIDING FUNCTIONS

A. I. Perov[1], V. K. Kaverina[2]

[1] Voronezh State University
1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: office@main.vsu.ru
[2] Voronezh State Technical University
14 Moskovskiy pt., Voronezh 394026, Russian Federation
E-mail: vmkaf@vgasu.vrn.ru

Abstract. We indicate sufficient conditions connected with the method of guiding functions, under which periodically perturbed autonomous system of ODE has an periodic solution.
Keywords: periodically perturbed autonomous system of ODE; topological degree of transformation; Steclov average; coercitivity of transformation

REFERENCES

1. Krasovskiy N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya* [Some Problems of Dynamic Stability Theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 211 p. (In Russian).

2. Krasnoselskiy M.A. *Operator sdviga po traektoriyam differentsial'nykh uravneniy* [The Shift Operator on the Path of the Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1960, 331 p. (In Russian).

3. Zvyagin V.G. *Vvedenie v topologicheskie metody analiza* [The Introduction in the Topological Methods of Analysis]. Voronezh, Voronezh State University Publishing House, 2014, 290 p. (In Russian).

4. Ortega G., Rheinboldt V. *Iteratsionnye metody resheniya nelineynykh sistem uravneniy so mnogimi neizvestnymi* [Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables]. Moscow, Mir Publ., 1979, 558 p. (In Russian).

5. Perov A.I., Evchenko V.K. *Metod napravlyayushchikh funktsiy* [Method of Guiding Functions]. Voronezh, Publ.-Polygraphic Centre of Voronezh State University, 2012, 182 p. (In Russian).

6. Natanson I.P. *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of Real Variable]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 480 p. (In Russian).

7. Reissig R., Sansone G., Conti R. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravneniy* [Qualitative Theory of Nonlinear Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 318 p. (In Russian).

8. Sansone G. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1954, vol. 2, 346 p. (In Russian).

9. Zubov V.I. *Teoriya kolebaniy* [The Theory of Oscillations]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1979, 400 p. (In Russian).

10. Evchenko V.K. Ob odnoy zadache iz teorii kolebaniy [About one problem from the oscillations theory]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov*

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-01-00197).

University Reports. Series: Natural and Technical Sciences, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1136-1137. (In Russian).

Received 16 April 2018
Reviewed 18 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Perov Anatolii Ivanovich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the System Analysis and Control Department, e-mail: anperov@mail.ru

Kaverina Valeria Konstantinivna, Voronezh State Technical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Applied Mathematics and Mechanics Department, e-mail: lera_evk@mail.ru

For citation: Perov A.I., Kaverina V.K. Primenenie idei metoda napravlyayushih funkcii pri issledovanii neavtonomnoi sistemy obyknovennyh differencial'nyh uravnenii [Research of the nonautonomous system of ODE by the ideas of the method of guiding functions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 510–516. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-510-516 (In Russian, Abstr. in Engl.).