

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-466-472

УДК 519.651

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, ПОРОЖДЕННОЙ УРАВНЕНИЕМ ЛАПЛАСА

© А. Н. Мзедавее, В. И. Родионов

ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
426034, Российская Федерация, г. Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: assad0711@yahoo.com, rodionov@uni.udm.ru

Аннотация. Определено однопараметрическое семейство конечномерных пространств, состоящих из специальных двумерных сплайнов лагранжевого типа (параметр N связан с размерностью пространства). Уравнение Лапласа порождает в каждом таком пространстве задачу минимизации функционала невязки. Доказаны существование и единственность оптимальных сплайнов. Для их коэффициентов и невязок получены точные формулы. Показано, что с ростом N минимум функционала невязки есть величина $O(N^{-5})$, а специальная последовательность, состоящая из оптимальных сплайнов, фундаментальна.

Ключевые слова: интерполяция; многомерный сплайн; многочлены Чебышёва

Введение

Работа продолжает исследования [1–4]. Уравнение Лапласа $u_{tt} + u_{\xi\xi} = 0$, заданное в прямоугольнике, заменой переменных приводится к виду $au_{tt} + bu_{\xi\xi} = 0$ (в терминах новых переменных из квадрата $\Pi \doteq [0, 1]^2$). Пусть $a > 0$, $b > 0$, а непрерывные функции $\varphi_0, \varphi_1, \varrho_0, \varrho_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что

$$\varphi_0(0) = \varrho_0(0), \quad \varphi_0(1) = \varrho_1(0), \quad \varphi_1(0) = \varrho_0(1), \quad \varphi_1(1) = \varrho_1(1),$$

существуют производные $\varphi_0''(0), \varphi_0''(1), \varphi_1''(0), \varphi_1''(1), \varrho_0''(0), \varrho_0''(1), \varrho_1''(0), \varrho_1''(1)$ и

$$a\varrho_0''(0) + b\varphi_0''(0) = 0, \quad a\varrho_1''(0) + b\varphi_0''(1) = 0, \quad a\varrho_0''(1) + b\varphi_1''(0) = 0, \quad a\varrho_1''(1) + b\varphi_1''(1) = 0.$$

Функция $u = u(t, \xi)$, $(t, \xi) \in \Pi$, являющаяся решением задачи

$$au_{tt} + bu_{\xi\xi} = 0, \quad u(0, \xi) = \varphi_0(\xi), \quad u(1, \xi) = \varphi_1(\xi), \quad u(t, 0) = \varrho_0(t), \quad u(t, 1) = \varrho_1(t),$$

представима в виде $u = u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)}$, где

$$u^{(0)} = u^{(0)}(t, \xi) \doteq \varphi_0(0)(1-t)(1-\xi) + \varphi_0(1)(1-t)\xi + \varphi_1(0)t(1-\xi) + \varphi_1(1)t\xi$$

— билинейная функция, а функции $u^{(1)} = u^{(1)}(t, \xi)$ и $u^{(2)} = u^{(2)}(t, \xi)$ — решения задач

$$au_{tt} + bu_{\xi\xi} = 0, \quad u(0, \xi) = p_0(\xi), \quad u(1, \xi) = p_1(\xi), \quad u(t, 0) = \tilde{\varrho}_0(t), \quad u(t, 1) = \tilde{\varrho}_1(t), \quad (1)$$

$$au_{tt} + bu_{\xi\xi} = 0, \quad u(0, \xi) = \tilde{\varphi}_0(\xi), \quad u(1, \xi) = \tilde{\varphi}_1(\xi), \quad u(t, 0) = q_0(t), \quad u(t, 1) = q_1(t), \quad (2)$$

соответственно. Использованы следующие обозначения:

$$p_i(\xi) \doteq -\frac{1}{12} \varphi_i''(0)(\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) + \frac{1}{12} \varphi_i''(1)(\xi^3 - \xi), \quad i = 0, 1,$$

$$q_i(t) \doteq -\frac{1}{12} \varrho_i''(0)(t^3 - 3t^2 + 2t) + \frac{1}{12} \varrho_i''(1)(t^3 - t), \quad i = 0, 1,$$

— это кубические полиномы, а

$$\tilde{\varphi}_i(\xi) \doteq \varphi_i(\xi) - \varphi_i(0)(1-\xi) - \varphi_i(1)\xi - p_i(\xi), \quad i = 0, 1,$$

$$\tilde{\varrho}_i(t) \doteq \varrho_i(t) - \varrho_i(0)(1-t) - \varrho_i(1)t - q_i(t), \quad i = 0, 1,$$

— это функции, порожденные граничными функциями исходной задачи.

В работе обсуждается специальная задача оптимизации, порожденная задачей (1), а аналогичная задача, порожденная задачей (2), симметрична, — следует лишь осуществить замены $a \longleftrightarrow b$, $t \longleftrightarrow \xi$, $p_i(\cdot) \longleftrightarrow q_i(\cdot)$, $\varrho_i(\cdot) \longleftrightarrow \varphi_i(\cdot)$.

1. Постановка задачи построения оптимального сплайна

Задача (1) порождает задачу поиска оптимального сплайна задачи

$$J(u) \doteq \|au_{tt} + bu_{\xi\xi}\|_{L_2(\Pi)}^2 \rightarrow \min, \quad u \in \sigma(\Pi), \quad (3)$$

где $\sigma(\Pi)$ — это пространство, состоящее из *допустимых* сплайнов (см. ниже), зависящих от коэффициентов $u_1^i, u_2^i, i = 1, \dots, 3N-1$ (где N — параметр, отвечающий за количество узлов разностной схемы), и определенных в квадрате Π . Пусть, далее,

$$n \doteq N-1, \quad \tau \doteq \frac{1}{3N}, \quad h \doteq \frac{1}{3}, \quad \theta \doteq \frac{b}{aN^2},$$

а точки $(\tau_i, h_j) \in \Pi$ таковы, что $\tau_i \doteq i\tau, i = 0, 1, \dots, 3N, h_j \doteq jh, j = 0, 1, 2, 3$.

Массив $(u_j^i), i = 0, 1, \dots, 3N, j = 0, 1, 2, 3$, называется *допустимым*, если:

1) $u_0^i = \tilde{\varrho}_0(\tau_i), u_3^i = \tilde{\varrho}_1(\tau_i)$ для всех $i = 0, 1, \dots, 3N$;

2) $u_j^0 = p_0(h_j), u_j^{3N} = p_1(h_j)$ для $j = 0, 1, 2, 3$.

Одномерные интерполяционные многочлены Лагранжа

$$\omega_\kappa(\zeta) \doteq \prod_{\alpha=0,1,2,3: \alpha \neq \kappa} \frac{\zeta - \alpha}{\kappa - \alpha}, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad \kappa = 0, 1, 2, 3$$

(такие, что $\omega_\kappa(\mu) = \delta_{\kappa\mu}$ для всех $\kappa, \mu = 0, 1, 2, 3$, где $\delta_{\kappa\mu}$ — символ Кронекера) и допустимый массив $(u_j^i), i = 0, 1, \dots, 3N, j = 0, 1, 2, 3$, порождают семейство полиномов

$$Q^k(s, \eta) \doteq \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 u_j^{3k-3+i} \omega_i(s) \omega_j(\eta), \quad s, \eta \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Пусть $P^k(t, \xi) \doteq Q^k(s, \eta)$, где $s \doteq \frac{t}{\tau} - 3k + 3$, $\eta \doteq \frac{\xi}{h} = 3\xi$. Тогда $P^k(\tau_{3k-3+i}, h_j) = u_j^{3k-3+i}$ для всех $k = 1, \dots, N$ и $i, j = 0, 1, 2, 3$. Следовательно, полином $P^k(\cdot, \cdot)$ является двумерным интерполяционным многочленом Лагранжа, определенным в 16 узлах полосы $\Pi^k \doteq \{(t, \xi) \in \Pi : \tau_{3k-3} \leq t \leq \tau_{3k}, 0 \leq \xi \leq 1\}$. Значит, определена непрерывная функция $u : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $u(t, \xi) = P^k(t, \xi)$ при $(t, \xi) \in \Pi^k$. Другими словами, всякий допустимый массив порождает бикубический сплайн, который мы называем *аппроксимирующим*. Разнообразие таких сплайнов определяется лишь наборами чисел $u_1^i, u_2^i, i = 1, \dots, 3N-1$. Это означает, что аппроксимирующие сплайны образуют конечномерное пространство. Обозначим его $\sigma(\Pi) = \sigma_N(\Pi)$.

2. Конечные разности аппроксимирующих сплайнов

Всякий допустимый массив (u_j^i) , $i = 0, 1, \dots, 3N$, $j = 0, 1, 2, 3$, порождает термы

$$\begin{aligned} x^i &\doteq u_0^i - u_1^i - u_2^i + u_3^i, & y^i &\doteq u_0^i - 3u_1^i + 3u_2^i - u_3^i, & i &= 0, 1, \dots, 3N, \\ X_0^k &\doteq x^{3k-3} - x^{3k-2} - x^{3k-1} + x^{3k}, & Y_0^k &\doteq x^{3k-3} - 3x^{3k-2} + 3x^{3k-1} - x^{3k}, \\ X_1^k &\doteq y^{3k-3} - y^{3k-2} - y^{3k-1} + y^{3k}, & Y_1^k &\doteq y^{3k-3} - 3y^{3k-2} + 3y^{3k-1} - y^{3k}, & k &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4)$$

и граничные элементы

$$\begin{aligned} z_0^k &\doteq \frac{1}{2} \theta^{-1} [\Delta \tilde{\varrho}_0^{(2)}(\tau_{3k-3}, \tau) + \Delta \tilde{\varrho}_1^{(2)}(\tau_{3k-3}, \tau) + \Delta \tilde{\varrho}_0^{(2)}(\tau_{3k-2}, \tau) + \Delta \tilde{\varrho}_1^{(2)}(\tau_{3k-2}, \tau)], \\ w_0^k &\doteq \frac{3}{2} \theta^{-1} [\Delta \tilde{\varrho}_0^{(3)}(\tau_{3k-3}, \tau) + \Delta \tilde{\varrho}_1^{(3)}(\tau_{3k-3}, \tau)], \\ z_1^k &\doteq \frac{1}{6} \theta^{-1} [\Delta \tilde{\varrho}_0^{(2)}(\tau_{3k-3}, \tau) - \Delta \tilde{\varrho}_1^{(2)}(\tau_{3k-3}, \tau) + \Delta \tilde{\varrho}_0^{(2)}(\tau_{3k-2}, \tau) - \Delta \tilde{\varrho}_1^{(2)}(\tau_{3k-2}, \tau)], \\ w_1^k &\doteq \frac{1}{2} \theta^{-1} [\Delta \tilde{\varrho}_0^{(3)}(\tau_{3k-3}, \tau) - \Delta \tilde{\varrho}_1^{(3)}(\tau_{3k-3}, \tau)], \\ p_0^k &\doteq z_0^k + w_0^k, & q_0^k &\doteq z_0^k - w_0^k, & p_1^k &\doteq z_1^k + w_1^k, & q_1^k &\doteq z_1^k - w_1^k, \\ & & & & & & & k = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \xi^0 &\doteq p_0^1 + x^0, & \xi^k &\doteq p_0^{k+1} - q_0^k, & k &= 1, \dots, n, & \xi^N &\doteq -x^{3N} - q_0^N, \\ \eta^0 &\doteq p_1^1 + y^0, & \eta^k &\doteq p_1^{k+1} - q_1^k, & k &= 1, \dots, n, & \eta^N &\doteq -y^{3N} - q_1^N, \\ \xi &\doteq \text{col}(\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^N), & \eta &\doteq \text{col}(\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^N). \end{aligned} \quad (6)$$

Применяем обозначения $\Delta f^{(m)}(t, \tau)$ для конечных разностей $\sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i f(t + i\tau)$.

3. Основные результаты

Утверждение 1. Для любого $u \in \sigma_N(\Pi)$ имеет место равенство

$$J(u) = \frac{3a^2}{64\tau^3} \sum_{k=1}^N I^k,$$

$$\begin{aligned} I^k &\doteq 4\theta^2 [x^{3k-3} + x^{3k} + 2z_0^k]^2 - 6\theta(1+\theta) [x^{3k-3} + x^{3k} + 2z_0^k] X_0^k + \frac{9}{10} (3+5\theta+3\theta^2) [X_0^k]^2 \\ &\quad + \frac{4}{3} \theta^2 [x^{3k-3} - x^{3k} + 2w_0^k]^2 - \frac{6}{5} \theta(5+\theta) [x^{3k-3} - x^{3k} + 2w_0^k] Y_0^k + \frac{27}{70} (21+7\theta+\theta^2) [Y_0^k]^2 \\ &\quad + 12\theta^2 [y^{3k-3} + y^{3k} + 2z_1^k]^2 - \frac{18}{5} \theta(1+5\theta) [y^{3k-3} + y^{3k} + 2z_1^k] X_1^k + \frac{27}{70} (1+7\theta+21\theta^2) [X_1^k]^2 \\ &\quad + 4\theta^2 [y^{3k-3} - y^{3k} + 2w_1^k]^2 - \frac{18}{5} \theta(1+\theta) [y^{3k-3} - y^{3k} + 2w_1^k] Y_1^k + \frac{81}{350} (5+7\theta+5\theta^2) [Y_1^k]^2. \end{aligned}$$

Утверждение 2. Коэффициенты $u_1^i, u_2^i, i = 1, \dots, 3N-1$, оптимального аппроксимирующего сплайна $u \in \sigma_N(\Pi)$ вычислимы по формулам (4) через величины $x^{3k}, y^{3k}, k = 0, 1, \dots, N, X_0^k, Y_0^k, X_1^k, Y_1^k, k = 1, \dots, N$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3k-3} + 2y x^{3k} + x^{3k+3} + v_0^k = 0, & k = 1, \dots, n, \\ X_0^k = \gamma_0 [x^{3k-3} + x^{3k} + 2z_0^k], & k = 1, \dots, N, \\ Y_0^k = \delta_0 [x^{3k-3} - x^{3k} + 2w_0^k], & k = 1, \dots, N, \\ y^{3k-3} + 2x y^{3k} + y^{3k+3} + v_1^k = 0, & k = 1, \dots, n, \\ X_1^k = \gamma_1 [y^{3k-3} + y^{3k} + 2z_1^k], & k = 1, \dots, N, \\ Y_1^k = \delta_1 [y^{3k-3} - y^{3k} + 2w_1^k], & k = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (7)$$

В системе фигурируют константы x^0, x^{3N}, y^0, y^{3N} (известные априори, см. (4)),

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\doteq \frac{1}{2} \frac{1+\theta^2}{3+5\theta+3\theta^2}, & \beta_0 &\doteq \frac{1}{30} \frac{35+3\theta^2}{21+7\theta+\theta^2}, & \gamma_0 &\doteq \frac{10}{3} \frac{\theta(1+\theta)}{3+5\theta+3\theta^2}, & \delta_0 &\doteq \frac{14}{9} \frac{\theta(5+\theta)}{21+7\theta+\theta^2}, \\ \alpha_1 &\doteq \frac{3}{10} \frac{3+35\theta^2}{1+7\theta+21\theta^2}, & \beta_1 &\doteq \frac{3}{2} \frac{1+\theta^2}{5+7\theta+5\theta^2}, & \gamma_1 &\doteq \frac{14}{3} \frac{\theta(1+5\theta)}{1+7\theta+21\theta^2}, & \delta_1 &\doteq \frac{70}{9} \frac{\theta(1+\theta)}{5+7\theta+5\theta^2}, \\ & y &\doteq \frac{\alpha_0+\beta_0}{\alpha_0-\beta_0}, & x &\doteq \frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1-\beta_1} \end{aligned}$$

(справедливо $\alpha_0 > \beta_0, \alpha_1 > \beta_1, y > 2, x > 2$) и граничные элементы (см. (5))

$$\begin{aligned} v_0^k &\doteq (1+y) [z_0^k + z_0^{k+1}] + (1-y) [w_0^k - w_0^{k+1}], \\ v_1^k &\doteq (1+x) [z_1^k + z_1^{k+1}] + (1-x) [w_1^k - w_1^{k+1}]. \end{aligned}$$

Первая совокупность уравнений (7) имеет самостоятельный характер: ее уравнения связывают между собой лишь переменные вида x^{3m} . Матрица совокупности имеет трехдиагональный вид с доминирующей главной диагональю (так как $y > 2$), поэтому совокупность имеет единственное решение (его легко найти методом прогонки). После этого из второй и третьей совокупностей в (7) явно вычисляются все значения X_0^k и Y_0^k . Аналогично решаются четвертая (где $x > 2$), пятая и шестая совокупности в (7). Полученные значения позволяют, в конечном счете, найти величины $u_1^i, u_2^i, i = 1, \dots, 3N-1$ (см. определения (4)), порождающие оптимальный аппроксимирующий сплайн.

Утверждение 3. Единственным решением первой и четвертой совокупностей системы (7) являются числа

$$\begin{aligned} x^{3k} &= -\frac{1}{U_n(y)} \left[B_{k1}(y) x^0 + B_{kn}(y) x^{3N} + \sum_{i=1}^n B_{ki}(y) v_0^i \right], & k &= 1, \dots, n, \\ y^{3k} &= -\frac{1}{U_n(x)} \left[B_{k1}(x) y^0 + B_{kn}(x) y^{3N} + \sum_{i=1}^n B_{ki}(x) v_1^i \right], & k &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

В представлении используются многочлены Чебышёва 2-го рода $U_n(\cdot)$ (согласно [5, с. 96] неравенства $y > 2, x > 2$ влекут $U_n(y) \neq 0, U_n(x) \neq 0$) и функциональные матрицы $B(\cdot) = (B_{ki}(\cdot)), B_{ki}(\cdot) = (-1)^{k+i} [\delta_{i-1,k}^{\geq} U_{k-1}(\cdot) U_{n-i}(\cdot) + \delta_{ki}^{\geq} U_{n-k}(\cdot) U_{i-1}(\cdot)]$, $k, i = 1, \dots, n$. Применяем символ $\delta_{ki}^{\geq}$ такой, что $\delta_{ki}^{\geq} = 0$ (при $k < i$), а иначе $\delta_{ki}^{\geq} = 1$.

Утверждение 4. Для минимума $J_N \doteq \min J(\cdot)$ функционала (3) имеет место точная формула

$$J_N = \frac{81b^2}{16N} \left[\frac{\alpha_0 - \beta_0}{U_n(y)} \langle \xi, \tilde{B}(y) \xi \rangle + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{U_n(x)} \langle \eta, \tilde{B}(x) \eta \rangle \right].$$

В представлении используются многочлены Чебышёва 1-го рода $T_n(\cdot)$, порождающие функциональные матрицы $\tilde{B}(\cdot) = (\tilde{B}_{ki}(\cdot))$, $k, i = 0, 1, \dots, N$, такие, что

$$\tilde{B}_{ki}(\cdot) = (-1)^{k+i} \left[\delta_{i-1,k}^{\geq} T_k(\cdot) T_{N-i}(\cdot) + \delta_{ki}^{\geq} T_{N-k}(\cdot) T_i(\cdot) \right].$$

Векторы ξ и η — это граничные элементы (6), а для записи квадратичных форм применяется скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространства $\mathbb{R}^{1+N}$.

Утверждение 5. Если $\varrho_0, \varrho_1 \in C^5[0, 1]$, то $J_N = O(N^{-5})$.

Зафиксируем натуральное $N_0 \geq 2$. Последовательность $N_m = N_0 2^m$, $m = 1, 2, \dots$, порождает функциональную последовательность $\{\bar{u}_m\}$, где $\bar{u}_m : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ — это оптимальный аппроксимирующий сплайн в пространстве $\sigma_{N_m}(\Pi)$.

Утверждение 6. Если $\varrho_0, \varrho_1 \in C^5[0, 1]$, то последовательность $\{\bar{u}_m\}$ фундаментальна по норме пространства $L_2(\Pi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родионов В.И. О применении специальных многомерных сплайнов произвольной степени в численном анализе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 146-153.
2. Родионов В.И. Об одном методе построения разностных схем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2656-2659.
3. Родионов В.И., Родионова Н.В. О решении двух задач оптимизации, порожденных простейшим волновым уравнением // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1406-1409.
4. Мздаеве А.Н., Родионов В.И. О решении одной задачи оптимизации, порожденной уравнением Лапласа // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: материалы Междунар. науч. конф. Воронеж, 2017. С. 252-255.
5. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.

Поступила в редакцию 17 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.

Принята в печать 19 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Мздаеве Асаад Насер, Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Российская Федерация, аспирант, кафедра информатики и математики, e-mail: assad0711@yahoo.com

Родионов Виталий Иванович, Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой информатики и математики, e-mail: rodionov@uni.udm.ru

Для цитирования: Мздаеве А.Н., Родионов В.И. О точном решении одной задачи оптимизации, порожденной уравнением Лапласа // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 466–472. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-466-472

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-466-472

ON EXACT SOLUTION OF OPTIMIZATION TASK GENERATED BY THE LAPLACE EQUATION

A. N. Mzedawee, V. I. Rodionov

Udmurt State University

1 Universitetskaya St., Izhevsk 426034, Russian Federation

E-mail: assad0711@yahoo.com, rodionov@uni.udm.ru

Abstract. A one-parameter family of finite-dimensional spaces consisting of special two-dimensional splines of Lagrangian type is defined (the parameter N is related to the dimension of the space). The Laplace equation generates in each such space the problem of minimizing the residual functional. The existence and uniqueness of optimal splines are proved. For their coefficients and residuals, exact formulas are obtained. It is shown that with increasing N , the minimum of the residual functional is $O(N^{-5})$, and the special sequence consisting of optimal splines is fundamental.

Keywords: interpolation; multivariate spline; Chebyshev's polynomials

REFERENCES

1. Rodionov V.I. O primeneniі spetsial'nykh mnogomernykh splaynov proizvol'noy stepeni v chislenom analize [On application of special multivariate splines of any degree in the numerical analysis]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2010, no. 4, pp. 146-153. (In Russian).
2. Rodionov V.I. Ob odnom metode postroeniya raznostnykh skhem [About method for constructing difference schemes]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 2656-2659. (In Russian).
3. Rodionov V.I., Rodionova N.V. O reshenii dvukh zadach optimizatsii, porozhdennykh prosteyshim volnovym uravneniem [On solution of two optimization problems generated by the simplest wave equation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1406-1409. (In Russian).
4. Mzedavee A.N., Rodionov V.I. O reshenii odnoy zadachi optimizatsii, porozhdennoy uravneniem Laplasya [On solution of optimization tasks generated by the Laplace equation]. *Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Sovremennye metody prikladnoy matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologiy»* [Proceedings of the International Scientific Conference “Modern Methods of Applied Mathematics, Control Theory and Computer Technologies”]. Voronezh, 2017, pp. 252-255. (In Russian).
5. Suetin P.K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical Orthogonal Polynomials]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 328 p. (In Russian).

Received 17 April 2018

Reviewed 22 May 2018

Accepted for press 19 June 2018

There is no conflict of interests.

Mzedawee Asaad Naser, Udmurt State University, Izhevsk, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Department of Informatics and Mathematics, e-mail: assad0711@yahoo.com

Rodionov Vitalii Ivanovich, Udmurt State University, Izhevsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Informatics and Mathematics, e-mail: rodionov@uni.udm.ru

For citation: Mzedawee A.N., Rodionov V.I. O tochnom reshenii odnoi zadachi optimizatsii, porozhdennoi uravneniem Laplasa [On exact solution of optimization task generated by the Laplace equation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 466–472. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-466-472 (In Russian, Abstr. in Engl.).